В.З. Аладьев

Классические однородные структуры

Клеточные автоматы

❖

Fultus™ Books

Classical Homogeneous Structures
Cellular Automata

by

V. Z. Aladjev

ISBN 1-59682-137-X

Published by Fultus Publishing

Publisher Web Site: *www.fultus.com*

Fultus eLibrary: *elibrary.fultus.com*

Online Book Superstore: *store.fultus.com*

Writer web site: *writers.fultus.com/aladjev/*

Оглавление

Посвящается
моим жене Галине,
дочери Светлане,
внукам Артуру и Кристо

Список принятых сокращений

d*-ОПДФ** – обобщенная проблема декомпозиции ***d-мерных глобальных функций
d*-ОС** – ***d-мерные однородные структуры
d*-ПДФ** – проблема декомпозиции ***d-мерных глобальных функций перехода
АГ – асинхронная грамматика
ВБ – внутренний блок
ВС – вычислительные системы
ВСКФ – взвимно стираемые конфигурации
ГФП – глобальная функция перехода
ДПДС – дискретная параллельная динамическая система
ИСГ – изотонная структурная грамматика
КБД – картинные базы данных
КФ – конфигурация (*конфигурации – в зависимости от контекста*)
КФФ – конфигурация Французского флага
ЛБФ – локальная блочная функция
ЛФП – локальная функция перехода
МТ – машина Тьюринга
MT^s_q – машина Тьюринга с ***s*** символами на ленте и ***q*** состояниями
НКА – недетерминированный конечный автомат
НКФ – неконструируемые конфигурации
ОВС – однородные вычислительные системы и среды
ОПДФ – обобщенная проблема декомпозиции глобальных функций перехода
ОПС – общая проблема синхронизации
ОС – однородные структуры ***(ОС-модели)***
ОСнР – однородные структуры на разбиении (*с индексом соседства Марголуса*)
ОСП – однородные структуры с памятью
ОСР – однородные структуры с рефрактерностью
ПВМ – параллельные вычислительные модели
ПГ – параллельная грамматика
ПДФ – проблема декомпозиции глобальных функций перехода
ПК – персональный компьютер
ПООС – последовательность однозначно определенных сумм
ПОР – проблема ограниченного роста
ПП – параллельные подстановки
ППГ – параллельные пространственные грамматики
ПППГ – параллельные программируемые пространственные грамматики
ПФФ – проблема Французского флага
СКА – системы компьютерной алгебры
ССП – система продукций Поста
ТОС – теория однородных структур
ТТГ – Таллиннская Творческая Группа
ТФГ – теория формальных грамматик
УКФ – универсальные конфигурации
УМТ – универсальная машина Тьюринга
ШС – шаблон соседства
ЭВМ – электронно-вычислительная машина
ЯПП – язык параллельных подстановок

List of the adopted abbreviations

∞-MEC	– infinite mutually erasable configurations
AI	– Artificial Intelligence
AS	– algebraic system
CA	– cellular automata ***(CA-models)***
CF	– configurations
d-GDP	– ***d***-dimensional global decomposition problem
d-GLDP	– ***d***-dimensional generalized global decomposition problem
d-HS	– ***d***-dimensional homogeneous structures
d-HSM	– ***d***-dimensional homogeneous structures with memory
d-HSR	– ***d***-dimensional homogeneous structures with refractertity
ESP	– elementary symmetrical polynomials
FA	– functional algorithm
FGT	– formal grammar theory
GDP	– global decomposition problem
GLDP	– generalized global decomposition problem
GLHS	– generalized linear classical ***d-HS***
GTF	– global transition function
HS	– homogeneous structures ***(HS-models)***
HSR	– homogeneous structures with refractertity
IAN	– International Academy of Noosphere
IB	– internal block
LRA	– locally realizable algorithms
LTF	– local transition function
MEC	– mutually erasable configurations
MTOHS	– mathematical theory of homogeneous structures
MT^s_q	– Turing machine with ***s*** symbols on a tape and ***q*** states
NCF	– nonconstructible configurations (***Garden–of–Eden*** *configurations*)
NCF-1	– nonconstructible configurations of type ***1***
NCF-2	– nonconstructible configurations of type ***2***
NCF-3	– nonconstructible configurations of type ***3***
NI	– neighborhood index of ***d-HS***
NT	– neighborhood template of ***d-HS***
PADHS	– parallel algorithms defined by the classical ***d-HS***
PC	– personal computer
PCF	– passive configurations
RANS	– Russian Academy of Natural Sciences
SRC	– self-reproducing configurations in the Moore sense
SUDS	– sequence of uniquely defined sums
TRG	– Tallinn Research Group
TWPM	– two-way pushdown machines
UCF	– universal configurations
UHS	– universal homogeneous structures
UMT	– universal Turing machine
VCF	– vanishing configurations

Предисловие

Основные современные тенденции развития перспективных архитектур высокопараллельной *вычислительной техники* ***(ВТ)*****,** проблемы моделирования дискретных параллельных процессов, теория параллельных дискретных динамических систем, дискретная математика и синергетика, задачи искусственного интеллекта и робототехники, параллельные обработка информации и алгоритмы, физическое и биологическое моделирование, а также целый ряд других важных предпосылок в различных областях современного естествознания определяют в последние годы новый подъем интереса к различного типа формальным клеточным моделям, исповедующим высокопараллельный образа действия, важнейшими из которых являются *однородные структуры* ***(ОС;*** основной синоним **–** *клеточные автоматы***;** в англоязычной терминологии соответственно **–** *Homogeneous Structures* и *Cellular Automata***).** За время**,** прошедшее после выхода в свет монографий и сборников статей [1,3,4,5,7-10,15,45,53-57,75,82,83,143,145,146,152-157,171,173,175,197,304,408,467], посвященных различным теоретическим и прикладным аспектам ***ОС*****-**проблематики **(***это прежде всего относится к работам* [1,5,8,9,90,134,141,144,145,146,169,164,186,293]**),** достигнут определенный прогресс в этом направлении, что связано, прежде всего**,** с успехами теоретического характера, существенным расширением сферы приложений ***ОС*****-**моделей **(***главным образом***,** *в информатике и кибернетике***,** *физике***,** *биологии***,** *вычислительных науках***)** и значительным увеличением количества исследователей в данной области. Наряду с этим**,** в США, Японии, Великобритании, Германии и Эстонии появился целый ряд монографий и сборников**,** обобщающих и суммирующих итоги развития тех или иных направлений теории ***ОС (ТОС)*** и ее многочисленных приложений во многих областях. Наши монографии [1,3,5,8,10] на содержательном уровне представили обзор основных результатов по ***ТОС*****-**проблематике, полученных ***Таллиннской Творческой Группой*** за ***30*****-**летний период ее научно-прикладной деятельности, исключая десятилетний перерыв ***(1997–2006)*****,** обусловленный активной работой над системами компьютерной математики такими, как ***MathCAD*****,** ***Reduce*****,** ***Mathematica*** и ***Maple*****.**

С теоретической точки зрения понятие *клеточных автоматов* **(***Cellular Automata***,** *shortly* ***CA)*** было введено в конце ***1940-х Дж. фон Нейманом*** с подачи ***С. Улама*** в качестве формальных моделей самовоспроизведения организмов. При этом изученные ими структуры были, главным образом, ***1-*** и ***2-***мерными, хотя рассматривались и более высокие размерности. Вопросы универсальности вычислений наряду с другими теоретическими вопросами поведения данного типа клеточных структур также не были упущены из вида**.** ***CA-***модель ***Дж. фон Неймана*** получила дальнейшее развитие в работах его непосредственных последователей, чьи результаты вместе с законченной и отредактированной работой самого ***Джона фон Неймана*** были изданы ***А.В. Берксом*** [124,128]**.** Дальнейшее развитие и широкая популяризация ***CA-***проблематики связаны с именами таких исследователей как ***В.З. Аладьев, S. Amoroso, E. Banks, J. Buttler, E. Codd, S. Cole, G. Hedlund, G. Herman, J. Holland, M. Kimura, Y. Kobuchi, A. Maruoka, E.F. Moore, J. Myhill, H. Nishio, T. Ostrand, A. Smith, T. Yaku, H. Yamada, A. Waksman*** и некоторых других, работы которых в ***1960-х – 1970-х*** привлекли внимание к данной проблематике с теоретической точки зрения, а также решили и сформулировали целый ряд достаточно интересных проблем [5,536]. Впоследствии математики, физики и биологи начали изучать и использовать клеточные автоматы **(***однородные структуры***)** для различного рода проблем моделирования в своих собственных областях исследования**.** Мы лично познакомились с ***CA-***проблематикой в ***1969*** г., благодаря русскому переводу прекрасного сборника трудов под ред. ***Р. Беллмана*** [123], содержащего также ныне хорошо известные работы классиков и родоначальников данного направления ***Э.Ф. Мура, Дж. Майхилла*** и ***С. Улама.***

С более практической точки зрения и игрового эксперимента ***CA***-модель заявила о себе в конце ***1960-х,*** когда ***Дж. Х. Конуэй*** представил хорошо известную теперь игру ***«Life».*** Игра стала весьма популярной через рубрику ***М. Гарднера*** в журнале ***Scientific American*** и привлекла внимание к ***CA***-проблематике как многочисленных ученых из различных областей, так и любителей [5,239]. Первоначальной целью этой игры было запрограммировать весьма простой набор правил для изучения макроскопического поведения популяций. Критерий для отбора правил был основан на том принципе, что рост или распад популяции не должны быть легко предсказуемыми. На сегодня игра ***«Life»,*** вероятно, самая известная ***ОС***-модель; при этом, она обладает способностью к самовоспроизведению так же, как вычислительной универсальностью. Универсальность игры была доказана ***Дж. Конуэем,*** показавшим, что универсальная машина Тьюринга может быть погружена в игру ***«Life»,*** т.е. работа машины Тьюринга имитируется пространствено-временной динамикой такой ***CA***-модели. Позже был предложен весьма простой способ реализовать любую булеву функцию в конфигурациях игры ***«Life»*** [536]. Таким образом, даже такая очень простая ***ОС***-модель оказалась эквивалентной универсальной машине Тьюринга. К данной ***ОС***-модели не пропадает значительный интерес и до настоящего времени.

Однородные структуры (ОС) представляют особый интерес в теории абстрактных автоматов и именно с точки зрения их *структурного* аспекта (*как регулярных сетей идентичных элементарных автоматов, взаимосвязанных локальным образом*), структурная организация которых обеспечивает целый ряд важных качественных характеристик, представляющих теоретический и, пожалуй, в большей степени прикладной интерес. Теория *однородных структур* имеет весьма широкий круг приложений как в ряде разделов математики, так и в более прикладных областях. Понятие ***ОС*** может служить прекрасной модельной средой в самых разнообразных задачах, благодаря чему вполне возможно их применение в различных научных и прикладных исследованиях.

В настоящее время ***ОС***-модели исследуются со многих точек зрения и взаимосвязь такого типа однородных структур с уже существующими проблемами обнаруживаются постоянно. В целях общего ознакомления с обширной ***CA***-проблематикой в целом и с ее отдельными основными направлениями рекомендуется обратиться к интересным и разноплановым обзорным работам таких исследователей, как ***В. Аладьев, V. Cimagalli, K. Culik, D. Hiebeler, A. Lindenmayer, A. Smith, P. Sarkar, M. Mitchell, T. Toffoli, R. Volmar, S. Wolfram*** и др. [536]. Ряд книг и монографий таких авторов, как ***В.З. Аладьев, А. Адаматский, E. Codd, А. Ильяшинский, M. Duff, M. Garzon, M. Duff, P. Kendall, S. Wolfram, В. Кудрявцев, N. Margolus, T. Toffoli, O. Martin, K. Preston, B. Voorhees, M. Sipper, R. Vollmar*** и некоторых других также содержат некоторые исторические экскурсы в ***ОС***-проблематику; к сожалению, единой точки зрения на исторический аспект по данному вопросу не существует [5,536]. Наконец, библиография, представленная в [163,185,187,255,336,496,516-519, 536], содержит довольно много очень полезных ссылок на работы по ***CA***-проблематике, включая ее многочисленные прикладные аспекты. Данная библиография весьма полезна, прежде всего, начинающим исследователям в этой области.

Между тем, рассматривая исторический аспект ***CA***-проблематики, мы не должны забывать того вклада, который привнесли в данную проблематику пионерские работы ***К. Цузе,*** и с которыми мировое научное сообщество ознакомилось достаточно поздно и даже зачастую без упоминания его в данном историческом аспекте. При этом, ***К. Цузе*** не только создал первые *программируемые* компьютеры ***(1935 – 1941)*** и изобрел первый высокоуровневый язык программирования ***(1945),*** но был также и первым, кто ввел идею ***Rechnender Raum*** (*вычислимые пространства*) [126,188,423], другими словами – *клеточные автоматы* (*однородные структуры*) в современной терминологии. Только много лет спустя подобные идеи были переизданы, популяризировались и развивались в работах других авторов таких, как ***Э. Фредкин, Т. Тоффоли, С. Вольфрам*** и т.д. [536].

С самого начала наших научных исследований в ***1969*** по ***ТОС*** и ее приложениям, прежде всего, в математической биологии развития постепенно была сформирована неформальная *Таллиннская* *творческая группа* ***(ТТГ)***, включающая исследователей из целого ряда крупных научных центров бывшего Союза. Состав ***ТТГ*** не являлся строго определенным и изменялся в довольно широких пределах в зависимости от тематики исследуемых проблем. Полная библиография работ ***ТТГ***, включая работы по ***ТОС***-проблематике, может быть найдена в монографиях [1,3,5,7,10]. Там же представлена обширная библиография работ и других исследователей, внесших существенный вклад в развитие теоретических и прикладных аспектов данного направления современной математической кибернетики, выходящего на уровень ***междисциплинарного*** предмета. Весьма обширная библиография к настоящей книге содержит наиболее доступные как наши работы, содержащие основные, полученные ***ТТГ***, результаты по ***ТОС***-проблематике, а также целый ряд наиболее известных зарубежных работ в данном направлении. В книгах [1,7,9,10] представлен анализ деятельности ***ТТГ*** за ***30***-летие ее активности, который может быть поучительным и для исследования динамики развития ***ТОС***-проблематики как научного направления в целом.

В настоящее время ***ТОС*** интенсивно развивается очень большим коллективом исследователей во многих странах мира и, прежде всего, в США, Германии, Италии, Франции, Японии, Венгрии и Великобритании. Сформировался целый ряд исследовательских групп в указанных странах. До последнего времени весьма активная научная деятельность в этом направлении проводилась и в Эстонии в рамках ***ТТГ*** (*впоследствии Балтийского отделения Международной Академии Ноосферы*), целый ряд пионерских результатов которой получили международное признание и составили достаточно существенную часть современной ***ТОС***.

Ежегодно проводятся национальные и международные научные форумы различного уровня по ***ТОС*** и ее прикладным аспектам. Из года в год растет количество публикаций в различных как периодических, так и непериодических изданиях (*в США с* ***1987*** *г. по этой проблематике издается специальный журнал* «***Complex Systems***»), специальных монографий, книг, трудов конференций и сборников статей, разрабатываются национальные программы по ***ТОС***-проблематике [121], что с полным основанием позволяет говорить о постоянно растущем интересе к этой проблематике. Наряду с этим, ***ТОС*** представляет собой достаточно хорошо развитую самостоятельную часть общей теории абстрактных автоматов со своими методами, проблематикой и приложениями. Много вопросов ***ТОС***-проблематики решено, но еще значительное число остается открытыми или находится на различных стадиях решения. Оформлением ***ТОС*** в качестве самостоятельного научного направления явилось определение для нее с ***1979*** г. специального *индекса* ***68Q80*** в ***AMS*** (*международной предметной классификации Американского математического общества*), выделение специального раздела в Математических энциклопедиях [119,443], активные попытки создания развитой классификации направлений в ***ОС***-проблематике [120], а также создание под эгидой ***IFIP*** международной *рабочей группы* по однородным структурам (*клеточным автоматам*). С ***1987*** ***ОС***-проблематика все шире представляется на международных конференциях ***(США, Германия)*** по математическому и компьютерному моделированию как пленарными, так и секционными докладами. Пользователи компьютерной сети ***Internet*** имеют доступ к информации по данной проблематике по ключевым фразам «***cellular automata***», «***однородные структуры***», «***клеточные автоматы***», включая и такие вопросы как исследовательские группы, библиография, научные форумы, отдельные работы и другие важные аспекты ***ТОС***-проблематики.

В предыдущих работах мы исследовали различные аспекты математической ***ТОС*** и многих ее приложений, главным образом, в математической биологии развития, вычислительной технике, информатике и математике. Проблематика исследованных нами вопросов достаточно обширна и в значительной мере охватывает основные направления исследований современной ***ТОС*** и ее многочисленных приложений. Читателю, заинтересованному этой тематикой, рекомендуются работы из приведенной весьма обширной литературы, в свою очередь содержащие достаточно обширную библиографию по рассматриваемой ***ТОС***-проблематике. В данной монографии ряд фундаментальных проблем математической ***ТОС*** рассматривается на примере ***классических ОС***, представляющих собой не только формальную модель параллельных вычислений аналогично тому, как машины Тьюринга, машины и системы продукций Поста, алгоритмы Маркова и др. представляют собой формальные модели последовательных вычислений, но и составляющих основу всей ***ОС***-концепции в целом. Таким образом, рассматриваемая в данной книге тематика представляет интерес и для теории вычислимости, предлагая, вместе с тем, весьма прозрачную и простую модель как для освоения концепции и основных фундаментальных понятий, так и результатов современной ***ТОС***-проблематики в целом.

Предлагаемая читателю монография носит вполне доступный характер и в ней во многом на содержательном уровне рассматриваются базовая концепция классической ***ОС***-модели, основы ее теории и прикладные аспекты ***ОС***-проблематики. При этом, рассмотрение основывается на классической ***ОС***-модели размерностей ***1*** и **2**, позволяя (*не нарушая общности*) неискушенному читателю легче войти в проблематику предмета, не отвлекаясь на излишние громоздкость и сложность. В качестве ***базовой*** выбрана именно классическая ***ОС***-модель, составляющая основу либо непосредственный прототип всех наиболее известных ***ОС***-подобных моделей (*клеточные процессоры и структуры, однородные вычислительные среды, систолические структуры, нейронные и итеративные сети и т.д.*) и не требующая специальных знаний из ряда разделов математики, кибернетики и др. Более того, теория классических ***ОС***-моделей на сегодня является наиболее исследованной и развитой как вполне самостоятельного математического раздела. И вместе с тем, знакомство с классической ***ОС***-моделью составляет основу формирования так называемого «*параллельного образа мышления*» с последующим освоением подобных ей высокопараллельных дискретных систем (*недетерминированные, стохастические **ОС**-модели и т.д.*).

Учитывая обширность материала, объем книги и преследуемые цели, настоящая книга носит в значительной степени обзорный характер и написана скорее на содержательном уровне, чем в виде строгих математических формулировок, но не в ущерб внутренней строгости изложения. Представленные в книге результаты и соображения по мере возможности не требуют серьезной математической подготовки и не превышают уровня сведений в объеме програм университетов физико-технического профиля по курсу математики. Данный подход позволяет существенно проще осознавать суть и концепции предлагаемой проблематики, не отвлекаясь на отдельные технические вопросы, присущие сугубо методологии самой ***ТОС***-проблематики. Рассмотренные ниже фундаментальные проблемы охватывают, практически, ***базовый уровень*** теории и вводят начинающего читателя в ***ТОС***-проблематику, представляющую собой вполне самостоятельную ветвь общей теории бесконечных абстрактных автоматов с весьма специфической внутренней организацией и ныне носящую ***междисциплинарный*** характер.

Современный рост интереса к ***ОС***-проблематике обусловлен возможностями ее эффективного применения в двух определяющих направлениях: ***(1) формальная модель высокопараллельной обработки информации во всей ее общности и (2) удобная среда моделирования разнообразных естественных и искусственных дискретных систем, процессов и явлений, допускающих весьма высокий уровень распараллеливания.*** Интерес к ним усиливается и возможностью практической реализации высокопараллельных вычислительных ***ОС***-моделей на основе современных успехов микроэлектроники и перспективами обработки информации на молекулярном уровне (*методы нанотехнологии*). Сама ***ОС***-концепция обеспечивает построение концептуальных и практических моделей *пространственно-распределенных* динамических систем, из которых физические системы являются наиболее интересными и перспективными.

Модели, которые явным способом сводят ***макроскопические*** процессы к строго определенным ***микроскопическим*** процессам, представляют ***особый*** гносеологический и методический интерес, ибо они обладают большой убедительностью и прозрачностью. Именно с данной точки зрения различного типа ***ОС***-модели представляют особый интерес, прежде всего, с прикладной точки зрения при исследовании целого ряла процессов, явлений и феноменов в различных областях, и в первую очередь в физике. В частности, на основе ***ОС*** можно создавать весьма простые модели дифференциальных уравнений физики (*Навье-Стокса, теплопроводности и др.*), динамики газов и жидкостей, целого ряда важных задач коллективного поведения, например, турбулентность, фрактальность, хаос, упорядочение и др.

Вместе с тем вопреки росту актуальности ***ТОС***-проблематики здесь на сегодня сложилась весьма своеобразная ситуация. Прежде всего, география активности исследований в этом направлении носит достаточно пестрый характер. Наибольшая активность приходится здесь на такие страны как США, Япония, Великобритания, Германия, Франция, Венгрия, Италия. Тогда как в бывшем СССР данная проблематика поддерживалась усилиями относительно небольшого количества исследователей из различных научных центров, а также несколькими объединенными общей ***ТОС***-проблематикой исследовательскими группами. Отечественные научные издания в данном направлении за ***30***-летний период представляют всего восемь монографий, из которых четыре приходятся на ***ТТГ***. Также относительно малочисленны по ***ТОС***-проблематике и отечественные периодические публикации, да и относятся они в значительной степени к сугубо прикладным ее аспектам в вычислительных науках. Во-вторых, при всем обилии и разнообразии публикаций за рубежом и там число книг и монографий по ***ТОС***-проблематике относительно невелико и не превышает ***200***. За редким исключением все эти книги ориентированы на уже подготовленного читателя и не могут оказать существенного влияния на решение весьма актуальной проблемы популяризации концепции, идей, методов, подходов да и возможностей, обеспечиваемых ***ОС***-моделями во всей их общности. Наконец, по ***ТОС***-проблематике сложился ряд направлений и научных школ, среди которых в ряде случаев отсутствует серьезная научная связь, что приводит к существенному дублированию результатов и другим издержкам. Так, пространная (*вследствие многочисленных рисунков*) и претенциозная книга «***A New Kind of Science***» [407] содержит немало результатов, которые были получены намного раньше целым рядом других исследователей по ***ТОС***-проблематике, в том числе, советскими авторами (см. [1,3-5,8,9,53-57,80,82,83,127-135,137-142, 150-161,169-171,175-179,182-191,195-201,230-233,240,241,536] и многие др.). Кроме того, целый ряд фундаментальных результатов в этом направлении принадлежат другим исследователям. Явная предвзятость автора книги не позволяет ему смотреть достаточно объективно и на хронологию ***ТОС***-проблематики в целом. Устранить подобные недостатки в свете вышесказанного призваны не только упомянутая ранее *рабочая* группа в составе ***IFIP***, но также и создание целого ряда книг по ***ТОС***-проблематике научно-популярного характера и различной ориентации.

Вкратце остановиться на упомянутой книге «*A New Kind of Science*» (*Наука нового типа и не менее*) [407] целесообразно именно в связи с корректной идентификацией места ***ТОС***-проблематики в составе других разделов современного естествознания. Объемистое издание только на первый взгляд может служить неким откровением для тех, кто ни в малейшей степени не знаком с ***ТОС***-проблематикой (*клеточными автоматами, Cellular Automata*). Несмотря на то, что книга содержит немало (*в целом ряде случаев весьма интересных*) примеров применения ***ОС***-моделей, как ее стиль, так и целый ряд содержащихся в ней утверждений носит весьма тенденциозный характер, не имея реального подтверждения. Само же ее название носит, скорее, коммерческий, рекламный характер, рассчитанный на широкую публику, а не на серьезную научную аудиторию. Отметим только некоторые из авторских откровений, а именно. «*Эта книга – результат двадцатилетнего труда по созданию науки нового типа. Я и не предполагал, что все так затянется. Работа затрагивает практически все сферы познания и даже простирается немного дальше за их пределы.Я пришел к выводу, что мое открытие - одно из наиболее важных во всей истории теоретической науки.*». Далее сам автор утверждает, что компьютерные модели, названные *клеточными автоматами*, представляют ключ к пониманию всех сложностей природы – от кварков до экономических систем. Он утверждает, что его книга была понята как «*инициирующая в науке сдвиг парадигмы исторической важности, с новыми приложениями, появляющимися каждый год все в большем количестве.*»

На самом же деле ***С. Вольфрам*** нашел невзыскательную аудиторию для данных идей с помощью своего многостраничного самоизданного опуса, не имеющего достаточно серьезного отношения к собственно науке. Учитывая же спорные морально-этические принципы компании, которую возглавляет ***С. Вольфрам,*** можно вполне предположить, что данная книга – не только результат неутомимой работы фантазии автора, но и плод многолетней работы команды программистов, ученых, редакторов, дизайнеров. При этом, фактически ***С. Вольфрам*** перезапустил старые идеи, представленные на обсуждение в ***80-***х и ***90-***х годах прошлого века в области хаоса и сложности, которые можно рассматривать как единое поле деятельности. Специалисты в этой области уже давно говорят о том факте, что очень простые правила с помощью компьютера могут порождать чрезвычайно сложные картины, кажется, изменяющиеся беспорядочно, как функция времени. Подобным же образом, утверждают они, простые правила должны лежать также в основе целого ряда, по-видимости, сложных явлений в природе, но, естественно, далеко не всех [536].

Не вдаваясь в детальный обзор указанной книги (*некоторые из рецензий на нее можно найти в* [536] *и в Интернете*), только отметим, что вопреки преследуемым целям, книга не только не явилась откровением для специалистов, работающих по ***ТОС-***проблематике, но и в определенной мере сформировала и несколько искаженное представление о самой области исследований, на самом деле достаточно перспективной со многих точек зрения. Между тем, быть может, она и явилась откровением для любителей, интересующихся различного рода околонаучными теориями, или неспециалистов. Не красит эту книгу не только откровенно спекулятивный характер изложения (*когда в целом ряде случаев автор пишет о вещах, не имея на то понятия*), но и уничижительный тон к своим научным коллегам, которыми в целом ряде случаев получены намного более серьезные результаты, искажение истории предмета, попытки косвенного присвоения чужих результатов, менторский тон, ничем не обоснованные утверждения и многое другое, что не позволяет нам рассматривать данную книгу в качестве серьезного научного исследования. При этом, не стоит рассматривать наше мнение слишком предвзято – на фоне многочисленных отзывов на книгу оно смотрится в достаточно выдержанных тонах ([536], *A Collection of Reviews of* ***ANKOS***).

Между тем, нельзя утверждать, что эту книгу не стоит читать. Если вы можете проигнорировать эгоцентрический уклон, то она даст краткий обзор по ***ТОС-***проблематике и ее приложениям, хотя стиль ее изложения носит довольно сумбурный характер. И хотя основополагающий вывод книги – *простые программы объясняют все* – может вдохновить непрофессиональных читателей, однако весьма сомнительно, что эта книга вдохновит серьезное научное сообщество. Эта книга призывает ученых исследовать ***ОС-***модели, которые и так уже давно и успешно исследуются с различных точек зрения. По нашему мнению, книга представляет спекулятивный взгляд как на ***ОС***, так и на науку в целом. Она может представить некоторый интерес лишь для дилетантов в области ***ОС-***проблематики и для весьма нетребовательных любителей научной фантастики.

И еще на одном достаточно существенном аспекте следует остановиться особо. Любая хорошая теория, не говоря уже о ***«науке нового типа»***, должна предсказывать и получать нетривиальные качественно новые результаты, не повторяя уже имеющиеся и полученные иными средствами. В случае же с рассматриваемой ***ТОС-***проблематикой такого по большому счету не наблюдается – в вычислительном контексте ***ОС-***модели эквивалентны другим известным формальным моделям вычислителей, тогда как сам параллелизм использовался в природе и вычислительной технике и ранее, правда, в плане моделирования появляется возможность в целом ряде случаев намного более адекватного симулирования и эмпирического исследования многих процессов, объектов и явлений. Но если на эмпирическом фундаменте и можно построить определенные технические проекты и предположения, то фундаментальная наука требует весьма строгих математических обоснований. Именно по этой причине определенным противопоставлением точке зрения на ***ОС-***проблематику, декларируемой вышеупомянутой книгой [407], представим и свое видение данного вопроса. Наш опыт исследований в ***ТОС***-проблематике как на теоретическом, так и на сугубо прикладном уровнях говорит совершенно иное, а именно:

(1) ОС (*однородные структуры, клеточные автоматы*) представляют собой один из специальных классов *бесконечных* абстрактных автоматов со *специфической* внутренней организацией, которая обусловливает очень высокий уровень *распараллеливания* обработки информации и вычислений; данные структуры образуют специфический класс дискретных динамических систем, которые функционируют сугубо параллельным образом на основе принципа *локального* близкодействия; это позволяет исследовать их в русле и методами систем подобного типа;

(2) ОС могут служить вполне удовлетворительной моделью параллельных вычислений подобно тому, как машины Тьюринга (*нормальные алгоритмы Маркова, системы продукций и машины Поста,* ***TAG-, LAG-****системы и др.*) служат в качестве формальных моделей *последовательных* вычислений; подобно вторым ***ОС***-модели обладают свойством универсальной вычислимости; с данной точки зрения ***ОС*** можно рассматривать и как алгебраические системы переработки конечных слов на основе правил параллельных подстановок;

(3) сам принцип локального взаимодействия составляющих ***ОС*** единичных конечных автоматов, определяющего в результате их глобальную динамику, позволяет использовать ***ОС*** и в качестве прекрасной среды моделирования/симулирования весьма широкого круга процессов, явлений и феноменов; при этом, феномен *обратимости* ***ОС***-динамики делает ***ОС*** очень интересной средой как для физического моделирования, так и для создания очень перспективных вычислительных структур, использующих *нанотехнологии*. При этом, ***ОС*** можно рассматривать, прежде всего, как модельную альтернативу и дифференциальным уравнениям в частных производных. Наряду с этим ***ОС*** представляют весьма перспективную модельную среду для исследования тех явлений, процессов, феноменов и объектов, для которых отсутствуют известные классические средства. Между тем, следует констатировать, что собственно сама теория ***ОС*** известна достаточно давно довольно узкому кругу математиков и физиков. При этом вполне возможно, что пик активности теоретических исследований классических ***ОС***-моделей уже позади и, дав мощный импульс как различного рода модификациям и типам ***ОС***-моделей, так и многим прикладным разработкам, базирующимся на ***ОС***-концепции в широком смысле ее понимания, классические ***ОС***-модели не будут уже так активно теоретически исследоваться в качестве сугубо математического объекта.

В целом, ***ТОС***-проблематику, на наш взгляд, с большой долей достоверности можно представить себе как 2 составляющие, а именно: ***(1) ОС*** в качестве самостоятельного математического объекта исследований (*например, как высокопараллельные дискретные динамические системы, как формальные параллельные алгоритмы и грамматики, и ряд др.*) и **(2) *ОС*** как эффективную среду моделирования различных процессов, явлений и феноменов, суть которых использует повсеместный принцип локального взаимодействия элементарных составляющих (*в частности, целого ряда биологических, физических и химических процессов*). Как правило, первая составляющая достаточно интенсивно развивается математиками, тогда как большой вклад в развитие второй составляющей вносит и существенно более представительный круг исследователей из различных естественно-научных как теоретических, так и прикладных областей (*физика, химия, биология, техника и др.*). При этом, если сугубо теоретические исследования по ***ТОС***-проблематике в основе своей ограничиваются *классическими*, *полигенными* и *стохастическими* ***ОС***, тогда как результаты второй составляющей базируются на существенно более широком представительстве и типов, и классов ***ОС***-моделей, наделяющих составляющие их элементарные автоматы самыми разнообразными свойствами и с достаточно сложными правилами локального взаимодействия между ними. В целом отметим, если классические ***ОС***-модели представляют собой, прежде всего, формальные математические системы, исследуемые именно в данном контексте, тогда как их многочисленные модификации и обобщения образуют достаточно перспективную среду моделирования тех или иных явлений, объектов, процессов и феноменов.

Как нами уже отмечалось, в отличие от целого ряда других современных разделов естественных наук, теоретическая составляющая ***ТОС***-проблематики не столь существенно пересекается с ее второй прикладной составляющей и в этом отношении можно вполне уместно говорить о ***ТОС***-проблематике как о двух достаточно самостоятельных направлениях, а именно: ***(1)*** исследование математических ***ОС***-объектов как таковых и ***(2)*** использование ***ОС***-среды для симулирования; при этом, второе направление характеризуется и более широким спектром направлений сугубо прикладного характера. При этом, уровень развития второго направления в значительной мере определяется возможностями современных вычислительных систем (*кластеров*), т.к. ***ОС***-модели, как правило, реализуются на большом числе единичных автоматов и, как правило, с достаточно сложными правилами локального взаимодействия между собой.

Сам же ***ОС***-подход можно в целом ряде случаев ассоциировать с некоторым *модельным* аналогом дифференциальных уравнений, описывающих тот или иной процесс с тем отличием, что если дифференциальные уравнения *усредненно* описывают процесс (*что как расширяет охватываемый ими круг частных процессов, так и не позволяет для большинства из них определять соответствующие уравнения, тем более их решать аналитически*), то в соответствующим образом определенную ***ОС***-модель реально погружается некий исследуемый процесс и динамика модели весьма наглядно представляет *качественное* поведение исследуемого процесса. При этом, нужно лишь корректно наделить единичный автомат модели необходимыми свойствами (*состояниями*) и определить правила локального их взаимодействия. Таким образом, ***ОС***-подход можно использовать как для исследования процессов, описываемых сложными дифференциальными уравнениями, которые не имеют аналитического решения, так и для процессов, не позволяющих описывать их такими уравнениями.

В заключение еще раз отметим *одно* немаловажное обстоятельство. При обсуждении *классических однородных структур* мы акцентировали внимание на следующем весьма существенном моменте. Параллельные дискретные динамические системы, одними из которых и являются ***ОС***–модели, рассматривались нами именно как формальные *алгебраические* системы переработки конечных слов (*конфигураций*) в конечных алфавитах, не прибегая, как правило, к их микропрограммной среде, т.е. не используя на низшем уровне присущую им клеточную организацию, что отличает наш подход к исследованию данных объектов от подходов целого ряда других исследователей. При таком подходе однородные структуры рассматриваются на сугубо формальном уровне, что не позволяет в полной мере оперировать присущим им свойством высокого параллелизма как в области вычислений, так и обработки информации в целом.

Естественно, для решения прикладных задач в среде данного типа параллельных динамических дискретных систем и получения целого ряда тонких результатов, в первую очередь, модельного характера требуется подход на *микропрограммном* уровне, когда исследуемые процессы, объекты, алгоритмы и феномены непосредственно погружаются в среду однородных структур, используя ее конкретные параметры, а именно: размерность, алфавит внутренних состояний единичного автомата в структуре, индекс соседства автоматов (*интерфейсные правила единичных автоматов*) и локальная функция перехода единичного автомата (*программа функционирования структуры*). В случае такого подхода можно получать как решения для важных конкретных приложений, так и довольно высокого уровня обобщения теоретического характера. В частности, непосредственно погружая в объекты данного класса универсальные вычислительные алгоритмы или логические элементы, *композиции* которых обеспечивают универсальные вычисления, можно конструктивно доказывать универсальную вычислимость однородных структур и т.д.

Между тем, имея целый ряд неоспоримых преимуществ, вышеотмеченный т.н. ***прямой*** подход к исследованию структур не позволяет в ряде случаев получать результаты, характеризующие их именно как сугубо математические объекты, требуя применения методов и результатов из более абстрактных областей современной математики. Следовательно, наиболее *естественным*, на наш взгляд, представляется разумное сочетание обоих указанных подходов к изучению такого класса динамических дискретных систем, в качестве которых и выступают однородные структуры.

Наряду с попыткой, по-возможности, полнее охватить ***CA***-проблематику, лежащую как в русле наших интересов, так и в фундаменте собственно ***ТОС***, в настоящей монографии с достаточной степенью полноты представлены результаты и отечественных исследователей. Многие из этих результатов малоизвестны или совсем неизвестны англоязычному читателю, хотя целый ряд из них внесли весьма существенный вклад в становление современной теории *однородных структур (Homogeneous Structures)* {*синоним «клеточных автоматов» (Cellular Automata)*} и их приложений в качестве самостоятельного раздела *современной* математической кибернетики. Целый ряд из них впоследствии были заново переоткрыты другими исследователями. Часть из них представлены детально, тогда как другие указаны в перечне работ, содержащих наиболее важные результаты.

Настоящая монография ориентирована на самый широкий круг читателей, интересующихся стратегически важными направлениями современной вычислительной техники, кибернетики, математического моделирования в различных прикладных областях, параллельной обработкой информации и параллельными алгоритмами, формальными грамматиками, математической и теоретической биологиями, теорией автоматов, физикой, робототехникой, нанотехнологиями, искусственным интеллектом и др. Представит данная монография интерес также для студентов, аспирантов, докторантов и преподавателей соответствующих специальностей университетов, желающих углубить свои познания в очень перспективной области автоматного моделирования различного рода феноменов. Монография будет достаточно полезна всем, кто только начинает знакомиться с *однородными структурами*, их концепцией и основами теории. Читателю, который уже имеет определенный опыт исследовательской работы в этой сфере, монография представит достаточно полезную информацию к размышлению и ознакомит с основными результатами в данной области, полученными, прежде всего, советскими исследователями. Многих она сможет побудить к дальнейшим исследованиям в данной весьма перспективной области современной математической кибернетики. С нашими последующими исследованиями и публикациями по данной проблематике можно периодически знакомиться на наших ***Web***-страницах:

www.aladjev.newmail.ru, /www.aladjev.narod.ru, www.geocities.com/ca_hs_ref

Там же указаны адреса, в которые можно отправлять замечания и предложения по материалам настоящей монографии, а также в целом по довольно обширной тематике наших исследований. Все они будут приняты с благодарностью и без нашего внимания не оставлены. В значительной степени настоящая монография – второе переработанное и расширенное издание предыдущей нашей монографии [567], базирующейся на специальном курсе лекций «*Классические однородные структуры (Классические клеточные автоматы)*», данном автором для студентов старших курсов, магистрантов, докторантов факультета *математики* и *информатики* Гродненского университета (*Белоруссия*) в апреле – мае 2008 г. Монография, в основе своей, суммирует основные результаты, полученные нами в данном разделе современной математической кибернетики.

Введение

Теория однородных структур (ТОС), у истоков которой стояли такие крупнейшие современные математики и кибернетики, как ***Джон фон Нейман, С. Улам, Э. Мур*** и ***А. Черч,*** привлекла к себе пристальное внимание целого ряда исследователей в конце ***50-***х г. прошлого столетия благодаря основополагающим работам ***Э. Мура, Дж. Майхилла*** и ***А.В. Беркса,*** который систематизировал, завершил и издал работы ***Джона фон Неймана*** в этой области [5,124,128]**;** здесь и в дальнейшем мы часто будем делать ссылки на наши работы (*как более доступные*)**,** в которых дается обзор или представление соответствующих результатов других исследователей по ***ТОС-***проблематике или смежным вопросам, имеющим к ней наиболее близкое отношение. При этом, некоторые наши работы содержат и интересные исторические экскурсы по данной проблематике.

Однородные структуры переоткрывались не один раз и под различными названиями **–** в чистой математике они известны как раздел топологической динамики, в электротехнике они известны как итеративные сети, в биологии как клеточные структуры и т.д. Поэтому, предлагаемый ниже краткий исторический экскурс ставит целью определить *основные* этапы становления собственно самой ***ОС-***теории, не отвлекаясь на многочисленные частности. При этом, следует иметь в виду, что по ***ТОС-***проблематике работает целый ряд групп и отдельных исследователей, недостаточно или совершенно не связанных друг с другом, что зачастую ведет к серьезному дублированию работ и результатов. Начав свои исследования по ***ТОС-***проблематике в ***1969*** г.**,** мы располагаем вполне достаточной информацией (*как на основе анализа большинства публикаций*, *так и в процессе непосредственого общения со многими ведущими исследователями в этом направлении*) относительно объективного развития основных ее направлений (*и в первую очередь*, *теоретического характера*)**.** Это позволяет нам с достаточной степенью объективности хронометрировать основные этапы ее развития**;** многие детали исторического характера по ***ТОС-***проблематике можно найти в книгах [1,3,5,8-10,53-56,114,131,135,146,150,161,163,179,186,230,264,265,271,536].

Однородные структуры (***ОС***) в их первоначальном виде были определены ***Дж. фон Нейманом*** на базе предложения ***С. Улама*** с целью получить более реалистическую и хорошо формализуемую модель для исследования поведения сложных развивающихся систем. Сам ***С. Улам*** использовал ***ОС-***подобные модели, в частности, для исследования проблемы роста кристаллов и некоторых других растущих по *рекуррентным* правилам дискретных систем. Несколько позднее подобные структуры начал исследовать и ***Алонзо Черч*** в связи с работами по бесконечным абстрактным автоматам и математической логике. В этой же связи весьма уместно упомянуть и пионерские работы по ***ОС-***проблематике немецкого инженера ***Конрада Цузе –*** автора первой программно-управляемой универсальной вычислительной машины[126]. Им был высказан целый ряд весьма прогрессивных для своего времени взглядов на структуру команд ЭВМ, программирование как последовательное, так и параллельное и др., включая клеточные вычислительные пространства, явившиеся *прообразом* современных вычислительных ***ОС-***моделей**.** На сегодня ***ОС-***модели имеют ряд синонимов**,** из которых наиболее распространенным является термин «*клеточные автоматы* (*Cellular Automata*)**».** В дальнейшем, говоря «*однородные структуры*» (*основываясь на русскоязычной терминологии* [119,443,536])**,** будем везде понимать также и их синонимы, и наоборот.

В ***1969 Конрад Цузе*** выпустил книгу «*Rechnender Raum*» (*Вычислительное пространство*)**,** в которой излагал мысли о том, что физические процессы **–** суть вычисления, тогда как наша *Вселенная* есть ничто иное, как «*cellular automaton*» (***CA***)**,** т.е. «*клеточный автомат*»**;** само же понятие ***CA*** ввел ***Дж. фон Нейман.*** Для конца ***70-х*** такой взгляд на Вселенную был новаторским**,** тогда как сейчас идея вычисляющей саму себя Вселенной никого не щокирует**,** находя логичное место в теориях ряда исследователей, работающих в области квантовой механики [536]. К сожалению, сегодня книга ***К. Цузе*** малознакома (*если не сказать – незнакома совсем*) даже весьма дотошным исследователям и специалистам в этой области. Чтобы исключить имеющиеся на сегодня спекулятивные аспекты исторического характера, в будущих исторических исследованиях весьма целесообразно на это обратить самое пристальное внимание.

И здесь было бы вполне уместно отметить одно очень любопытное с исторической точки зрения обстоятельство. В отличие от ***Джон фон Неймана, К. Цузе*** однородные структуры рассматривал лишь с точки зрения цифровой вычислительной техники ***(ВТ)***, не связывая их с использованием в других областях приложений. К сожалению, сложившиеся на то время обстоятельства [126] не позволили ознакомиться с его идеями и разработками широкому кругу специалистов и ученых. В то время как ***Джон фон Нейман*** ограничился применением однородных структур только для биологического моделирования. Возможно, ***фон Нейман*** не был заинтересован в исследованиях ***ОС***-моделей в качестве самостоятельного математического объекта либо в качестве формальной модели высокопараллельной ***ВТ***. Эти обстоятельства, вероятно, и привели к тому, что высокий уровень параллелизма, допускаемый однородными структурами, и не явился определяющим фактором на *начальной* стадии развития ***ВТ***. Принимая во внимание то влияние, которое оказал авторитет ***фон Неймана*** на развитие ***ВТ*** [124] (*не зря до сих пор основу современной* ***ВТ*** *составляет так называемая вычислительная модель фон Неймана*), его предложение по применению клеточных автоматов в вычислительных целях на *заре* зарождения современной ***ВТ***, по-видимому, могло бы изменить ход последующей истории ее развития. С другой стороны, практическое незнакомство с работами ***К. Цузе*** широкой научной общественности и не сравнимый с ***Джон фон Нейманом*** научный авторитет не позволили им оказать серьезного влияния на последующий ход развития как ***ВТ***, так и собственно ***ТОС***-проблематики. В результате чего сегодня мы имеем то, что имеем, а именно – развитую ***ВТ***, исповедующую последовательную вычислительную модель ***Джон фон Неймана***, и интенсивные проработки по созданию перспективных средств ***ВТ*** на основе иных, ненеймановских параллельных моделей вычислителей, одними из которых и являются именно вычислительные формальные ***ОС***-модели.

Одной из основных предпосылок, стимулировавших зарождение ***ОС***-концепции параллельных дискретных систем, явилась настоятельная потребность в достаточно хорошо формализуемой среде для моделирования процессов биологического развития и, прежде всего, самого процесса самовоспроизведения. ***Джон фон Нейман*** и целый ряд его последователей достаточно детально исследовали вопросы вычислительных и конструктивных возможностей первых ***ОС***-моделей, которые были завершены и собраны ***А. Берксом*** в его превосходных книгах [124,128], которые определили развитие исследований в этом направлении на несколько лет. В процессе работ по ***ОС***-проблематике ***А. Берксом*** при Мичиганском университете была создана исследовательская группа «*The Logic of Computer Group*», из которой впоследствии вышел целый ряд первоклассных специалистов по ***ТОС***-проблематике (***Дж. Холланд, Р. Лэнинг, Т. Тоффоли*** *и др.*). Ранние идеи и работы ***Дж. фон Неймана, С. Улама, А. Черча*** и ряда их непосредственных последователей [125, 127,129-133,288-299] мы можем с полным основанием отнести к ***первому*** этапу становления ***ТОС***-проблематики в целом.

Вторым этапом в становлении ***ТОС*** можно считать опубликование теперь широко известных работ ***Э. Мура*** и ***Дж. Майхилла*** [274,275] по проблеме неконструируемости в классических ***ОС***-моделях, которые наряду с решением ряда сугубо математических задач явились своего рода катализаторами активности, привлекшими пристальное внимание к этой проблематике целого ряда математиков и исследователей из других областей. Формируются научные коллективы и школы по ***ТОС***-проблематике в США, ФРГ, Японии, Италии, Франции, ГДР, Венгрии и Эстонии ***(ТТГ, 1969 г.)***. В частности, именно этим работам мы обязаны своим интересом к данной области исследований, после ознакомления с упомянутой работой ***Э. Мура*** в превосходном сборнике статей под ред ***Р. Беллмана*** [123].

Наконец, теоретические работы ***Э. Кодда*** [125], ***Г. Хедлунда*** [127], ***А.Р. Смита*** [131], ***Х. Ямада и С. Аморозо*** [129,130], ***Э. Бэнкса*** [132], ***Т. Остранда*** [133], ***В. Аладьева*** [1,2-5,17-35], ***Т. Китагава*** [134] и целого ряда других исследователей положили начало собственно *современной* математической ***ТОС***, выросшей к настоящему времени в самостоятельную ветвь теории абстрактных автоматов, имеющую многочисленные интересные приложения в различных областях науки и техники. Многочисленные исследователи подготовили вступление ***ТОС*** в конце ***60-***х годов прошлого века в современный этап ее развития, характеризующийся объединением ранее разрозненных идей и методов на общей концептуальной и методологической платформах и весьма существенным расширением областей ее приложений, особенно в физике, математической биологии развития, параллельной обработкой информации, параллельными алгоритмами, вычислительных науках и информатике, связанных с математическим и компьютерным моделированием, разработкой перспективных архитектур высокопроизводительной ***ВТ*** и др., в значительной степени выводя ***ОС-***концепцию на междисциплинарный уровень.

Особый интерес к ***ОС-***моделям возобновился в начале ***80-х*** годов прошлого века в связи с весьма активными исследованиями по проблеме искусственного интеллекта ***(ИИ)***, по созданию новых перспективных архитектур высокопроизводительной ***ВТ***, информатикой, физикой и другими важными мотивациями. На наш взгляд, именно с работ ***Bennet C., Grassberger P., Boghosian B., Crutchfield J., Chopard B., Culik II K., Gács P., Green D., Gutowitz H., Ibarra O., Kobuchi Y., Langton C., Margolus M., Martin O., Mazoyer J., Toffoli T., Wolfram S., Аладьева В.З., Бандман О.Л.*** и др. [536] начался новый всплеск интереса к ***ОС*** как среде, прежде всего, *физического* моделирования. Наконец предполагается, что именно ***ОС*** могут сыграть чрезвычайно важную роль в качестве как концептуальных, так и прикладных моделей *пространственно-распределенных* динамических систем, в числе которых в первую очередь представляют особенный интерес вычислительные, физические и биологические клеточные системы. В данных направлениях уже налицо весьма существенная активность целого ряда исследователей, получивших вполне обнадеживающие результаты [1,3-5,9,69,90,145,146,153,155-157,161,162,197,269,275,355,536]. В предисловии приведен ряд соображений в подтверждение роли и места ***ОС-***проблематики в структуре современной математической кибернетики и связанных с ней естественно научных направлений и, прежде всего, прикладного характера.

Современная точка зрения на ***ТОС***, как на отдельную ветвь теории абстрактных бесконечных автоматов, сформировалась под влиянием основополагающих работ ***Адаматского А., Arbib M., Аладьева В.З., Amoroso S., Bagnoli F., Bandini S., Бандман О.Л., Banks E.R., Barca D., Барздиня Я., Bays C., Binder P., Boghosian B., Burks A.W., Butler J., Cattaneo G., Chate H., Chowdhury D., Church A., Codd E., Cole S., Crutchfield J., Culik K., Das R., Durand B., Durret R., Fokas A., Fredkin E.F., Gács P., Gardner M., Gerhardt M., Golze U., Grassberger P., Green D., Griffeath D., Gutowitz G., Hedlund G., Hemmerling A., Holland J., Honda N., Ibarra O., Икауниекса Э., Ильяшинского А., Jen E., Kaneko K., Kari J., Kimura M., Kobuchi Y., Langton C., Legendi T., Li W., Lieblein E., Lindenmayer A., Martin O., Maneville P., Margolus N., Maruoka A., Mazoyer J., Mitchell M., Moore E.F., Morita K., Myhill J., Nasu M., John von Neumann, Nishio H., Ostrand T., Pedersen J., Подколзина А., Richardson D., Sato T., Sarkar P., Шерешевского М., Sipper M., Smith A., Sutner K., Takahashi H., Thatcher J., Toffoli T., Тоома А., Цейтлина Г., Ulam S., Варшавского В., Vichniac G., Vollmar R., Voorhees B., Waksman A., Weimar J., Willson S., Wolfram S., Wuensche A., Yaku T., Yamada H., Zuse K.*** и других довольно многочисленных исследователей из многих стран. На начальной стадии прикладные аспекты ***ТОС*** в связи с перспективными параллельными компьютерами весьма интенсивно развивались научными школами ***Т. Тоффоли*** в *США*, ***Р. Фольмаром*** в *Германии* и ***Т. Легенди*** в *Венгрии*, тогда как в связи с биологическим моделированием ***В.З. Аладьевым*** в *Эстонии*.

Наряду с нашими работами в ***ОС***-теории необходимо обратить внимание на целый ряд других советских исследователей, которые получили в данном направлении как фундаментальные, так и достаточно значительные результаты в течение ***60-х – 80-х*** годов. А именно: ***Адаматский А.И.*** (*идентификация* ***ОС***), ***Бандман О.Л.*** (*асинхронные* ***ОС***), ***Блишун А.Ф.*** (*рост конфигураций*), ***Блюмин С.*** (*рост конфигураций*), ***Болотов А.А.*** (*симуляция между классами* ***ОС***), ***Георгадзе А.К., Тоом А.Л., Манджаладзе П.В., Добрушин Р.Л., Васильев Н.Б., Ставская О.Н., Митюшин Л.Г., Леонтович А.*** (*стохастические* ***ОС***), ***Икауниекс Э.*** (*неконструируемые конфигурации*), ***Левин Л.А.*** и ***Курдюмов Г.*** (*стохастические* ***ОС***), ***Колотов А.*** (***ОС***-*модели возбудимой среды*), ***Левенштейн В.И.*** (*синхронизация в* ***ОС***), ***Варшавский В.*** (*синхронизация* ***ОС***, *симуляция анизотропных* ***ОС*** *на изотропных*), ***Матевосян А.*** (*рост конфигураций, универсальные детерминированные и стохастические* ***ОС, ОС*** *и параллельные грамматики*), ***Коганов А.В.*** (*универсальные* ***ОС***, *устойчивые конфигурации, симуляция* ***ОС***), ***Петров Е.И.*** (*синхронизация* ***2***-*мерных* ***ОС***), ***Макаревский А.Ю.*** (*реализация булевых функций в* ***ОС***), ***Ревин О.*** (*симуляция анизотропных* ***ОС*** *на изотропных*), ***Поспелов Д.*** (*однородные структуры и распределенный* ***ИИ*** *в* ***ОС***), ***Прангишвили И.*** (***ОС***-*архитектуры параллельных процессоров*), ***Подколзин А.*** (*симуляция* ***ОС***, *асимптотика глобальной динамики, неразрешимость, универсальные* ***ОС***-*модели*), ***Цейтлин Г.Е.*** (*алгебра периодически определенных преобразований*), ***Солнцев С.В.*** (*рост конфигураций*), ***Решодько Л.*** (***ОС***-*модели возбудимой среды*), ***Цейтлин М.Л.*** (*коллективы автоматов,* ***ОС***-*игры*), ***Щербаков Е.С.*** (*универсальные алгебры параллельных подстановок*). В наших многочисленных предыдущих работах исследовались различные аспекты ***ОС***-теории и ее приложений в математике, вычислительных науках, информатике, биологическом и физическом моделировании. Полученные нами в этом направлении результаты внесли достаточно существенный вклад как собственно в ***ОС***-теорию, так и в ее приложения. Настоящая монография предназначена для обсуждения наиболее общих направлений в теории классических ***ОС***-моделей и основных результатов, полученных нами. К сожалению, достаточного ограниченный объем не позволяет детально рассмотреть все богатство проблематики в данной области. Между тем, мы надеемся, что предлагаемая нами монография позволит ознакомить читателя с общими аспектами и тенденциями в теории классических ***ОС***-моделей как формальной модели параллельной обработки, так и весьма перспективной среды для физического и математического моделирования.

Однородные структуры являются формализацией понятия бесконечных регулярных решеток (*сетей*) из идентичных конечных автоматов, которые информационно связаны друг с другом единым образом в том смысле, что каждый автомат решетки может непосредственно получать информацию от вполне определенного для него конечного множества соседних ему автоматов. При этом, соседство понимается не в геометрическом, а в информационном смысле. Соседство единичных автоматов устанавливается постоянным для каждого единичного автомата решетки и определяется специальным вектором – индексом соседства. Как правило, рассматриваются ***d***-мерные регулярные решетки в Евклидовом пространстве E^d, в целочисленные точки которого помещены копии некоторого автомата Мура. В качестве весьма простого примера формальной ***ОС***-модели мы можем вообразить себе бесконечную *клеточную* бумагу, в каждой клетке которой расположена копия конечного автомата Мура, для которого в качестве соседних выступают все непосредственно примыкающие к нему автоматы, включая и его самого.

ОС-*модель* функционирует в дискретные моменты времени ***t*** ***(t=0,1, ...)*** так, что каждый автомат решетки синхронно изменяет свое состояние в дискретные моменты времени ***t>0*** как функция состояний всех своих соседей в предыдущий момент времени ***(t - 1)***. Данная *локальная* функция перехода может со временем меняться, но остается всегда постоянной для каждого единичного автомата решетки в любой конкретный момент времени ***t>0***. *Одновременное* применение ко всем автоматам решетки локальной функции перехода определяет *глобальную* функцию перехода в структуре, которая действует на всей решетке, изменяя текущую конфигурацию состояний всех автоматов решетки на новую конфигурацию. Изменение конфигураций такой структуры под действием *глобальной* функции определяет *динамику* функционирования ***ОС***-модели с течением времени, играющую основную роль в исследованиях ее поведенческих *(динамических)* свойств.

Состояния единичных автоматов ***ОС***-моделей можно ассоциировать с различными понятиями, такими как состояния биологических клеток, команды клеточных микропроцессоров, символы некоторых параллельных формальных систем, характеристики точек некоторого абстрактного поля и т.д. Тогда как сама история конфигураций в ***ОС*** ассоциируется с *динамикой* погружаемых в структуру различного рода дискретных моделей, процессов, алгоритмов и явлений. Подобные модели могут быть применены в таких различных областях как распознавание образов, теория эволюции и развития, морфогенез, математика, кибернетика, синергетика, физика, адаптивные и динамические системы, машинное самовоспроизведение, космология, вулканология, химия, искусственный интеллект и робототехника и др. Мы можем интерпретировать ***ОС*** не только как абстракцию *биологических* клеточных систем, но также как теоретическую основу искусственных параллельных систем обработки информации либо как среду представления концептуальных и практических моделей пространственно-распределенных динамических систем, для которых именно физические системы являются наиболее важными прототипами. С логической же точки зрения ***ОС*** являются бесконечными абстрактными автоматами со специфической внутренней структурой, определяющей целый ряд весьма важных свойств и позволяющей использование ее в качестве новой перспективной среды моделирования разнообразных дискретных процессов, использующих режим максимального распараллеливания. В целом ***ТОС***-проблематика может рассматриваться как *структурная* и *динамическая* составляющие теории бесконечных автоматов, наделенных специфической внутренней организацией, носящей качественный характер. И в настоящее время ***ТОС***-проблематика составляет вполне самостоятельный раздел современной кибернетики со своими методами, проблематикой и приложениями, а сами структуры служат формальной средой для моделирования многих дискретных процессов, явлений и феноменов в различных областях естествознания. При этом, вполне допуская моделирование и непрерывных процессов, явлений и феноменов, однако это тема другого исследования.

Более того, ***ОС***-концепция является в определенном смысле уникальным научно-техническим явлением – с одной строны, она является основой формального моделирования большого числа процессов, феноменов и объектов в весьма широком спектре областей, тогда как с другой, имеет эквивалентные технические реализации в виде ***САМ***-машин ***Тоффоли***, систолических структур, сетей транспьютеров, клеточных процессоров, однородных вычислительных сред и т.д., делая ее весьма привлекательной и в теоретических, и в прикладных исследованиях во многих областях современного естествознания [536].

Впервые в мировой практике в учебниках по информатике для университетов, выдержавших два издания, мы представили отдельную главу ***«Общие формальные вычислительные модели»***, в которой рассмотрены машины Тьюринга как формальная модель *классических последовательных* вычислений и обработки, и ***ОС*** в качестве формальной модели *неклассических высокопараллельных* вычислений и обработки [94-96]. По нашему мнению такая новация в настоящее время является весьма актуальной, прежде всего, в свете как модельных перспектив в различных областях, так и интенсивных исследований в области создания перспективной ***ВТ*** нетрадиционной *параллельной* архитектуры. Полученные за последние годы важные теоретические результаты по ***ТОС***, целый ряд весьма интересных прикладных аспектов теории распределены по специальным научным статьям и изданиям. Более того, возрастающий интерес к ***ТОС***-проблематике все настоятельнее требует популяризации ее концепции, фундаментальных и прикладных аспектов. Более того, весьма актуальной является и работа по консолидации усилий большого количества отдельных исследователей в данном и смежных с ним направлениях современной кибернетики.

В предлагаемой нами монографии на примере *классических* ***ОС***-моделей обсуждаются наиболее фундаментальные проблемы их *динамики*, составляющие *базис* математической теории *динамики* (*поведенческого аспекта*) ***ОС***-моделей, не затрагивая вопросов их конструктивной организации. Простота и прозрачность данного класса ***ОС***-моделей, не снижая, между тем, степени общности рассматриваемой на их основе проблематики, вместе с тем, позволяют начинающему читателю легче воспринимать предлагаемый материал, чему способствует как содержательный уровень изложения, используемый математический аппарат, который для рассматриваемого класса ***ОС***-моделей относительно простой, так и вполне достаточный подбор иллюстративного материала. Представленный в книге материал в значительной мере содержит как ранее полученные нами результаты в данном направлении, опубликованные как в научных отчетах, периодической и монографической литературе, так и некоторые новые результаты, аннотированные на целом ряде специальных курсов для студентов и докторантов физико-математических специальностей университетов. Содержимое предлагаемой вашему вниманию монографии вкратце может быть охарактеризовано следующим образом.

Первая глава представляет основные понятия, определения, используемые обозначения, вводя единую и уже достаточно устоявшуюся русскоязычную терминологию. В данной главе вводятся основные типы и классы ***ОС***-моделей, обсуждается точка зрения (*в своей основе субъективная*) на архитектуру современной ***ТОС***-проблематики и основные *составляющие* аппарата исследований в данной области. ***Вторая*** глава книги довольно детально знакомит с современным состоянием *проблемы неконструируемости* для *классических* ***ОС***-моделей, являющейся одной из центральных в ***ТОС***-проблематике. Определяются типы неконструируемости, представляются критерии их существования, а также связанные с ними алгоритмические вопросы неконструируемости и ряд специальных вопросов, представляющих и существенный самостоятельный интерес. В первую очередь, это относится к особенностям данной проблемы для конечных ***ОС***-моделей, играющей важную роль в их практических приложениях. Проблема неконструируемости в классических ***ОС***-моделях представляет несомненный интерес также не только с той точки зрения, что она непосредственно относится к истокам становления ***ОС***-проблематики, но и по той причине, что результаты, полученные по ней, составляют существенную часть собственного самого аппарата исследований в данном направлении.

В ***третьей*** главе, в отличие от предыдущей, определяющей *ограничения* динамики классических ***ОС***-моделей, рассматриваются их *экстремальные конструктивные* возможности, характеризуемые условиями существования универсальных и самовоспроизводящихся конечных конфигураций. ***Четвертая*** глава посвящена проблеме сложности конечных конфигураций, являющейся одной из ключевых в ***ТОС***-проблематике и весьма тесно связанной с важными как теоретическими, так и многими прикладными ее аспектами.

В ***пятой*** главе довольно детально рассматриваются классические и недетерминированные ***ОС***-модели с лингвистической точки зрения в контексте определяемых ими параллельных языков и грамматик. Многоаспектной проблеме моделирования в ***ОС***-среде посвящена ***шестая*** глава, в которой наряду с базовыми вопросами сугубо модельного характера рассматривается целый ряд более специальных вопросов моделирования и параллельные алгоритмы, определяемые такими классическими ***ОС***-моделями. Основное внимание здесь уделяется моделированию в ***ОС***-среде известных формальных алгоритмов и моделированию классических структур структурами из того же класса.

В ***седьмой*** главе достаточно детально обсуждается проблема *декомпозиции* глобальных функций перехода в *классических* ***ОС***-моделях и связанные с нею важные вопросы как теоретического, так и прикладного характера. Представленные здесь результаты в своей основе решают проблему декомпозиции и устанавливают интересные связи с проблемой сложности в ***ОС***-аксиоматике. Довольно много внимания уделяется обсуждению подходов к исследованию этой и подобных ей проблем динамики ***ОС***-моделей, а также вопросам алгоритмической разрешимости проблемы и иерархии сложности функций. Завершается глава обсуждением целого ряда интересных более *специальных* вопросов ***ТОС***-проблематики, не нашедших достаточного отражения в предыдущих главах настоящей монографии.

Наконец, ***восьмая*** глава книги представляет основные прикладные аспекты современной ***ТОС***-проблематики, в значительной степени определяющие как интерес к ней, так и перспективы ее дальнейшего развития. Делая акцент на прикладных аспектах в математических, биологических и вычислительных науках, обсуждается также целый ряд весьма интересных приложений ***ОС***-концепции и в других областях. При этом, основное внимание уделяется прикладным аспектам в математической биологии развития, вычислительной технике и информатике, как одними из стратегически важных направлений развития современного естествознания в целом. Тогда как прикладные аспекты ***ОС***-концепции в других также достаточно важных направлениях в главе рассматриваются с различной степенью детализации.

Каждая глава настоящей книги содержит ряд интересных открытых и перспективных вопросов в соответствующих разделах ***ТОС***-проблематики, исследование которых представляет для нее существенный интерес. Приведенная в конце книги довольно обширная библиография, в свою очередь, содержит многочисленные ссылки на ряд других источников по ***ТОС***-проблематике и позволяет более взыскательному читателю получить более детальную информацию по весьма широкому спектру теоретических и прикладных аспектов проблематики как рассмотренных в настоящей книге, так и оставшихся по тем или иным причинам вне ее рамок. В отечественной литературе столь обширная библиография по ***ТОС***-проблематике приводится впервые. Между тем, в [536] представлена намного более развернутая библиография по ***ТОС***-проблематике и связанным с ней направлениям, которая существенно дополняет приведенную в монографии библиографию.

В настоящее время в развитии ***ТОС*** и ее прикладных аспектов достаточно четко прослеживаются следующие доминирующие направления исследований, а именно:

• феноменологическая сложность ***ОС***-моделей с особым акцентом на установление некоторой удовлетворительной классификации в обширном многообразии данного класса параллельных дискретных динамических систем;

• алгоритмическая сложность структур ***d-ОС*** с акцентом на исследованиях различных понятий сложности, отвечающих базовой аксиоматике однородных структур;

• исследования ***ОС***-моделей как параллельных дискретных динамических систем;

• обобщения и модификации ***ОС***-моделей относительно их классического понятия;

• использование однородных структур в качестве новой перспективной среды моделирования в различных областях современного естествознания, прежде всего, в физических, биологических и вычислительных науках.

Сказанное подтверждает как направленность основных публикаций в данном направлении за последние пять лет, так и тематика целого ряда серьезных международных научных форумов, проведенных в этот же период. В этом отношении наши исследования в значительной степени наследуют и развивают отмеченную направленность дальнейшего развития современной как теоретической, так и прикладной частей ***ТОС***-проблематики, составляя существенную часть ее базового наполнения.

Переходим теперь к непосредственному рассмотрению концептуальных аспектов классических однородных структур, предварительно введя основные понятия, определения и обозначения. Остальные базовые элементы будут вводится по мере необходимости в процессе изложения тех или иных аспектов ***ТОС***-проблематики.

Эстония, Таллинн, февраль-март, 2009

Глава 1.
Базовая концепция однородных структур

Однородные структуры **(ОС)** во всей своей общности представляют собой, как говорилось выше, высоко формализованные модели неких абстрактных Вселенных, развивающихся по простым правилам и состоящих из весьма простых идентичных элементов. Такого класса ***ОС-Вселенные*** развиваются в соответствии с локальными и всюду одинаковыми правилами взаимодействия составляющих их элементов (*законами*). В данном контексте **ОС** можно рассматривать в качестве некоторого *аналога* физического понятия «*поля*». Пространство **ОС-***вселенной* представляет собой регулярную решетку, каждая клетка которой представляет собой некий идентичный элемент (*элементарную частицу*), допускающий конечное число состояний. Развитие такой **ОС-***вселенной* происходит в дискретной временной шкале ***(t=0,1,2,...)*** согласно конечному набору инструкций изменения состояний ее элементов в каждый ***t***-момент времени как функция состояний самого элемента и конечного числа его ближайших соседей в предыдущий ***(t - 1)***-момент времени. Не взирая на такие простые организацию и принцип функционирования, **ОС-***вселенные* допускают весьма сложное поведение (*динамику развития конфигураций состояний составляющих элементов*), обеспечивающее моделирование большого количества объектов, процессов, объектов и явлений в различных областях науки и техники. Для более предметного рассмотрения концепции **ОС-***вселенных* (*моделей*) нам понадобится целый ряд ***базовых*** понятий и определений, позволяющих на формальном уровне исследовать выразительные возможности *однородных структур* в качестве перспективной среды моделирования в ряде стратегически важных направлений современного естествознания.

1.1. Основные понятия, определения и обозначения

В настоящем разделе вводятся основные понятия, определения и обозначения, которые связаны с концепцией *классической* **ОС-***модели* и используемые на протяжении всего нашего дальнейшего изложения. Наряду с этим, используются единая, введенная нами ранее, русская терминология и система обозначений для определения основных понятий. Детальное обсуждение основных понятий ***ТОС***-проблематики и связанных с ними вопросов позволит читателю глубже уяснить основы данного раздела общей теории абстрактных автоматов. Прежде всего, отметим, основное изложение материала монографии будет базироваться на так называемом *классическом* понятии ***d-мерных однородных структур (d-ОС; d ≥ 1)***, относительно которого вводится ряд основных определений и суммируются некоторые результаты, относящиеся к довольно важному вопросу степени общности классического понятия. Аксиоматически понятие *классических* ***d-ОС*** вводится следующим образом.

1. Понятие ***классической d-ОС*** определяется как упорядоченная четверка компонент

$$\boxed{d\text{-}OC = \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X\rangle}$$

где ***А*** – конечное непустое множество, называемое ***алфавитом*** *внутренних состояний* единичных автоматов структуры и представляющее собой множество состояний, которые может принимать каждый элементарный (*единичный*) автомат структуры. Алфавит ***А*** содержит состояние «*покоя*», обозначаемое символом «*0*» (*при этом, для удобства в ряде случаев **0**-символ будем отождествлять с □-символом*); суть данного особого состояния будет выяснена несколько позже. Мы, не нарушая общности, в качестве ***A***-алфавита будем использовать множество ***A***={*0,1,2, ..., a-1*}, содержащее ***a*** элементов – целых чисел от ***0*** до ***a-1***. Компонента Z^d представляет собой множество всех ***d***-мерных кортежей – целочисленных координат точек в евклидовом E^d пространстве, т. е. Z^d представляет собой целочисленную решетку в E^d, чьи элементы служат для *пространственной идентификации* единичных автоматов структуры. При этом, компонента Z^d определяет *однородное пространство* структуры, в котором она функционирует. Можно показать [1,3], что другие типы регулярных решеток в качестве однородного пространства не вносят относительно *динамических* свойств ***ОС***-моделей математически ничего нового, т.е. вполне достаточно ограничиться Z^d-пространством. Естественно, что в целом ряде прикладных аспектов ***d-ОС*** их геометрия играет, порой, довольно существенную роль (*так, вопрос геометрии однородного пространства приобретает особое значение в структурной теории, когда исследуются свойства **d-ОС** в зависимости от внутренней организации*), однако в настоящей книге данный вопрос не рассматривается и читатель отсылается к работам, представленным в [536].

Размерность (***d***) однородного пространства ***ОС***-модели также играет весьма существенную роль, дифференцируя все множество моделей на два различных подмножества: одномерной (***d = 1***) и высших (***d ≥ 2***) размерностей. При этом, переход уже от ***1***-мерного к ***2***-мерному случаю резко изменяет не только динамику ***ОС***-моделей (*обусловленную сугубо увеличением размерности*), но и сложность решаемых относительно их проблем. Ниже будет показано, что целый ряд проблем динамики для случая классических ***1-ОС*** и ***d-ОС*** (***d ≥ 2***) имеют соответственно положительное решение и алгоритмически неразрешимы, т.е. в общем случае для их решения не существует алгоритма в современном нашем понимании. В данном отношении ***1-ОС*** представляют собой ***особый*** подкласс класса всех ***d-ОС*** (***d ≥ 1***), исследуемый достаточно эффективно. И если в плане собственно моделирования ***1-ОС*** особой перспективы, на наш взгляд, не имеют, то в качестве самостоятельного математического объекта представляются нам достаточно интересными. К тому же, на примере ***1-ОС*** значительно проще осваивать концепцию классических ***ОС***-моделей, что и будет широко использоваться нами в дальнейшем изложении. По причине же того, что ***1-ОС*** *намного* проще даже класса ***2-ОС*** (*намного меньший набор возможных правил перехода единичного автомата, алгоритмическая разрешимость целого ряда проблем и т.д.*), именно типы ***1-ОС*** наиболее интенсивно исследовались с теоретической точки зрения и именно данному классу ***ОС***-моделей посвящено большинство как теоретических публикаций, так и компьютерного симулирования их на предмет исследования тех или иных динамических свойств.

В каждую точку пространства Z^d помещается *копия* конечного автомата (***КА***) Мура, чей алфавит внутренних состояний – ***A***. Как известно, *автомат Мура* представляет собой конечный автомат, выход которого в данный момент времени ***t*** зависит только от его внутреннего состояния в этот же момент времени ***t*** и не зависит от значения его входов. Состоянием S_t ***КА*** в момент ***t > 0*** есть некоторая функция $F(Bx_1,...,Bx_n,t-1)$ его входов в момент времени (***t-1***); при этом, выход автомата в момент ***t*** тождественен его внутреннему S_t-состоянию и при наличии связи между автоматами их взаимодействие фрагментарно показано на нижеследующем достаточно наглядном рис. ***1***.

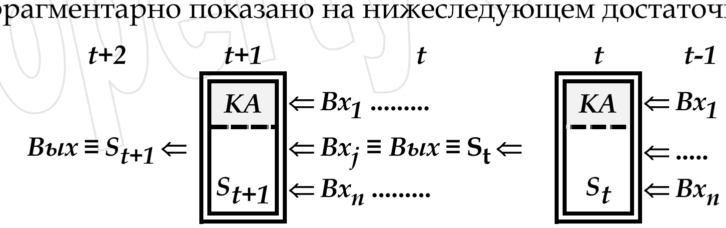


Рис. 1. Временная схема взаимодействия двух связанных автоматов Мура

Здесь в качестве *входов*, *внутренних состояний* и *выходов* **KA**-автомата **ОС**-модели используются символы из некоторого фиксированного конечного **A**-алфавита. В этом случае каждая точка Z^d определяет *имя (координату)* единичного автомата, помещенного в данную точку. Для удобства ниже мы будем идентифицировать точки пространства Z^d с расположенными в них *единичными* автоматами. Таким образом, два термина «*автомат z*» и «*автомат с координатой* $z \in Z^d$» мы будем полагать идентичными. Полагаем, компонента **X**, называемая *индексом соседства* структуры, есть упорядоченный кортеж **n** элементов из Z^d, который служит для определения автоматов-***соседей*** любого единичного автомата структуры, т.е. тех ее автоматов, с которыми данный единичный автомат *непосредственно* связан информационными каналами, т.е. обменивается информацией.

В качестве простейшего примера структуры **2-ОС** пространство Z^2 мы можем представить себе в виде клеточной бумаги, в каждой клетке которой расположена *копия* некоторого автомата Мура. Тогда X_H={(0,0),(0,1),(1,0),(0,-1),(-1,0)} и X_M={(i,j)} (i,j∈{0,1,-1}) называются соответственно *индексами соседства* ***Дж. фон Неймана*** и ***Мура*** (рис. 2). Данные индексы **X** соседства стали классическими и широко используются в исследованиях теоретических и прикладных аспектов **d-ОС**, а ***шаблоны соседства (ШС)***, определяемые ими имеют весьма прозрачный геометрический образ, а именно.

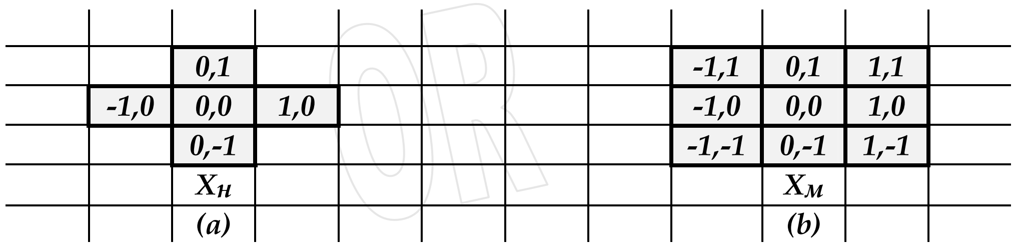
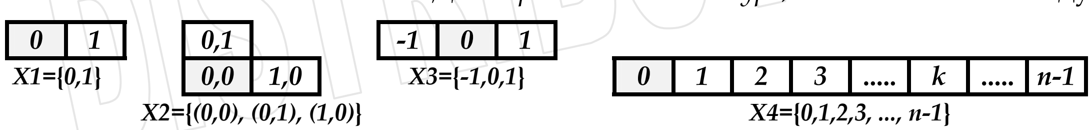


Рис. 2. Шаблоны соседства Джон фон Неймана (а) и Э.Ф. Мура (в).

В одномерном случае оба эти типа индексов соседства совпадают. Читателю не составит особого труда обобщить двухмерные индексы соседства X_H и X_M на общий **d**-мерный случай. В общем случае шаблоны соседства **ОС**-моделей произвольны и могут принимать весьма экзотический вид, определяемый прикладными аспектами модели.

К наиболее часто используемым индексам соседства и соответствующим им шаблонам соседства (*наряду с отмеченными индексами соседства Джон фон Неймана и Мура*) можно отнести следующие:



При этом, индексы соседства **X1** и **X2** являются простейшими соответственно для **1-ОС** и **2-ОС**. В общем случае для **d**-мерной классической **ОС**-модели *простейший индекс* соседства **X** принимает следующий вид, а именно:

$$X=\underbrace{\{(\underbrace{0,0,\,\ldots\ldots,\,0}_{d}),(\underbrace{1,0,0,\,\ldots,\,0}_{d}),(\underbrace{0,1,0,\,\ldots,\,0}_{d}),\,\ldots\ldots,\,(\underbrace{0,0,\,\ldots,\,0,1}_{d})\}}_{d+1}$$

т.е. один автомат простейшего **ШС** является **центральным** и от него по каждой оси координат расходится строго по *одному* единичному **z**-автомату структуры. Но несмотря на *универсальность* простейших индексов соседства (*каждая классическая* ***d-ОС*** *моделируется структурой той же самой размерности, но с простейшим индексом соседства* ***X***), для конкретных приложений и большинства исследований используются более сложные индексы (*например, для случая* ***1-ОС*** *индекс соседства* **X={0,1,2, ..., n-1}**) со специальной геометрией **ШС**. Это в целом ряде практически важных случаев позволяет довольно существенно упрощать сам процесс погружения в классические **ОС**-модели конкретных объектов, процессов, явлений и алгоритмов. Такой прием достаточно эффективно применяется при теоретических исследованиях **ОС**–моделей, базирующихся на моделировании.

Каждый единичный автомат структуры в любой дискретный ***t***-момент времени может получать информацию только от своих непосредственных соседей, определяемых индексом соседства ***X***, и передавать информацию о своем текущем состоянии только этим автоматам. Таким образом, *непосредственными соседями* единичного автомата $z \in Z^d$ являются автоматы $z+x_1$, $z+x_2$, ..., $z+x_n$, где $X=\{x_1,x_2, ..., x_n\}$; $x_j \in Z^d$ $(j=1..n)$. Итак, индекс соседства ***X*** описывает единый *шаблон соседства* (***ШС***; *геометрический образ соседей-автоматов*) для *каждого* единичного ***z***-автомата структуры. Он также определяет *позиции* автоматов-соседей относительно *каждого* конкретного единичного автомата, который имеет с ними непосредственный информационный интерфейс. Если индекс соседства ***X*** содержит элемент $0^d=\{0,0,0,...,0\}$, то будем говорить, что *каждый* единичный автомат структуры принадлежит собственному ***ШС***. В дальнейшем, не нарушая общности, будем полагать, что ***X***-индекс соседства содержит 0^d-элемент, определяющий *центральный* автомат ***ШС***. Доказано [1,3], что динамика ***d-ОС*** ($d \geq 1$) не зависит от выбора в качестве центрального любого автомата ***ШС*** структуры. Таким образом, деление ***d-ОС*** на структуры с ярко выраженным *градиентом передачи* информации, обусловленным выбором центрального автомата шаблона соседства, не изменяет динамических и вычислительных возможностей ***ОС***-моделей во временном отношении, хотя и влияет на их конструктивные характеристики, т.е. на характеристики, зависящие от геометрии пространства структуры. Например, ***1-ОС*** с индексами соседства $X=\{-k,...,-1,0,1,...,p\}$ при $k,p \in \{0,1, ..., n-1\}$ и определяющем соотношении $p+k+1=n$ в динамическом отношении строго *эквивалентны* друг другу, т.е. на каждый шаг моделируемой ***1-ОС*** с индексом соседства ***X*** из указанного класса требуется только один шаг моделирующей ее ***1-ОС*** с индексом соседства из того же класса ***X***. В *конструктивном* же отношении, вообще говоря, такие ***ОС***-модели различаются. Это имеет место, например, при погружении в них процессов, динамика которых довольно существенно зависит от направленности информационных потоков. Тогда как для случая ***ОС***-моделей, отличных от классических (*например, конечных структур*), выбор же центрального автомата ***ШС*** может играть определяющую роль как для динамических, так и для конструктивных характеристик модели.

Среди *шаблонов соседства* (***ШС***) различают ***связные*** и ***несвязные***, этот показатель в общем случае существенно влияет на динамику ***ОС***-моделей. Итак, ***ШС*** называется ***связным***, если занимаемая им область связна в топологическом смысле; иначе шаблон соседства называется ***несвязным***. Так, например, две ***1-ОС*** с индексами соседства $X1=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ и $X2=\{0,1,2,4,5,7,8,10\}$ имеют *связный* и *несвязный* ***ШС*** соответственно (рис. ***3***), что даже для случая идентичных локальных функций перехода может приводить к довольно существенным различиям в их динамике. В дальнейшем изложении мы будем иметь дело, как правило, со связными шаблонами соседства, имея в виду то обстоятельство, что несвязный шаблон соседства всегда можно заменить эквивалентным ему *связным шаблоном* того же максимального размера, задействовав в соответствующем ему индексе соседства несущественные компоненты, что достаточно несложно уяснить из нижеследующего простого примера (рис. ***3***).

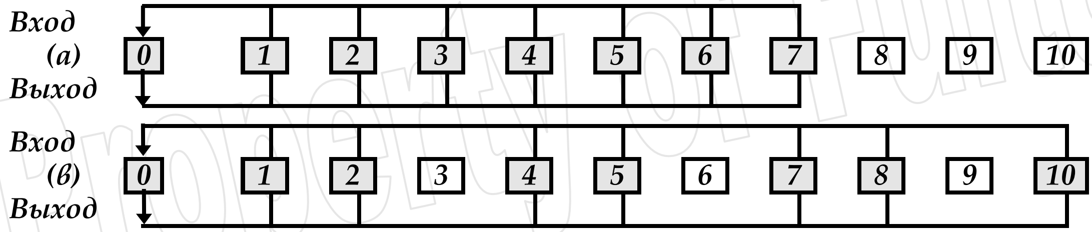


Рис. 3. Схема непосредственного информационного обмена в связном (а) и несвязном (в) шаблонах соседства (ШС) одномерной однородной структуры.

2. Первые три рассмотренные компоненты ***d-ОС***, а именно: ***A***-алфавит состояний единичных автоматов, однородное пространство Z^d структуры и ***X***-индекс соседства образуют *однородную среду*, являющуюся статической частью ***ОС***-модели. Данная часть описывает лишь физическую организацию структуры и ее геометрию, но не специфицирует *взаимодействия (динамики)* среди составляющих ее единичных автоматов. Следовательно, для определения функционирования ***d-ОС*** необходимо иметь возможность описывать текущие состояния всех ее единичных автоматов в любой дискретный момент времени $t \geq 0$.

Состояние всей однородной среды называется ***конфигурацией (КФ) d-ОС*** и представляет собой набор текущих состояний всех составляющих ее единичных автоматов. А именно, *конфигурация* ***d-ОС*** есть произвольное отображение $\text{КФ}: Z^d \to A$ и $C(A,d)$ обозначает множество всевозможных конфигураций относительно Z^d и A, т.е.

$$C(A,d) = \{\text{КФ} \mid \text{КФ}: Z^d \to A\}$$

Специальным символом «$□^d$» обозначается полностью *нулевая* **КФ**; $□^d: Z^d \to 0$, в случае, когда все единичные автоматы ***d-ОС*** находятся в состоянии покоя «***0***». Отождествляя состояния «***0***» и «□», второе из них мы будем использовать для обозначения бесконечных областей Z^d-пространства, заполненных автоматами только в ***0***-состоянии. Множество конфигураций $C(A,d)$ неоднородно относительно динамики функционирования ***d-ОС*** по причине наличия выделенного состояния покоя, поэтому определяем два основных подмножества конфигураций: *конечных* и *бесконечных*. На рис. ***4*** приведены простые примеры ***1-*** и ***2***-мерных конечных и бесконечных ***КФ*** в алфавите $A=\{□,0,1,2,3\}$ $(0 \equiv □)$.

а.1

□	1	3	2	1	0	1	2	□

в.1

□	□	□	□	□	□
□	1	3	2	0	□
□	1	0	1	3	□
□	3	2	3	1	□
□	2	0	2	0	□
□	□	□	□	□	□

в.2

3	3	3	3	3	3
3	2	0	1	3	3
3	3	2	0	1	3
3	1	0	2	0	3
3	2	1	1	0	3
3	3	3	3	3	3

а.2

3	1	0	2	2	0	3	2	1

Рис. 4. Примеры конечных (а.1, в.1) и бесконечных (а.2, в.2) конфигураций.

Под ***конечной*** понимается **КФ** $c \in C(A,d)$, которая содержит только конечное число единичных автоматов в состояниях, отличных от ***0***-состояния «*покоя*». В противном случае **КФ** называется ***бесконечной*** (рис. ***4***). Конечные конфигурации представляют особый интерес и множество всех таких **КФ** для данной структуры ***d-ОС*** будем обозначать через $C(A,d,\phi)$; при этом, ***d***-размерность **КФ** определяется размерностью самой структуры. Будем обозначать множество *бесконечных* **КФ** соответственно как $C(A,d,\infty)$. Очевидно, относительно любой ***d-ОС*** имеют место соотношения: **(1)** объдинение всех *конечных* и *бесконечных* **КФ** составляет в точности множество $C(A,d)$ и **(2)** ни одна ***КФ d-ОС*** не может одновременно принадлежать как множеству $C(A,d,\phi)$, так и множеству $C(A,d,\infty)$, что на языке операций над множествами можно кратко выразить как $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty) = C(A,d)$ и $C(A,d,\phi) \cap C(A,d,\infty) = \varnothing$, где $\varnothing$ – пустое множество. Здесь и в дальнейшем нами будут использоваться общепринятые теоретико-множественные и логические обозначения, хорошо известные уже из школьных курсов математики, не говоря уже об университетских.

Наряду с конфигурацией всего Z^d-пространства определяем и конфигурацию c_b конечного ***d***-мерного *гиперкуба (блока)* $b \subset Z^d$ единичных автоматов структуры ***d-ОС***; множество всех таких **КФ** будем обозначать через $C(A,d,B)$. Понятие *блочных* конфигураций играет довольно важную роль, например, при исследовании проблемы неконструируемости в классических ***d-ОС***. Этот вопрос в дальнейшем будет детализирован. Так как в дальнейшем речь будет в значительной мере идти об одномерных ***ОС (1-ОС)***, то для обозначения одномерных *конечных*, *блочных* и *бесконечных* **КФ** будут использоваться соответственно обозначения $c=□c_1c_2c_3\ldots c_k□$, $c_b=b_1b_2\ldots b_p$ и $c_\infty=\infty c_1c_2c_3\ldots c_k\infty$, где $c_1,c_k \in A\backslash\{0\}$ и $c_j,b_q \in A$; $j=2..(k-1)$; $q=1..p$. При этом, длина конечных **КФ** полагается равной k и обозначается как $|c|$ ($|c|=k$)**;** аналогично определяется также длина и блочных ***КФ*****.** Множества одномерных *всевозможных***,** *конечных***,** *блочных* и *бесконечных* ***КФ*** будем обозначать соответственно как $C(A)$**,** $C(A,\phi)$**,** $C(A,B)$ и $C(A,\infty)$**.** Непосредственно из определения множеств ***КФ*** $C(A,\phi)$ и $C(A,B)$ следует**,** что *первое* замкнуто относительно определяемого ниже глобального **τ-**преобразования, а второе замкнуто относительно операции конкатенации. Более того, очевидны следующие два соотношения $(\forall c_b \in C(A,B))(c=□c_b□ \in C(A,\phi))$ и $(\forall c^* \in C(A,\phi))([c^*] \in C(A,B))$**.** Нулевую ***КФ*** $c=□$ можно себе представить и как конечную ***КФ*** нулевого размера. В этом контексте с полным основанием мы можем относить ее к множеству $C(A,d,\phi)$**.** Полагать это целесообразно по целому ряду весьма важных соображений**,** детальное обсуждаемых которых ниже. Переходим к описанию принципа функционирования ***классических ОС-***моделей.

3. Функционирование ***d-ОС*** осуществляется в дискретной шкале времени $t=0,1,\dots$ и определяется *локальной функцией перехода* **(*ЛФП*)** $\sigma^{(n)}$**,** которая задает состояние каждому единичному автомату структуры в момент времени t на основе состояний всех соседних ему автоматов (*согласно индекса соседства* ***X***) в момент времени ***(t-1)*****.** Иными словами, ***ЛФП*** есть любое отображение $\sigma^{(n)}: A^n \to A$**;** в дальнейшем для ***ЛФП*** классических ***ОС-***моделей мы будем использовать следующие основные обозначения, а именно:

$$\sigma^{(n)}(a_1,a_2,\dots,a_n) = a^*_1; \qquad a_j,\ a^*_1 \in A \quad (j=1\,..\,n) \tag{1}$$

$$a_1a_2\dots a_n \Rightarrow a^*_1 \text{ – множество параллельных подстановок} \tag{2}$$

где a_j **–** состояния любого ***z-***автомата ***d-ОС*** и его соседей (*согласно индекса соседства* $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$) в момент времени ***(t-1)*****,** а a^*_1 **–** состояние этого же ***z-***автомата в следующий момент времени $t>0$**.** При этом, рассматриваемый ***z-***автомат структуры полагается нами центральным относительно приписываемого ему *шаблона соседства* **(*ШС*).** Проясним теперь вопрос произвольности выбора центрального автомата, не нарушающего динамику ***d-ОС*** на примере структур ***1-ОС*****.** Две ***1-ОС*** полагаются *эквивалентными* в динамическом отношении в случае, если их ***ЛФП*** определяются параллельными подстановками следующего общего вида, а именно:

$$x_1x_2\dots x_k\dots x_n \Rightarrow x^*_k = b \quad \text{и} \quad x_1x_2\dots x_j\dots x_n \Rightarrow x^*_j = b \quad (k \neq j;\ 1 \le k,j \le n;\ x_p, b \in A;\ p=1..n)$$

при *различных* центральных автоматах ***(k,j)*** шаблона соседства длины ***n*****;** при этом, сами кортежи $<x_1x_2\dots x_k\dots x_n>$ и $<x_1x_2\dots x_j\dots x_n>$ должны быть идентичными. В общем же случае ***1-ОС*** с ***ЛФП*****,** определяемыми параллельными подстановками следующего вида

$$x_1\,x_2\dots x_n \to x^*_1; \qquad x_1\,x_2\dots x_j\dots x_n \to x^*_j \quad \text{и} \quad x_1\,x_2\dots x_n \to x^*_n \qquad (1<j<n)$$

характеризуются направлениями передачи информации соответственно *влево***,** *влево и вправо***,** и *вправо*. Вышесказанное легко обобщается и на случай высших размерностей структур.

Наиболее удобным является формульное представление ***ЛФП*****,** когда вычисление последующего состояния текущего ***z-***автомата структуры производится на основе формулы ***(1)*****.** Так, во многих интересных случаях такой подход возможен, однако в целом ряде случаев обязательно требуется использование ***ЛФП*** в виде множества ***параллельных*** подстановок ***(2)*****.** Множество ***параллельных*** подстановок ***(2)*** определяет программу (*параллельный алгоритм*) функционирования *классической* ***ОС-***модели**;** параллельные подстановки ***(2)*** представляют собой низкоуровневый параллельный язык программирования в среде ***ОС-***моделей**.** В частности**,** если в момент ***t*** текущая ***КФ*** c^* ***1-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2,3,4,5\}$**,** индексом соседства $X=\{0,1,2,3\}$ и ***ЛФП*****,** определяемой подстановкой вида $1023 \Rightarrow 2$ (*либо в эквивалентном виде* $\sigma^{(4)}(1,0,2,3) = 2$)**,** имеет вид (φ)**,** то в следующий момент ***t+1*** она переходит в **φ*-*КФ*****,** содержащую выделенный ***J-***автомат структуры в новом состоянии**,** полученном на основе ***ЛФП*** (*параллельных правил подстановки*) такой ***ОС-***модели, а именно:

t	....	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*2*	*3*	*2*	*2*	*1*	*3*	*3*	....	: φ
					⇩										
t+1	....				*2*									....	: φ*

J *– выделенный единичный автомат структуры*

Формульное представление ***ЛФП*** особенно предпочтительно при компьютерной реализации ***ОС***-моделей, тогда как параллельные подстановки незаменимы на стадии программирования ряда конкретных ***ОС***-моделей. Вопросы формульного ***(1)*** представления параллельных подстановок ***(2)*** достаточно подробно рассматриваются в наших монографиях [1,5]. Между тем, далеко не все ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ представимы в формульном виде, обеспечивая работу с ***ОС***–моделями лишь на уровне систем параллельных подстановок, определяющих их ***ЛФП***.

В данной монографии рассматриваются структуры, чьи ***ЛФП*** удовлетворяют определяющему соотношению $\sigma^{(n)}: 0^n \Rightarrow 0$ или $\sigma^{(n)}(0, ..., 0)=0$, т.е. структуры с *ограничением* на скорость передачи информации в них (*некоторый аналог предела скорости распространения света согласно современной физической концепции*). Данное предположение играет существенную роль при исследованиях динамических свойств ***d-ОС*** и хорошо отвечает требованиям использования структур в качестве основы моделирования параллельных динамических систем различной природы и назначения. Данное *определяющее* соотношение не только вводит ограничение на скорость распространения информации в ***ОС***-моделях, но и определяет собственно пространство (*своеобразный формальный вакуум*), в среде которого и происходит динамика развития исследуемых дискретных объектов, процессов и явлений. При этом, в качестве состояния «*покоя*» может быть выбран любой элемент ***А***-алфавита структуры, однако по целому ряду соображений ему наилучшим образом отвечает {***0***|□}-элемент. Структуры, удовлетворяющие определяющему соотношению, будем называть *стабильными*, в противном же случае – *нестабильными* структурами. В плане исследования ***ОС***-моделей как самостоятельного математического объекта определенный интерес представляют и *нестабильные* структуры. Между тем, *нестабильные* структуры могут представить интерес также с точки зрения исследования в них моделей, основывающихся на концепции *мгновенной* передачи информации на сколь угодно большие расстояния. Такие примеры использования *нестабильных* ***ОС***-моделей нам пока не известны, однако работы в данном направлении представляются нам достаточно интересными.

При определении классических ***d-ОС***, являющихся основным предметом рассмотрения данной монографии, мы будем постоянно аппелировать к определяющему данный класс ***GS*** структур соотношению для их локальных функций перехода, а именно: $\sigma^{(n)}(0,0, ..., 0)=0$, смысл которого рассматривался выше. Между тем, следует иметь ввиду, что определяющее соотношение для локальной функции перехода *классической* ***d-ОС*** ($d \geq 1$) в общем случае имеет следующий вид:

$$(\exists h \in A)\left(\sigma^{(n)}(h, h, h, ..., h) = h\right) \qquad (\Theta)$$

т.е., в качестве состояния *покоя* может выступать *произвольное* состояние ***А***-алфавита внутренних состояний структуры. Данное определение понятия классических ***d-ОС*** довольно существенно расширяет класс такого типа структур и большинство из представленных ниже результатов (*в частности, по проблеме неконструируемости конфигураций*), обусловленных наличием для таких классических однородных структур наиболее типичного *определяющегося* соотношения $\sigma^{(n)}(0,0, ..., 0)=0$, вполне естественным образом переносятся и на ***d-ОС*** общего класса структур, чьи ***ЛФП*** удовлетворяют определяющим соотношениям ***(Θ)***. Наиболее естественным данное понимание классических структур присуще именно для бинарного алфавита внутренних состояний, когда смысл состояний «***0***» и «***1***» просто меняется на противоположный. Вышеприведенное пояснение к определению *классических* структур будем иметь ввиду на протяжении всего нижеследующего рассмотрения данного типа однородных структур размерности $d \geq 1$.

Оценим число всех классических структур с алфавитом состояний единичного автомата ***A***={***0,1, ..., a–1***} и индексом соседства ***X*** = {***0,1,2, ..., n–1***}. Будем исходить из соотношения, а именно:

$$(\exists x \in A)(\sigma^{(n)}(\underleftrightarrow{x, x, ..., x}_{n}) = x)$$

определяющего локальную функцию перехода $\sigma^{(n)}$ классической ***ОС***–модели. Ввиду указанного предположения в множестве всевозможных кортежей $<x_1,x_2,x_3, ..., x_n>$ $(x_j \in A;\ j = 1..n)$ мощности a^n выделяем подмножество ***Q*** мощности ***a*** кортежей вида $<x,x,x,x, ..., x>$ $(x \in A)$, на которых ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ может получать значения x $(x \in A)$, делающие структуру *классической*. Тогда как на всех остальных $(a^n - a)$ кортежах ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ может принимать любые значения из ***A***–алфавита. Пусть теперь на ***j*** кортежах $<y_k,y_k,y_k,...,y_k>$ ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ определяет ***классичность*** структуры, т.е. $\sigma^{(n)}(y_k,y_k, ..., y_k)=y_k$ $(y_k \in A;\ k = 1..j)$. Тогда как на остальных кортежах из ***Q*** данное соотношение не выполняется, т.е. для них $\sigma^{(n)}(y,y,y,y,...,y) = y^*$ $(y^* \in A \setminus \{y\})$. Следовательно, несложно убедиться, что при сделанных предположениях для каждого конкретного набора ***j*** кортежей из ***Q*** получаем следующее число классических структур, а именно $R = (a-1)^{a-j} * a^{a^n - a}$. Поэтому, ввиду количества таких различных кортежей во множестве ***Q***, определяемого величиной

$$C_a^j = \frac{a!}{j!(a-j)!}$$

и ***j*** в диапазоне [***1 .. a***] общее количество ***N*** классических ***ОС***–моделей вычисляется как:

$$N = \sum_{j=1}^{a} C_a^j (a-1)^{a-j} a^{a^n - a} = (a-1)^a a^{a^n - a} \sum_{j=1}^{a} C_a^j (a-1)^{-j} = a^{a^n}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^a \sum_{j=1}^{a} C_a^j (a-1)^{-j} =$$

$$a^{a^n}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^a \left[\sum_{j=1}^{a} C_a^j (a-1)^{-j} - 1\right] = a^{a^n}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^a \left[\left(1 + \frac{1}{a-1}\right)^a - 1\right] = a^{a^n}\left(1 - \frac{(a-1)^a}{a^a}\right)$$

Таким образом, доля (Δ) всех ***классических*** среди всех ***ОС***–моделей, включая и нестабильные, не зависит от размера шаблона соседства и определяется следующим простым соотношением:

$$\Delta = \frac{N}{a^{a^n}} = 1 - \left(\frac{a-1}{a}\right)^a$$

зависящим только от мощности алфавита ***A*** модели при следующем условии, а именно:

$$\lim_{a \to \infty}\left[1 - \left(\frac{a-1}{a}\right)^a\right] = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632121$$

т.е. доля всех классических ***ОС***–моделей при любых индексе соседства и размерности составляет большинство, находясь в диапазоне [***0.63..0.75***]. При этом, следует иметь ввиду, что случай, когда все состояния из ***A***–алфавита являются состояниями «*покоя*», является своего рода ***вырожденным*** относительно целого ряда результатов, полученным по классическим структурам, для которых ***A***–алфавит содержит и состояния, отличные от состояния ***покоя***, т.е. при наличии соотношения $(\exists y \in A)(\sigma^{(n)}(y,y, ..., y) = y^*)$ $\{y^* \in A \setminus \{y\}\}$. Тогда как в остальных случаях немало важных результатов, полученных для случая ***единственного*** состояния *покоя*, обобщаются и на *классические* структуры в их обобщенном понимании. Например, среди структур, имеющих более ***1*** состояния «***покоя***», т.е. относящихся к типу ***классических***, сохраняют силу и основные результаты по проблематике самовоспроизводящихся в смысле Мура конечных ***КФ***. Так, можно показать, что классическая ***1–***

ОС с индексом соседства ***X***={***0,1***}, алфавитом ***A***={***0,1,2***} и правилами параллельных подстановок следующего вида, а именно:

$$00 \to 0 \quad 01 \to 2 \quad 02 \to 1 \quad 10 \to 2 \quad 11 \to 1$$
$$12 \to 0 \quad 20 \to 1 \quad 21 \to 0 \quad 22 \to 2$$

определяющими ее ***ЛФП***, независимо от выбора состояния «*покоя*» или их совокупности, имеет все конечные ***КФ*** самовоспроизводящимися в смысле Мура. Данная структура дополнительно подтверждает также факт наличия такого типа *классических* структур, для которых не требуется *линейности* ***ЛФП***, т.е. весьма существенно расширяется класс структур, обладающих свойством *универсальной* воспроизводимости по Муру конечных ***КФ*** (*о такого типа классических структурах будет идти речь несколько ниже*). Классические структуры, обладающие свойством универсальной воспроизводимости, во многом определяют экстремальные свойства структур.

```
> HS1D := proc(Co::string, q::string, t::posint, n::posint)
 local a, b, d, h, k, m, p;
 global _LTF;
   h := cat(q $ (k = 1 .. t - 1));  assign(a = cat(h, Co, h), d = "", m = 0, p = []);
   do  assign('b' = nops(Search2(a, {Co})), 'm' = m + 1);
      if  n <= b  then  p := [op(p), b];  break  else
         if  1 <= b  then  p := [op(p), b]  end if;
         for k to length(a) - 1  do  d := cat(d, _LTF[a[k .. k + 1]])  end do;
                  assign('a' = cat(h, d, h), 'd' = "")
      end if
   end do;
   m, p
 end proc:
> _LTF:= table(["12" = `0`, "20" = `1`, "21" = `0`, "22" = `2`, "00" = `0`, "01" = `2`, "02" = `1`, "10" =
                `2`, "11" = `1`]):   Sv := "2202120012110010221202":  HS1D(Sv, "0", 2, 32);
2161, [1, 2, 4, 2, 2, 2, 5, 4, 2, 4, 8, 2, 8, 8, 2, 2, 5, 2, 8, 8, 5, 8, 14, 4, 2, 4, 8, 2, 8, 8, 4, 8, 16, 8, 8, 8, 20, 2, 8, 8, 8,
8, 20, 8, 20, 26, 2, 2, 5, 2, 8, 8, 5, 8, 14, 2, 8, 8, 8, 8, 20, 8, 20, 26, 5, 8, 14, 8, 20, 26, 14, 26, 41]
> S := "": for k to 25 do S := cat(S, x()) end do:  S;  HS1D(S, "2", 2, 20);
                                        "2101212111200002021112001"
1189, [1, 2, 4, 2, 2, 2, 5, 4, 2, 4, 8, 2, 8, 8, 2, 2, 5, 2, 8, 8, 5, 8, 14, 4, 2, 4, 8, 2, 8, 8, 4, 8, 16, 8, 8, 8, 20]
```

Представленная выше простая ***Maple***-процедура ***HS1D(Co, q, t, n)*** обеспечивает эмпирическое тестирование классических ***1-ОС*** с индексом соседства ***X***={***0,1, ..., t-1***}, алфавитом ***A***={***0,1,2, ..., a-1***}, у которой четырьмя формальными аргументами являются следующие: ***Co*** – начальная конечная ***КФ***, ***q*** – состояние «*покоя*», ***t*** – размер ***ШС*** и ***n*** – искомое число копий ***КФ Co***, в генерируемых из ***Co*** конфигурациях. По достижении *заданного* числа копий процедура возвращает **2**-элементную последовательность, чей первый элемент определяет затраченное число итераций структуры, тогда как второй элемент – список числа копий, полученных в процессе генерации конечной (*результирующей*) ***КФ***, содержащей не менее ***n*** копий. Для полного понимания исходного текста процедуры вполне достаточно знакомства с нашими книгами [116-118] и библиотекой средств для ***Maple*** [97,545]. Наряду с теоретическими результатами, полученными для вышеуказанного типа классических ***1-ОС*** с несколькими состояниями «*покоя*», эксперименты с ***HS1D***-процедурой позволили получить также целый ряд достаточно интересных динамических свойств процесса самовоспроизведения конечных ***КФ*** в смысле Э. Мура.

Между тем, наличие нескольких состояний, идентифицируемых в качестве состояний «*покоя*», в большинстве приложений не находят адекватной интерпретации. Поэтому, в дальнейшем мы (*в целом, не нарушая общности и по ряду концептуальных соображений*) будем рассматривать только классические структуры с единственным состоянием «*покоя*» как наиболее типичные и широко используемые. Достаточно интересные (*хотя в ряде случаев и не совсем бесспорные*) философские осмысления такого типа классических ***ОС***-моделей можно найти в [107,568]. Для дальнейшего рассмотрения будет вполне уместным сделать только одно замечание, носящее конвенционный характер. Это соглашение используется нами вот уже на протяжении более ***35*** лет для описания ***ЛФП 1***-мерных ***ОС***-моделей. Нами для удобства представления бинарных классических ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура, начиная с ***1971 г.*** [19,20,22], использовался простой и весьма естественный прием (*в целом, может быть обобщен и на **1-ОС** более общего вида*), когда ***ЛФП*** такого типа структур определяется параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$\begin{array}{llll} 000 \to x_1 = 0 & 010 \to x_3 & 100 \to x_5 & 110 \to x_7 \\ 001 \to x_2 & 011 \to x_4 & 101 \to x_6 & 111 \to x_8 \end{array}$$

Очевидно, что количество всех такого типа структур равно $2^7=128$. Игнорируя условие $000 \to 0$, определяющее рассматриваемый нами тип *классических* структур, получим ровно ***256*** различных структур, из которых половина классических. Пронумеруем данные структуры *целыми* числами, соответствующими их бинарным представлениям $<x_1x_2x_3x_4 \ldots x_8>$, т.е. от ***0*** до ***127 (255).*** На наш взгляд, данный подход наиболее естественен; вместе с тем, в начале ***80-х*** с подачи ***С. Вольфрама*** был определен иной (*с точностью до наоборот*) принцип нумерации такого типа структур, когда нумерация структур базируется на применении обратного порядка параллельных подстановок, определяющих ***ЛФП***, а именно:

$$\begin{array}{llll} 111 \to y_1 & 110 \to y_3 & 101 \to y_5 & 100 \to y_7 \\ 011 \to y_2 & 010 \to y_4 & 001 \to y_6 & 000 \to y_8 \end{array}$$

и ***характеристический*** номер структуры определяется десятичным эквивалентом бинарного кортежа $<y_1y_2y_3y_4 \ldots y_8>$. Естественно, данное различие не принципиально, однако его следует иметь ввиду, когда привязываются к нумерации этого класса структур. Например, классическая структура, определяемая ***ЛФП*** следующего вида, а именно:

$$\sigma^{(3)}(x_o, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{2} x_j \quad (mod\ \ 2); \quad x_j \in B = \{0,1\}$$

в нашей *классификации* будет иметь номер ***105***, тогда как в классификации ***С. Вольфрама*** номер ***150.*** Везде в настоящей книге используется именно наша классификация бинарных ***1-ОС.***

Естественно, можно исследовать и *нестабильные* ***ОС***-модели, для которых отсутствует *специально* выделенное состояние «*покоя*», т.е. структуры, не удовлетворяющие указанному *определяющему* соотношению $\sigma^{(n)}(0,0,0, \ldots, 0)=0$. Между тем, такие структуры носят достаточно умозрительный характер, являясь продуктом *чистого разума* и, на наш взгляд, не представляют сколько-нибудь серьезного интереса. Действительно, ***ОС***-модели ориентированы, в первую очередь, на задачи симулирования различных процессов, явлений и феноменов, что уже априори предполагает у них наличие таких свойств, как ограниченность размеров исследуемых феноменов и скорости передачи информации. Естественно, можно рассматривать ***ОС*** как некие *абстрактные системы* переработки как конечных, так и бесконечных слов в конечных алфавитах. Однако и здесь нам довольно проблематично оперировать с бесконечными конфигурациями, например, в момент их определения – либо задавать их по определенному детерминированному алгоритму, либо стохастически, что в случае их бесконечности и размерности $d > 1$ вовсе проблематично. Правда, и здесь можно такого типа структурам находить некоторые аналогии в реальном мире (*иногда, казалось бы, и довольно убедительные*), однако ввиду немалых сложностей при интерпретации даже более простых структур это превращается в весьма сложную проблему. *Сложность* и *разнообразие* реального мира никак не вписываются в прокрустово ложе ***ОС***-концепции, если ее существенно не усложнять, что серьезно влияет на притягательность их простоты в *изначальном* определении. На наш взгляд, в настоящее время однородные структуры представляют интерес по **2** основным естественнонаучным направлениям, а именно:

(1) среда моделирования и реализации различных процессов, явлений, феноменов и объектов (и прежде всего тех, которые сложно или невозможно описывать другими средствами, например, дифференциальными уравнениями в частных производных);

(2) самостоятельный математический объект для исследования (параллельные динамические дискретные системы, абстрактные параллельные вычислители, подобно машинам Тьюринга и Поста, системам подстановок Маркова и др. для последовательных вычислений и обработки, алгебраические системы обработки слов с параллельными правилами подстановок).

И если в первом качестве вышеуказанное определяющее соотношение является неотъемлемой чертой ***ОС***-моделей, то во втором можно обойтись и без него, но вот реальная польза от данного допущения представляется нам не такой уж и убедительной.

4. Итак, ***динамика*** классических ***d-ОС*** полностью определяется в терминах ***ЛФП***, т.е. локальных взаимодействий автоматов шаблона соседства каждого единичного ***z***-автомата, а сама ***ЛФП*** есть типичный пример локального алгоритма, выполняющегося сугубо параллельным образом на основе информации о состояниях единичных автоматов из локальной окрестности *(определяемой индексом соседства)* текущего ***z***-автомата Z^d-пространства классической ***ОС***-модели.

Одновременное применение ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ к текущей конфигурации шаблона соседства для каждого единичного ***z***-автомата ***d-ОС*** определяет ***глобальную*** функцию перехода ***(ГФП)*** $\tau^{(n)}$ структуры, переводящую текущую ***КФ*** $c \in C(A,d)$ в последующую ***КФ*** $c\tau^{(n)} \in C(A,d)$ структуры. Если через $s[z]$ обозначить текущее состяние единичного ***z***-автомата структуры, тогда формально ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ при индексе соседства $X=\{x_1,x_2,x_3, ..., x_n\}$ определяется следующим формальным соотношением:

$$c\tau^{(n)} = c^* \leftrightarrow (\forall z \in Z^d)(s^*[z] = \sigma^{(n)}(s[z+x_1], s[z+x_2], ..., s[z+x_n]))$$

Из приведенных определений следует, что между множествами ***ЛФП*** и ***ГФП*** для заданной ***d-ОС*** существует взаимно однозначное соответствие, иногда обозначаемое просто ***(1-1)***-соответствие. Следовательно, можно говорить о ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определяемой ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, и наоборот. Оказывается, семейство глобальных функций перехода классических ***d-ОС*** представляет собой превосходное средство для решения довольно широкого круга задач моделирования в режиме максимального *распараллеливания (архивирование и криптование данных; решение интегральных, дифференциальных и разностных уравнений; распознавание образов; обработка сигналов и изображений, картография и др.)*. При этом, глобальные *параллельные* преобразования, определяемые *классическими* ***ОС***-моделями, на наш взгляд, можно с достаточной эффективностью довольно широко использовать подобно другим хорошо известным математическим преобразованиям *(Фурье, Лапласа и др.)*.

Задача нахождения ***ЛФП***, соответствующая которой ***ГФП*** генерирует определенную историю *(динамику)* конфигураций структуры, подобна индуктивной проблеме нахождения законов, лежащих в основе наблюдаемого явления. Именно эта аналогия лежит в основе моделирования в ***ОС***-среде естественных и искусственных систем различной, в первую очередь, клеточной, природы, а также при целом ряде других мотиваций, обусловленных задачами исследования. В общем случае проблема полного и точного описания динамики даже классических ***ОС***-моделей является одной из самых сложных в ***ТОС*** и имеющиеся в данном направлении попытки пока не так эффективны как хотелось бы. Можно констатировать, что несмотря на всю простоту такого математического объекта как классические ***ОС-модели***, их динамика в общем случае носит очень сложный характер и ее исследование требует значительных усилий, а в целом ряде случаев и нетрадиционных подходов. Именно поэтому в данном направлении имеется относительно мало результатов, полученных сугубо теоретическими методами, тогда как большая часть их носит эмпирический характер и получены они средствами компьютерного моделирования.

5. В качестве простого примера действия ***ГФП*** рассмотрим ***1-ОС*** с алфавитом вида $A=\{0,1,2,3,4\}$, индексом соседства $X=\{0,1,2,3\}$ и ***ЛФП***, определяемой, в частности, множеством параллельных подстановок вида $\{1023 \Rightarrow 2,\ 1101 \Rightarrow 4,\ 1010 \Rightarrow 3,\ 0102 \Rightarrow 2,\ 0232 \Rightarrow 1,\ 2322 \Rightarrow 3,\ 3221 \Rightarrow 2,\ 2213 \Rightarrow 2,\ 2133 \Rightarrow 4, \ldots\}$. Тогда, если в момент t текущая ***КФ 1-ОС*** имеет вид (φ1), то в следующий момент $t+1$ она переходит в ***φ1*-КФ*** нижеследующего вида. С учетом вышесказанного и завершается определение *четвертой* определяющей компоненты $\{\tau^{(n)}\}$ классической однородной структуры ***d-ОС*** $= \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X\rangle$ (***ОС*** *либо* ***ОС-модели***).

c:	.....	1	1	0	1	0	2	3	2	2	1	3	3	.....	t : φ1
					⇓										
$c\tau^{(n)}$:	.....	4	3	2	2	1	3	2	2	4	.....	.....	.....	.....	$t+1$: φ1*

Именно ***классические d-ОС*** (*или для краткости просто* ***d-ОС***) будут в основном рассматриваться ниже. Функционирование классической ***d-ОС*** чрезвычайно просто и состоит в следующем: если $c_o \in C(A,d)$ – начальная ***КФ*** структуры в момент времени $t = 0$, то ***КФ*** структуры в любой момент времени $t=k>0$ есть $c_o\tau^{(n)k} \in C(A,d)$ – результат k-кратного применения ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ к начальной ***КФ*** $c_o \in C(A,d)$. *Предшественником* произвольной ***КФ*** $c \in C(A,d)$ будем называть любую ***КФ*** $c^{-1} \in C(A,d)$ такую, что имеет место соотношение $c^{-1}\tau^{(n)}=c$. Каждая ***КФ*** $c \in C(A,d)$ может иметь единственного предшественника, конечное или бесконечное их число либо вовсе не иметь предшественников. Естественным образом определяются непосредственные предшественники для как блочных, так и бесконечных конфигураций в классических ***ОС***-моделях [1,5,536,567].

Пусть $\langle c_o\rangle[\tau^{(n)}]$ обозначает *последовательность* ***КФ***, генерируемых ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ из начальной c_o-***КФ***. Тогда для любой конечной ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ данная ***КФ***-последовательность представляет собой некоторую ***историю КФ*** c_o в классической ***d-ОС***, играющую основную роль в исследованиях ее *динамических* свойств. Под *динамикой* понимается функционирование того или иного типа ***d-ОС***, состоящее в *изменении* с течением времени конфигурации структуры как функция ее начальной ***КФ*** и ***ЛФП (ГФП)***. Таким образом, сама динамика классических ***d-ОС*** $= \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X\rangle$ $\{\langle c_o\rangle[\tau^{(n)}]$-*последовательности* ***КФ***; *история развития погружаемых в структуру* ***d-ОС*** *объектов*$\}$ определяется вполне однозначно рассмотренными ее *базовыми* компонентами, а именно: d, Z^d, A, X, $\tau^{(n)}$ $\{\sigma^{(n)}\}$.

6. В качестве довольно простого примера рассмотрим известную «*экологическую*» игру из весьма популярного американского журнала «***Scientific American***» за февраль ***1971 г.*** Она представляет собой типичную классическую **2**-мерную ***ОС***-модель с алфавитом $A=\{0,1\}$ и индексом соседства Мура; ***ЛФП*** $\sigma^{(9)}$ такой модели описывается следующей простой формулой, а именно:

$$\sigma^{(9)}(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_8) = \begin{cases} 1, & if \quad x_0 = 0 \,\&\, \sum x_j = 3 \\ 1, & if \quad x_0 = 1 \,\&\, \sum x_j = \{2\,|\,3\} \\ 0, & otherwise \qquad (j = 1..8) \end{cases} \tag{3}$$

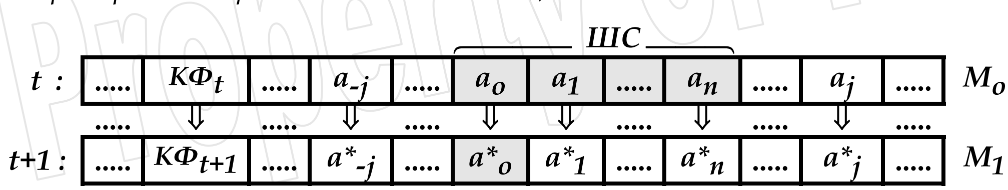
где в качестве текущего выступает x_o-автомат, а x_j $(j=1..8)$ представляют его *8* непосредственных соседей. Иными словами, любой x_o-автомат ***2-ОС*** переходит в состояние «*1*» только тогда, если: ***(1)*** сам он находится в состоянии «*0*» и три его любых соседа находятся в состоянии «*1*» либо ***(2)*** сам он находится в состоянии «*1*» и два либо три его соседа также находятся в состоянии «*1*»; в противном случае x_o-автомат переводится в ***0***-состояние. На обычной клетчатой бумаге данная игра может быть весьма просто реализована вручную с помощью карандаша или ручки. Данная экологическая игра значительно более известна под названием ***«Жизнь»*** ***(«Life»)*** и в настоящее время исследуется достаточно интенсивно с различных точек зрения [3,150,168,172,409,429,536]. В дальнейшем для удобства оба эти названия будут нами отождествляться.

В ряде работ [523-531] игра ***«Жизнь»*** рассматривается в различных интересных контекстах как классическая бинарная ***2-ОС*** с индексом соседства Мура. Например, ***С. Лэнгтон*** [523] выполнил достаточно интересное исследование потенциальных ***ОС***-моделей, поддерживающих ***«Жизнь»***. Интересное обсуждение вопросов искусственной ***Жизни*** в контексте ***ОС***-проблематики может быть найдено в работах [524,525]. Наконец, ***Д. Тхалман*** [526] предложил т.н. ***Lifegame***-подход к моделированию и визуализации сложных поверхностей в компьютерных алгоритмах обработки визуальной информации. В интересной работе [527] ***К. Сутнер*** исследовал модель ***sigma***-игры в контексте динамики ***ОС***-моделей.

Для ручной реализации экологической игры можно поступить следующим образом. Выбираем стопку клетчатой бумаги хорошего качества (*с условием соответствия графления между листами и удовлетворительной прозрачности бумаги*) и на ее первой странице наносим начальную ***КФ (t=0)*** путем заполнения активных клеток символом ***«1»***; пассивные клетки в ***0***-состоянии оставляются нетронутыми (*пустыми*). Затем первые два листа накладываем друг на друга и на фоне яркого освещения (*в частности, на оконном стекле*) на ***4***-й странице стопки формируется следующая ***КФ (t=1)*** на основе указанной ***ЛФП (3)***: для каждой клетки страницы проверяется конфигурация ее ***ШС*** (*сама клетка и ближайшие ее 8 соседей; просвечивает с 1-й страницы*) и в зависимости от нее в клетку вписывается ***«1»*** или она остается без изменения. Подобная операция повторяется также с листами ***2*** и ***3*** стопки и т. д., пока не получим последовательности ***КФ*** требуемой нам длины. Любой читатель без особых затруднений сможет провести ручную имитацию экологической игры, наглядно отслеживая динамику начальной конечной конфигурации такой ***ОС***-модели.

Естественно, при большем числе состояний ***А***-алфавита ***2-ОС***, сложных геометрии ***ШС*** и ***ЛФП*** резко возрастает сложность ручной имитации ***ОС***-модели, требуя как больших расходов бумаги, так и огромных временных затрат. При этом, резко возрастает вероятность появления ошибок (*кстати, достаточно трудно обнаруживаемых*), что может свести на нет огромный объем работы. По этой причине, как правило, *имитация* ***ОС***-модели производится посредством компьютерного симулирования, чему во многом способствует широкое распространение класса персональных компьютеров (***ПК***) с весьма хорошими средствами отображения информации. В данном случае выводимое на экран изображение ***КФ*** представляет собой ***2***-мерный массив *пикселей* – элементов графического изображения, несущих основную информацию о яркости и цвете элементарного участка изображения, чья совокупность составляет изображение ***КФ*** в целом. В настоящее время пиксельные матрицы ***ПК*** характеризуются размерностью 1280*x*1024 и более пикселей, определяя достаточно высокую разрешающую способность дисплейных систем для ***ПК***.

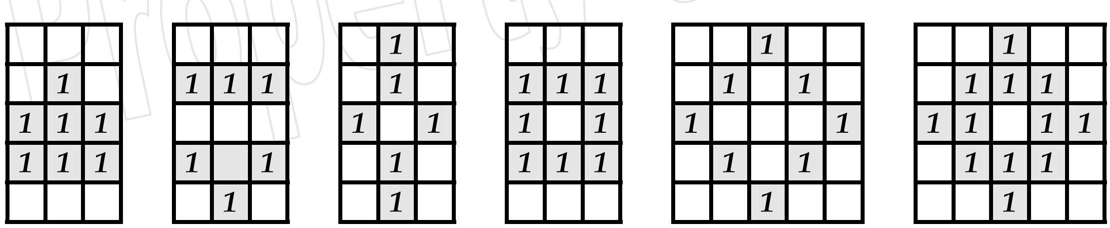
7. Однако и в случае имитации ***ОС***-моделей на компьютерах традиционной последовательной *фон-неймановской* архитектуры [6] мы вынуждены использовать вышеописанную ручную схему имитации (*на примере некоторой классической* ***1-ОС***), а именно:



определяются два идентичных по размерности массива M_o и M_1, из которых первый определяет основное Z^1-пространство, отображающее динамику последовательности ***КФ*** имитируемой ***ОС***-модели. Учитывая последовательный принцип обработки информации на традиционной ЭВМ фон-неймановской архитектуры, на t-шаге на основе последовательной обработки ***ШС*** каждого элемента M_o-массива (*содержащего текущую конечную* $КФ_t$) формируется и выходной M_1-массив, содержащий следующую конфигурацию $КФ_{t+1}$ истории имитируемой ***ОС***-модели. После этого массивы M_o и M_1 логически меняются местами либо содержимое M_1-массива переписывается в M_o-массив, идентифицируя следующую конфигурацию $КФ_{t+1}$, затем вышеописанный процесс повторяется на заданную глубину истории развития симулируемой классической ***ОС***-модели.

Описанный алгоритм (*или его модификации*) компьютерной реализации динамики классических и многих других типов ***ОС***-моделей использовался целым рядом авторов как для исследования свойств собственно самих структур, так и их прикладных аспектов [1,4,8,9,15,54-56,74,78,73,94-96, 137,165,166,408] в различных областях естествознания, включая очень хорошо известные игровые приложения ***ОС***-моделей («*Популяция*», «*Жизнь*», «*Экология*» *и др.*). В частности, нами также была написана весьма простая ***Pascal***-программа ***Ecology*** для имитации указанной игры [5,6], которая позволила получить ряд достаточно интересных результатов эмпирического характера. Данная программа реализована в среде языка программирования *Pascal*; для понимания ее организации требуются лишь начальные сведения по данному алгоритмическому языку.

```
PROGRAM Ecology;   {Имитация экологической игры из Scientific American}
       USES Crt, Dos; {$I-} {Created in March, 1997 in TRG & VASCO * Tallinn}
       VAR HS0: Array [1..25, 1..25] Of Integer; Z,Q,N,M,K,P,Mn: Integer;
              HS1: Array [1..25, 1..25] Of Integer; R: String;
       LABEL L55;
Function Sigma(X: Integer; Y: Integer): Integer;
       BEGIN Q:=0; FOR N:= -1 TO 1 DO FOR M:= -1 TO 1 DO Q:= Q+HS0[X+N,Y+M];
       Q:= Q-HS0[X,Y]; IF (Q = 3) And (HS0[X,Y] = 0) THEN Sigma:= 1 ELSE
       IF ((Q = 2) Or (Q = 3)) And (HS0[X,Y] = 1) THEN Sigma:= 1 ELSE Sigma:=0 END;
                                   BEGIN   ClrScr;   {Главное тело программы}
 WriteLn('Экологическая игра!'); WriteLn('========================');
 Write(`For continue press any key: `); IF Not KeYPressed THEN ReadLn(R);
 WriteLn('Ввести координаты активных точек (25x25)-решетки в виде "X Y", определив');
 WriteLn('тем самым начальную конфигурацию активных клеток в 0-момент.');
 WriteLn('Ввод координат активных клеток завершается по <0 0>-набору!');
        FOR K:= 1 TO 25 DO FOR P:= 1 TO 25 DO HS0[K,P]:= 0;
 REPEAT      Write('Координаты: '); ReadLn(N,M); HS0[N,M]:= 1; UNTIL N = 0;
 Write('Ввести число итераций: '); ReadLn(Mn);  L55: FOR Z:= 1 TO Mn DO  Begin
        FOR K:= 2 TO 24 DO FOR P:= 2 TO 24 DO HS1[K,P]:= Sigma(K,P);
        FOR K:= 1 TO 25 DO FOR P:= 1 TO 25 DO HS0[K,P]:= HS1[K,P];  End;
        FOR K:= 2 TO 24 DO  Begin Write('                    ');
        FOR P:= 2 TO 24 DO Begin Write(HS0[K,P]); Write(' '); End; WriteLn; END;
       Write(`Указать число дополнительных итераций (0/N): `);  ReadLn(Mn);
                IF  Mn <> 0  THEN  GoTo  L55;     END.
```



t=0 *t=1* *t=2* *t=3* *t=4* *t=5*

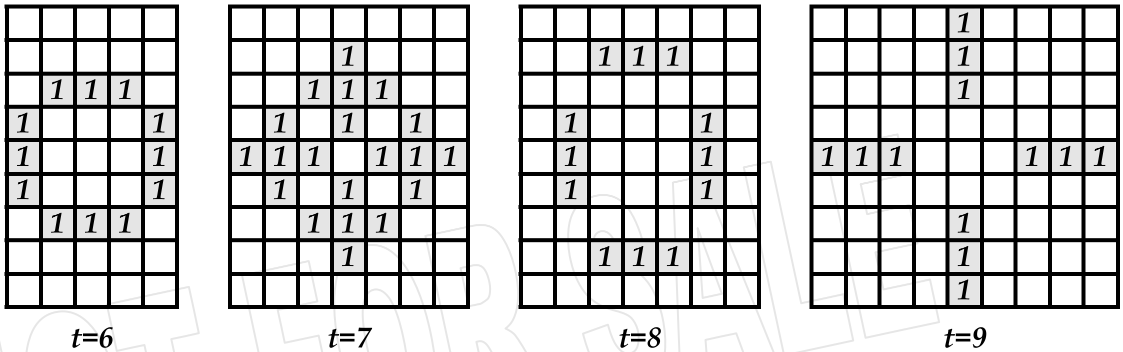


Рис. 5. Пример выполнения Ecology-программы при конкретных установках: начальной конечной КФ и заданном количестве итераций структуры.

Эта программа ***«Ecology»*** использует вышеописанный алгоритм имитации ***ГФП*** симулируемой классической ***2-ОС.*** Данная программа позволяет на требуемую глубину отслеживать на экране ***IBM-***совместимого ***ПК*** динамику распространения активности в подобной ***ОС-***модели**.** Листинг исходного модуля ***Ecology-***программы представлен выше.

Один из примеров выполнения данной программы иллюстрирует рис. ***5,*** в котором приведены начальная конфигурация ***(t=0)*** распределения активных ***(****в* ***1-****состоянии****)*** клеток среды и затем ее конфигураций на девяти последующих шагах итерации**.** Компьютерный эксперимент с игрой показывает**,** что полученные конфигурации завершаются *двумя* периодическими ***КФ*** в моменты времени $t = 8$ и $t = 9$**.** Все последующие конфигурации динамики развития данной ***ОС-***модели вычисляются по следующему правилу, а именно: для всех целых $t \geq 8$ $КФ_t \equiv КФ_8$, если t **–** четное, и $КФ_t \equiv КФ_9$, в противном случае.

В общих чертах суть данной имитационной игры "***Ecology*** сводится к следующему. Выбирается некоторая абстрактная среда, представляющая собой матрицу ***(NxN)-****размерности****,*** чей каждый элемент может находиться в состояниях из множества {***0,1***} ***(0-****пассивен****, 1-****активен****).*** Для каждого элемента определяются ***8*** непосредственных соседей**,** дискретная временная шкала изменения состояний элементов матрицы и локальная **σ-**функция**,** определяющая состояние для каждого элемента матрицы в последующий момент времени в зависимости от состояния его самого и его ***8*** соседей в текущий момент. Для нашего конкретного случая локальная функция определяется формулой ***(3).*** В каждый момент времени локальная функция одновременно применяется ко всем элементам матрицы (*влияние граничных условий не рассматривается*)**,** определяя динамику изменения состояний **(***конфигураций***)** всех элементов матрицы с течением времени**.** В процессе экспериментирования с ***Ecology-***программой пользователь получает возможность производить мониторинг развития процесса распространения активных элементов матрицы в зависимости от заданной начальной конфигурации. Данная игра представляет собой один из примеров ***ОС-*** подобных игр **(***Жизнь***,** *Популяция***,** *Миграция и др.***)** [88,90,165,429,444,526,528-530,536].

После запуска программа выходит на заставку с краткой информацией по сути имитационной игры и инструкцией по формированию начальной ***КФ*** активных клеток поля ***(25х25)-***размера**.** После завершения формирования ***КФ*** и получения желательного числа итераций производится имитация *динамики* развития совокупности активных клеток на базе локальной ***Sigma-***функции**,** реализованной в соответствии с формулой ***(3).*** По истечении заданного количества итераций на экран выводится полученная ***КФ*** и пользователю предоставляется возможность или продолжить итерационный процесс на заданное количествр шагов модели, или прекратить работу.

В программную реализацию игры заложен некоторый минимум возможностей, базирующийся на организации локальной функции перехода и обеспечении ее параллельного применения ко всей ***КФ*** рабочего ***(NxN)-***поля клеток. В качестве достаточно полезного упражнения читателю рекомендуется провести дальнейшее развитие этой программы, наполнив ее, например, такими возможностями как модификация текущей конфигурации с целью отслеживания влияния на динамику случайных повреждений того или иного типа, использование рабочего поле большой размерности для возможности отслеживания динамики на большом количестве итерационных шагов, удобная система визуализации выбираемых областей рабочего поля, обработка особых и аварийных ситуаций, режим прерывания выполнения программы с сохранением ее текущего состояния в файле с последующей возможностью продолжения работы с момента прерывания и др. С интересными программными реализациями ***ОС***-подобных игр наряду с имитационными ***ОС***-моделями различного назначения заинтересованный читатель более основательно сможет ознакомиться, например, в работах [1-3,6,15,19,20,53-56,85,88,90,150,159-161,167,536].

8. Использование современных ***ПК*** позволяет получать существенное уменьшение временных затрат на имитацию ***ОС***-моделей, в ряде случаев решая задачи и в режиме реального времени. Однако ввиду последовательного принципа обработки *кардинально* изменить ситуацию в общем случае традиционная вычислительная техника ***(ВТ)*** не может. Действительно, имитация только одного шага классической ***2-ОС*** с индексом соседства Мура и текущей ***КФ*** размера $(n\mathrm{x}n)$ требует порядка $(n+2)^2$ операций процессора для получения следующей ***КФ*** имитируемой структуры. При этом, учитываются только весьма крупные операции обработки элементов однородного Z^2-пространства, не учитывая целого ряда дополнительных, но необходимых операций *(например, вычисление следующего состояния текущего **z**-автомата структуры согласно ее **ЛФП** и др.).* Тогда как для имитации истории такой ***ОС***-модели на глубину p шагов потребуется по меньшей мере не менее $[3n^2+2(p+1)(3n+2p+1)]p/3$ операций процессора *(где **n** – размер ребра минимального квадрата, содержащего начальную **КФ**).* Приведенная оценка просто получается средствами элементарной математики на основе весьма несложных выкладок, получение ее оставляем читателю в качестве полезного упражнения [*можно использовать известную формулу суммы квадратов целых чисел*].

Следовательно, уже при небольших ***ШС*** и значительной глубине имитируемой динамики ***2-ОС*** временные затраты на p шагов структуры растут очень быстро, что уже становится заметным и на современных массовых ***ПК.*** Естественно, использование более мощных ***ПК*** хоть и дает более *радужную* картину, однако при необходимости имитации действительно сложных ***ОС***-моделей, требующей просмотра большого числа истоторий *(до **1000** начальных **КФ**)* на значительную их глубину *(до **5000 ... 10000** шагов)* возникают сложности и для самых мощных современных ***ПК.*** В значительной степени данную проблему можно решать за счет использования современных супер-ЭВМ [6], однако их ресурсы в данном случае будут использоваться весьма неэффективно. Но и данное решение в целом ряде случаев может оказаться малоэффективным для имитации динамики в реальное время целого ряда достаточно сложных ***ОС***-моделей [536].

Решать задачи компьютерной имитации ***ОС***-моделей в режиме *реального* время позволяет лишь высокопараллельная ***ВТ*** ненеймановской архитектуры, максимальным образом отражающая специфику функционирования ***ОС.*** В настоящее время создан ряд компьютеров, базирующихся на вычислительных ***ОС***-моделях. Одними из пионерских и серьезных практических разработок в данном направлении можно отметить клеточные процессоры ***Легенди*** и ***ML***-сопроцессоры для ***IBM***-совместимых ***ПК,*** созданные группой венгерских исследователей [169-171,175]. Подробнее с организацией ***ML***-сопроцессоров можно ознакомиться в [5,171,175]. Практическое применение ***ML***-сопроцессоров позволило весьма существенно повысить *быстродействие* при решении таких важных классов задач как: распознавание образов, обработка сигналов, управление некоторыми технологическими процессами, использование некоторых типов операций с базами данных и знаний, экспертными системами, все типы клеточных и булевых вычислений, и целый ряд др. Довольно интересная работа проводилась в рамках совместного Немецко-Венгерского проекта [156,175], преследующего цель создания клеточных процессоров на основе вычислительной ***ОС***-

модели и их параллельного программного обеспечения. Интересным эмулятором ***ОС***-моделей является виртуальный клеточный процессор [175], а также целый ряд других весьма интересных разработок [242,308,360]. Целый ряд прикладных разработок в данном направлении сделан и в других странах [146]. Так, итальянскими специалистами [410,411] создана вычислительная среда ***CAMEL*** (***C****ellular* ***A****utomata environ****M****ent for syst****E****ms mode****L****ing*), использующая ***ОС***-модель в качестве теоретической основы и успешно применяемая для моделирования достаточно широкого круга приложений из различных практически важных областей.

Именно разнообразными приложениями ***ОС***-моделей к моделированию различных феноменов, явлений и процессов характеризуются в области ***ТОС***-проблематики и исследователи из *Cellular Automata Group* университета Калабрии (*Италия*). Действительно, сфера приложений таких ***ОС***-моделей довольно обширна: от *микроскопического* симулирования физических и биологических феноменов до *макроскопического* симулирования геологических и социальных процессов. В этом отношении итальянской школой получено немало очень интересных приложений ***ОС***-моделей к довольно утилитарным задачам, имеющим непосредственную практическую значимость [397-402,410-414]. Так, в работе [413] предложен детальный симулятор трафика на автостраде на базе вышеупомянутой высокопараллельной системы ***CAMEL***, основывающейся на ***ОС***-модели. Тогда как из отечественных практических разработок по реализации вычислительных ***ОС***-моделей мы могли бы отметить многочисленные результаты групп исследователей из Новосибирска, Киева, Таганрога, Ленинграда, Москвы и Кишинева [176-178,536,593].

Другой интересный и перспективный подход к практической реализации вычислительной ***ОС***-модели предложили ***Н. Марголус*** и ***Т. Тоффоли***, создав серию так называемых *машин клеточных автоматов* (***C****ellular* ***A****utomata* ***M****achines* – ***CAM***) [150,165,376,394]. Так, модель ***CAM-6*** представляет собой машину клеточных автоматов, предназначенную для экспериментального исследования относительно простых ***ОС***-моделей. Она представляет собой удобную среду для интерактивных исследования и демонстрации ***ОС***-моделей в режиме реального времени. С весьма популярным описанием модели и примерами ее использования можно ознакомиться по превосходной книге [150]. Последней моделью указанной серии является ***CAM-8***, технически представляющая собой систолический массив процессоров, симулирующий параллельную архитектуру ***SIMD***-типа [6]. В настоящее время модель выпускается фирмой ***Step Research*** и ее подробное описание можно найти в работах [165,394]. Использование модели ***CAM-8*** оказалось довольно эффективным при моделировании целого ряда достаточно сложных задач: гидродинамики, экологии, обработки образов, изучения математических свойств различного типа ***ОС***-моделей, получения эффектов различного рода, физического моделирования и многих др. С перспективами развития данного направления в ***ТОС***-проблематике можно ознакомиться в интересной монографии [366].

В связи с успехами микроэлектроники и нанотехнологии ряд авторов уже сегодня предлагают практические подходы к реализации перспективных сверхбольших интегральных схем на базе концепции ***ОС***-моделей, которые могут быть разработаны в самое ближайшее время. В связи с развитием технологии интегральных схем (*где сама специфика производства такова, что там очень удобно создавать устройства итеративной архитектуры*) постоянно растет интерес к приложению ***ТОС***-проблематики. Клеточная логика имеет дело с математическими моделями и техникой для анализа и синтеза цифровых сетей на основе вычислительных ***ОС***-моделей, однако по причине обширности данной проблематики ее рассмотрение выходит за рамки настоящей монографии и читатель отсылается к многочисленным работам, представленным в библиографии [536].

9. Элементы программирования ***ОС***-моделей на языке системы параллельных подстановок (***ПП***) проиллюстрируем на простом примере классической ***1-ОС***, моделирующей работу *произвольной* машины Тьюринга (***МТ***). Однако предварительно кратко поясним принцип функционирования ***МТ***. Понятие мащины Тьюринга (***МТ***) достаточно прозрачно и состоит в следующем (*детальнее с*

МТ*-проблематикой на вполне доступном уровне можно ознакомиться, например, в сборнике* [260]***).*** Так, классическая ***МТ*** состоит из трех компонент, а именно (рис. ***6).***

(1) Бесконечная в обе стороны лента разбита на ячейки, содержащие строго по одному символу из некоторого конечного алфавита $S=\{\square, s_1, \ldots, s_n\}$, называемого *внешним* алфавитом ***МТ****. Внешний* алфавит содержит специальный □-символ, идентифицирующий *пустую* ячейку ленты машины ***(****в предположении, что лента бесконечна либо потенциально бесконечна в обе стороны****).***

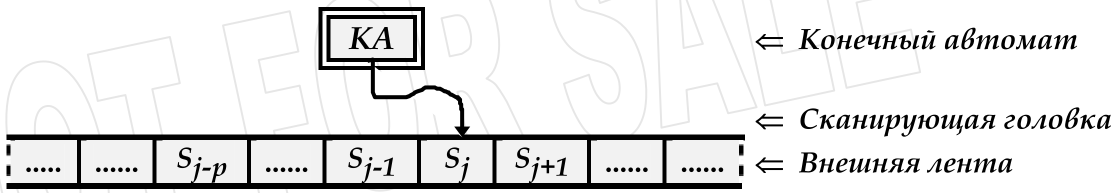


Рис. 6. Принципиальная схема абстрактной машины Тьюринга (МТ).

Словом, записанным на ленте, будем полагать ориентированную слева направо конфигурацию *всех* состояний ячеек; при этом, рассматриваться будет только множество *всех* конечных слов, т.е. слов, имеющих конечное число вхождений символов s_k ***(k=1..n).*** Не нарушая общности, *внешнюю* ленту машины можно полагать и конечной, но с возможностью при необходимости достраивать пустые ячейки слева и справа. Ленту машины можно рассматривать в качестве внешней памяти ***МТ***, а ее ячейки можно для удобства тем или иным способом перенумеровать целыми числами.

(2) *Конечный автомат* ***(КА)*** машины *Тьюринга* представляет собой некое устройство, находящееся в каждый дискретный момент времени ***(t=0,1,...)*** в некотором состоянии из конечного множества $Q=\{q_o, q_1, q_2, \ldots, q_m\}$, где q_o-состояние определяет останов ***МТ*** и называется *заключительным*. При этом, множества ***S*** и ***Q*** не имеют общих символов, т.е. $S \cap Q = \varnothing$. ***КА*** наделен внутренней памятью, содержащей программу работы ***МТ***, и *устройством управления* ***(УУ)***, обеспечивающим механизм выполнения всех допустимых машиной операций. При этом, ***Q***-множество символов называется *внутренним* алфавитом ***МТ;*** в дальнейшем ***МТ*** с внешним ***S*** и внутренним ***Q*** алфавитами будем обозначать в виде MT^s_q; ***#S = s*** и ***#Q = q***, где ***#А*** – мощность *(количество элементов)* произвольного конечного ***А***-множества.

(3) *Сканирующая головка* ***(СГ)*** за единицу времени *(такт машины)* может смещаться вправо/влево лишь на одну ячейку ленты и изменять состояние сканируемой ею ячейки; ***СГ*** может оставаться и неподвижной любое число тактов машины.

10. Работа такой MT^s_q происходит в дискретные моменты времени и управляется ***УУ*** конечного автомата, точнее: в зависимости от внутреннего ***q****-состояния* и ***s****-состояния* сканируемой ячейки *внешней* ленты производится в общем случае изменение обоих состояний и сдвиг сканирующей головки. Если на некотором шаге ***КА*** переходит в q_o-состояние, то MT^s_q переходит в финальное *(заключительное)* состояние и останавливается, завершая вычисление. В таком случае *состоянием (конфигурацией)* MT^s_q называется последовательность следующего вида, а именно:

$$\square s_{j-d} \ldots s_{j-1} s_j q_j s_{j+1} s_{j+2} \ldots s_{j+p} \square \qquad (4)$$

состояний всех ячеек внешней ленты и внутренним состоянием ***КА;*** сам q_j-символ внутреннего состояния следует за состоянием сканируемой ячейки ленты ($j=-\infty \,..\, +\infty$); где ***p,d*** – натуральные числа и $\square \in S$ – вспомогательный символ, идентифицирующий пустую клетку ленты. Далее нами предполагается, что существуют MT^s_q с любыми непересекающимися алфавитами ***S*** и ***Q***, и что машину можно привести в начальный момент ***t=0*** в любую конфигурацию вида ***(4)*** и поместить во внутреннюю память программу ее функционирования.

Следовательно, функционирование MT^s_q формально состоит в переработке набора конечных конфигураций вида **(4)** в конфигурации того же вида**;** завершается функционирование MT^s_q по достижении конфигурации, содержащей *заключительное* внутреннее q_o**-**состояние, в противном случае машина работает бесконечно и результат вычисления ею полагается неопределенным. В свете сказанного о ***КА*** работа машины *Тьюринга* определяется согласно заданной ей программы, содержащей конечное число команд следующего вида:

$$s_k q_k \Rightarrow s`_k q`_k \{Z_k\} \quad s_k, s`_k \in S; \;\; q_k, q`_k \in Q; \;\; Z_k \in \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\} \quad (k = -\infty \,..\, +\infty) \qquad (5)$$

которые имеют смысл: если в некоторый момент времени $t \geq 0$ ***КА*** имеет внутреннее состояние q_k, головка сканирует k**-**ю ячейку ленты с s_k**-**символом**,** в следующий **(*t*+1)-**момент времени ***УУ*** изменяет символ в сканируемой ячейке на $s`_k$, внутреннее состояние ***КА*** на $q`_k$ и подвергает ***СГ*** сдвигу {→ **–** *вправо*, ← **–** *влево*, ↑ **–** *оставляет на месте*}**.** Таким образом**,** MT^s_q считается заданной при указании для нее алфавитов ***S*** (*с пустым* □*-символом*)**,** ***Q*** (*с заключительным* q_o*-состоянием)* и программы работы с командами вида **(5);** при этом**,** каждая команда выполняется за один такт MT^s_q-машины [260].

11. Моделирующую произвольную машину MT^s_q классическую структуру ***1-ОС*** определяем с алфавитом $A = S \cup Q \cup Q^*$ (*Q^* получается из Q-алфавита заменой всех его q_j-символов на символы q_j^**) и индексом соседства Неймана-Мура ***X=***{***-1,0,1***}**.** Тогда как ***ЛФП ОС-***модели определям набором следующих *параллельных подстановок* ***(ПП),*** а именно:

$$\square\square\square \Rightarrow \square \qquad s_i s_j s_k \Rightarrow s_j \;\; s_i s_j \square \Rightarrow s_j \;\; s_i \square\square \Rightarrow \square \;\; \square\square s_k \Rightarrow \square \qquad (6)$$

$$\square s_j s_k \Rightarrow s_j \qquad (s_i, s_j, s_k, s`_k \in S; \;\; q_k, q`_k \in Q; \quad q^*, q`^*_k \in Q^*)$$

$$s_{j-1} s_j q_j \Rightarrow q`_j \qquad s_j q_j s_{j+1} \Rightarrow s`_j \qquad q_j s_{j+1} s_{j+2} \Rightarrow s_{j+1} \qquad (7)$$

$$s_{j-1} s_j q_j \Rightarrow s`_j \qquad s_j q_j s_{j+1} \Rightarrow q`^*_j \qquad q_j s_{j+1} s_{j+2} \Rightarrow s_{j+1} \qquad (8)$$

$$s_{j-1} s`_j q`^*_j \Rightarrow s`_j \qquad s`_j q`^*_j s_{j+1} \Rightarrow s`_{j+1} \qquad q`^*_j s_{j+1} s_{j+2} \Rightarrow q`_j$$

$$s_{j-1} s_j q_j \Rightarrow s`_j \qquad s_j q_j s_{j+1} \Rightarrow q`_j \qquad q_j s_{j+1} s_{j+2} \Rightarrow s_{j+1} \qquad (9)$$

При этом, □**-**символ покоя моделирующей ***1-ОС*** соответствует пустому символу машины MT^s_q**.**

Используя систему ***ПП (6) .. (9),*** можно убедиться, что взяв в качестве текущей ***КФ*** определенной таким образом ***1-ОС*** конфигурацию ***(4), ГФП,*** определяемая группой ***ПП (6)*, *(7)*** и ***(6), (9),*** за один шаг структуры переводит ее соответственно в ***КФ*** следующего вида**:**

$$\square s_{j-1} q`_j s`_j s_{j+1} s_{j+2} \square \qquad \text{и} \qquad \square s_{j-1} s`_j q`_j s_{j+1} s_{j+2} \square$$

Тогда как группа ***ПП (6), (8)*** за один шаг переводит ***КФ (4)*** в конфигурацию вида:

$$\square s_{j-1} s`_j q`^*_j s_{j+1} s_{j+2} \square \qquad (10)$$

и только на втором шаге переводит ***КФ (10)*** уже в необходимую конфигурацию вида**:**

$$\square s_{j-1} s`_j s_{j+1} q`_j s_{j+2} \square$$

Таким образом, запрограммированная нами на языке ***ПП*** классическая ***1-ОС*** моделирует MT^s_q в реальное время с не худшим, чем в **2** раза замедлением. Моделирующая структура имеет индекс соседства Неймана-Мура и ***(s+2q)-***мощность ***А-***алфавита. В дальнейшем нами будет рассмотрен и ряд других примеры программирования классических ***ОС-***моделей на языке ***ПП,*** что позволит нам более ясно представить особенности параллельного программирования на низком уровне в среде одной из формальных моделей высокопараллельной обработки информации. В качестве довольно полезного упражнения читателю рекомендуется запрограммировать для вычисления в среде классических ***1-ОС*** задач симметрического обращения и удвоения любой конечной ***КФ***. Достаточно интересные примеры программирования в среде классических ***1-ОС*** ряда известных *последовательных* алгоритмов для переработки слов в конечных алфавитах и целого ряда других задач, исследующих отдельные вопросы поведения ***ОС***-моделей, можно найти в наших работах [5,19,20,53-56,88,90].

Язык параллельных подстановок ***(ЯПП)*** может служить в качестве примера алгебраического языка описания и анализа параллельных микропрограмм [12,173], который является лингвистическим формализмом достаточно узкого класса вычислительных ***ОС***-моделей и который базируется на понятии систем параллельных подстановок, определяющих локальную функцию перехода $\sigma^{(n)}$ классических ***ОС***–моделей. Между тем, ***ЯПП*** представляет интерес и с более общей позиции при эмпирических исследованиях структур, ибо далеко не каждая их ***ЛФП*** представима формульно.

Однако уже и из приведенного примера можно сделать вполне определенный вывод о том, что сложность параллельного программирования в среде ***ОС***-моделей достаточно сложных задач представляется значительно сложнее программирования их на вычислительных моделях сугубо последовательного действия. Объяснить это можно рядом обстоятельств, из которых отметим, на наш взгляд, основное. Традиционное программирование носит сугубо последовательный (*пооператорный*) характер, позволяя разработчику в процессе достижения основной цели задачи на отдельных этапах концентрировать свое внимание на достаточно ограниченных (*локальных*) ресурсах вычислительной среды. Каждый этап (*оператор*) программы использует информацию (*вход*) из относительно ограниченной (*по сравнению со всей задачей*) локальной области. При этом, проблемы *синхронизации* процессов относительно нечасты и разрешаются, например, довольно простым механизмом семафоров (*флажков*). Таким образом, программирование задачи в среде последовательных вычислительных моделей сводится к созданию последовательной (*возможно, с конструкциями цикла и ветвления*) цепи локального характера операторов, выполнение которых и обеспечивает достижение общей цели задачи [6,88,90,536,593].

В случае высоко параллельных вычислительных ***ОС***-моделей каждый последовательный шаг в эволюции решаемой задачи программируется сугубо *параллельным* образом на основе *локальных* ***ПП***, действующих одновременно и синхронно на всем вычислительном пространстве модели, что требует глобальной синхронизации. Следовательно, разработчик должен не только иметь в виду конечную цель задачи, но и постоянно отслеживать динамику всей вычислительной среды (*ресурсов*), функционирующей сугубо параллельным синхронным образом. Вместе с тем, быть может, сложность параллельного программирования носит во многом субъективный характер, обусловленный традиционностью используемых последовательных вычислительных моделей (*вопреки параллельному принципу функционирования большинства клеточных систем, включая также и человеческий мозг*), а также укоренившейся методикой решаемых нами на них задач.

Использование параллельных моделей обработки информации должно оказать (*и уже начинает оказывать*) прогрессирующее влияние на формирование параллельного образа мышления, что позволит существенно повысить интеллект и естественных, и искусственных систем обработки информации (*и, прежде всего, за счет резкого сокращения временных издержек*). Высокий *параллелизм* обработки информации, заложенный в такой сложнейшей системе клеточной организации как человеческий мозг, наилучшим образом отвечает ***концепции параллельного мышления***, которая для подавляющего числа людей происходит неосознанно, вследствие чего не может дать всего обеспечиваемого им эффекта. Но вместе с тем, переход на осознанные модели параллельного мышления может оказаться не менее сложным эволюционным развитием человека, чем вся его предыдущая история становления традиционного последовательного интеллекта.

Однако, искусственные интеллектуальные системы обработки информации, базирующиеся на параллельных вычислительных моделях (*и формальных, и уже практически реализованных*) должны существенно сократить такой *эволюционный* процесс, приблизив его к уровню революционного пересмотра многих основных современных концепций мышления. И уже не сам человек будет приспосабливать архитектуру автоматизирующих его *интеллектуальный* труд вычислительных средств к, вообще говоря, не вполне естественному для его мозга последовательному принципу обработки информации, а уже формальные высоко параллельные вычислительные модели и их практические реализации должны способствовать его повороту к более естественному для него параллельному образу мышления, существенно увеличивая загрузку ресурсов его мозга и резко расширяя границы человеческого интеллекта. Работа с ***ОС***-моделями, в частности, во многом и стимулирует данный процесс.

Философские и гносеологические аспекты данной, сложнейшей во всех отношениях проблемы, здесь не обсуждаются, но требуют самого пристального внимания и серьезной проработки. И здесь мы должны в полной мере руководствоваться принципом опережающего обучения, когда глобальная проблема заранее до обретения ею живого очертания должна пройти всестороннее осмысление и ознакомление с ней достаточно широких слоев общества. Тогда подготовленное общество существенно более естественно и легко в последующем воспримит осмысленные идеи и концепции, внедряемые затем в жизнь значительно быстрее, безболезненнее и без ненужных издержек различного характера. И здесь с полным основанием можно перефразировать одно широко известное изречение – *Знание определяет сознание*, хотя, конечно, и бытие играет далеко не последнюю роль. И сопоставление обоих изречений в ретроспективе истории человечества может, в свою очередь, дать немало весьма глубоких философских осмыслений [568].

12. Таким образом, понятие ***классической d-ОС*** интуитивно представляется весьма простым и в данной связи возникает вопрос о степени его общности, т.е. насколько широко данное понятие допускает расширения, не выводящие за рамки того или иного исследуемого феномена такой структуры либо за рамки определенным образом заданного критерия эквивалентности (*своего рода свойство устойчивости понятия*). С этой целью был проведен детальный анализ целого ряда расширений классического понятия ***d-ОС*** относительно их динамических свойств, результаты которого показали, что несмотря на относительно жесткие критерии эквивалентности *динамики* двух структур (*положенные в основу сравнительного анализа*) классическое понятие ***d-ОС*** обладает достаточной степенью общности, что позволяет рассматривать его в качестве одного из базовых, составляющих основу ***ТОС***-концепции во всей ее общности и, вместе с тем, всей его обширной разноплановости [38].

13. Из вышесказанного следует, что понятие классических ***d-ОС***=$\langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X\rangle$ обладает вполне приемлемой степенью общности для многих достаточно важных приложений (*несмотря на всю его простоту*), а также представляет и весьма значительный интерес в качестве самостоятельного математического объекта, являющегося важной составной частью и абстрактных, и прикладных моделей параллельной обработки информации и вычислений. И, если ***3*** компоненты Z^d, A и X структуры являются довольно простыми и прозрачными, о сложности ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определяющей собственно динамику ***ОС***-моделей, пока ничего не говорилось. Данный вопрос удобнее всего оказалось рассматривать в терминах теории рекурсивных функций [3,5,8]. Так, из определения классической ***d-ОС*** несложно убедиться, что она представляет собой формальный *параллельный* алгоритм переработки конечных ***КФ*** (*слов*) из словарного множества $C(A,d,\phi)$ посредством ***ГФП***, которую можно рассматривать как словарную функцию, всюду определенную на множестве $C(A,d,\phi)$. На основе данного подхода было доказано [5], что: ***Произвольная ГФП в классической d-ОС примитивно рекурсивна.*** Данный результат определяет не только место ***ГФП*** в иерархии всех рекурсивных функций, но и совместно с отмеченной простотой остальных компонент ***d-ОС***

позволяет говорить о том, что определяемый ими такой простой объект, как *классические* ***d-ОС***, обладает достаточно большой степенью общности и весьма сложной динамикой, позволяющей моделировать достаточно широкий класс явлений, процессов и феноменов, имеющих место в целом ряде разделов науки и техники. Наряду с этим, он представляет и несомненный интерес для исследования в качестве самостоятельной формальной модели параллельной обработки и вычислений. В рамках же классических ***d-ОС*** выделяются специальные подклассы структур со специфическими характеристиками, такие как ***ОС*** с рефрактерностью, памятью и ряд других, позволяющие более эффективно моделировать целый ряд достаточно интересных процессов и объектов. Некоторые из этих типов структур рассматриваются нами несколько ниже.

1.2. Основные типы однородных структур

На сегодня с одной или другой степенью интенсивности используется целый ряд расширений и обобщений определенного выше понятия классических ***ОС***-моделей. Однако далеко не каждое расширение классического понятия структуры ***d-ОС*** оставляет в рамках избранных критериев эквивалентности. Существенными обобщениями классического понятия являются полигенные детерминированные, недетерминированные и стохастические ***ОС***-модели; тогда как в качестве широко используемых расширений – ***ОС***-модели с памятью, с рефрактерностью, на разбиении и др. В настоящем разделе кратко остановимся лишь на **5** типах ***ОС***-моделей, представляющих значительный интерес со многих точек зрения, а именно: полигенные, структуры с памятью и рефрактерностью, ***ОС****-структуры, а также структуры на *разбиении*, ориентированные, главным образом, на моделирование физических приложений, прежде всего, из-за свойства *обратимости*.

Для указанных компонент ***A***, $\boldsymbol{Z^d}$ и ***X*** множество ***G*** допустимых параллельных преобразований – любое непустое подмножество множества всех ***ГФП***, определяемых этими тремя компонентами. Если множество ***G*** содержит только одну ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, то структура ***d-ОС***$\equiv\langle Z^d,A,\tau^{(n)},X\rangle$ называется ***моногенной***, в противном случае – ***полигенной***. Моногенная ***d-ОС*** называется также ***классической*** структурой, рассмотренной выше. Тогда как для *полигенной* ***d-ОС*** вместо *единственной* функции используется более одной ***ГФП*** и для такой структуры в каждый дискретный момент времени ***t>0*** к текущей ***КФ*** применяется одна из ***ГФП*** из ***G***-множества допустимых функций перехода. Среди полигенных ***d-ОС*** выделяются три основных подкласса структур: ***детерминированные*** (*в каждый момент времени* ***t>0*** *использование* ***ГФП*** *выполняется по определенному детерминированному алгоритму*), ***недетерминированные*** (*в случае отсутствия подобного алгоритма*) и ***стохастические*** (***ГФП*** *применяются по некоторому стохастическому закону*). В настоящее время наиболее развита теория детерминированных ***ОС***-моделей, поэтому далее наиболее подробно рассматривается именно данный класс структур ***d-ОС***. Определенные нами структуры (*моногенные* $\langle Z^d,A,\tau^{(n)},X\rangle$ *и полигенные* $\langle Z^d,A,G,X\rangle$) будут основным объектом обсуждения и, в первую очередь, *моногенные* либо *классические* ***ОС***-модели. Более того, основное внимание нами уделяется вопросам теории классических ***1-ОС***, но имея при этом в виду, что базовые параметры ***d***, ***#(A)*** и ***X*** для ***ОС***-моделей существенны, образуют *иерархию* свойств относительно того или иного феномена или динамики структуры. Например, классы структур ***1-ОС*** и ***d-ОС*** ($d\geq 2$) не эквивалентны между собой уже относительно конструктивных возможностей, проблем неконструируемости и алгоритмической разрешимости и др. Подобная ситуация имеет место также и для других основных параметров ***ОС***-моделей и в данном направлении имеется целый ряд интересных результатов [3,5,9], однако общая картина в данном направлении пока остается не до конца прозрачной [5,88,90,536].

1. Таким образом, в общем случае любая *полигенная* ***d-ОС***$\equiv\langle Z^d,A,G,\Omega\rangle$ отличается от моногенной (*классической*) структуры $\langle Z^d,A,\tau^{(n)},X\rangle$ тем, что *первая* в каждый дискретный момент времени ***t>0*** допускает использование в качестве ***ГФП*** любой из фиксированного конечного ***G***-множества ***d***-мерных функций, определенных в ***A***-алфавите, в соответствии с некоторым **Ω**-алгоритмом их применения к текущей ***КФ*** однородного пространства Z^d, т.е. для нее история конфигураций принимает следующий вид, а именно:

$$<c_o>[G] = c_o\tau_1^{(n_1)}\tau_2^{(n_2)}\tau_3^{(n_3)} \ldots\ldots \tau_j^{(n_j)} \ldots\ldots ; \quad \tau_j^{(n_j)} \in G \quad (j = 1..m)$$

Множество ***G*** содержит конечное количество ***d***-мерных ***ГФП,*** определенных в одном и том же ***A***-алфавите, но каждая из указанных функций в общем случае может иметь собственный индекс соседства. В зависимости от типа используемого **Ω**-алгоритма различают ***детерминированные, недетерминированные*** и ***стохастические*** полигенные ***ОС***-модели. Так, для детерминированной *полигенной* структуры характерно наличие строго определенного **Ω**-алгоритма, определяющего порядок применения на каждом шаге к текущей ***КФ*** структуры ***ГФП*** из заданного конечного ***G***-множества допустимых глобальных функций перехода. *Полигенные* структуры имеют довольно широкую сферу приложений как теоретического, так и прикладного характера [536]. Например, структуры данного класса играют существенную роль в проблеме сложности конфигураций.

Довольно простым примером по детерминированным полигенным структурам может служить ***1-ОС*** $\equiv <Z, A=\{0,1\}, G=\{\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(3)}\}, \Omega=\tau_1^{(2)}\tau_2^{(3)}\tau_1^{(2)}\tau_2^{(3)} \ldots>$, где ***ГФП*** $\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(3)}$ определяются ***ЛФП*** соответственно с индексами соседства $X_1=\{0,1\}$ и $X_2=\{-1,0,1\}$, а именно:

$$\sigma_1^{(2)}(s_1,s_2) = s`_1 = s_1 + s_2 \ (mod\ 2) \qquad \sigma_2^{(3)}(s_1,s_2,s_3) = s`_2 = s_1 + s_2s_3 \ (mod\ 2)$$

Порядок применения ***ГФП*** из ***G***-множества всех допустимых функций к каждой начальной ***КФ co*** строго детерминирован и определен **Ω**-алгоритмом, чья суть особых пояснений не требует. В данном случае **<*co*>[*G*]**-последовательность *(история)* ***КФ*** на длину лишь ***20*** шагов при ***co***=□***11***□ принимает следующий весьма простой вид, а именно:

c0 =	□□***11***□□	***c10 =***	□□***1001100101***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c1 =	□□***101***□□	***c11 =***	□□***11010101111***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c2 =	□□***101***□□	***c12 =***	□□***111010110011***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c3 =	□□***1111***□□	***c13 =***	□□***1001111010101***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c4 =	□□***10011***□□	***c14 =***	□□***1010011010101***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c5 =	□□***110101***□□	***c15 =***	□□***111101011111111***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c6 =	□□***1110101***□□	***c16 =***	□□***100110110110000011***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c7 =	□□***10011111***□□	***c17 =***	□□***1101011010000101***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c8 =	□□***10100011***□□	***c18 =***	□□***11101111010000101***□□
	$\Downarrow \tau_1^{(2)}$		$\Downarrow \tau_1^{(2)}$
c9 =	□□***111100101***□□	***c19 =***	□□***100110001110001111***□□
	$\Downarrow \tau_2^{(3)}$		$\Downarrow \tau_2^{(3)}$
c10 =	□□***1001100101***□□	***c20 =***	□□***101110010110110011***□□

В общем случае детерминированная полигенная ***d-ОС*** определяется **Ω-**алгоритмом, в качестве которого выступает некоторая рекурсивная функция $N=\Omega(t)$ $(t=1,2,3,...)$, и возвращающая номер ***ГФП*** из ***G-***множества, элементы которого определенным образом занумерованы. Например, для рассмотренного выше примера *детерминированной* ***1-ОС*** **Ω-**функция принимает весьма простой вид: $\Omega(t) = 1+t\ (mod\ 2)+1$ и $G = \{\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(3)}\}$. Так как **Ω-**функция рекурсивна, то она вычислима на соответствующей машине Тьюринга $(MT^s{}_q)$ [180,181]. Учитывая же частичную рекурсивность и каждой ***ГФП*** из ***G-***множества [5,53], довольно нетрудно убедиться, что для *каждой* генерируемой детерминированной полигенной структурой ***1-ОС*** $<co>[G]$-последовательности ***КФ*** существует $MT^s{}_q$, симулирующая эту же последовательность ***КФ***. Но так как каждая $MT^s{}_q$ моделируется в реальное время классической ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура (раздел **1.1**), то можно получить довольно интересное следствие (*с естественным обобщением на **d**-мерный случай*): ***Любая детерминированная полигенная d-ОС≡<Z^d,A,G,Ω> может моделироваться соответствующей классической d-ОС.*** Предложенный подход позволяет получать *неконструктивное* доказательство результата, тогда как конструктивным путем можно получать количественные оценки основных параметров *классической* структуры, моделирующей *детерминированную полигенную* структуру.

Недетерминированные полигенные ***d-ОС*** наряду с самостоятельным интересом в качестве важного математического объекта оказываются довольно полезными также при исследовании методов и принципов повышения надежности и живучести сложных клеточных систем как живой, так и неживой природы. С интересным обсуждением данной проблематики можно ознакомиться в работах [5,53-56]. Здесь же этот вопрос кратко рассмотрим только в связи с понятием общности классических ***ОС-***моделей. Будем далее называть *недетерминированной* структуру $SH(d,a,n,N) \equiv <Z^d,A,G,X>$, если в любой момент времени $t>0$ к текущей ***КФ*** $c_t \in C(A,d)$ структуры применяются поочередно все ***ГФП*** из ***G-***множества мощности N $(\#G=N)$ допустимых функций перехода; при этом, порядок применения функций строго не определяется. Показано [53], что определенная таким образом недетерминированная структура $SH(d,a,n,N)$ моделируется классической ***d-ОС*** с индексом соседства Мура, еще раз лишний подтверждая вполне достаточную степень общности классического понятия ***ОС-***моделей. С обобщением понятия ***d-ОС*** и на стохастический случай открываются не только новые прикладные аспекты, но и предлагаются для исследования очень интересные математические объекты стохастической и квазистохастической природы.

Итак, если *детерминированные* и *недетерминированные* полигенные ***ОС-***модели характеризуются соответственно наличием **Ω-**алгоритма и отсутствием его для применения на каждом шаге ***ОС*** соответствующей ***ГФП*** из ***G-***множества допустимых глобальных функций перехода, то в случае *стохастических полигенных* ***ОС-***моделей **Ω-**алгоритм определяется некоторой заданной *функцией распределения вероятностей*, приписывающей каждой функции $\tau_j^{(n_j)}$ из ***G-***множества вероятность (p_j) ее применения в *любой* дискретный момент $t>0$ времени к текущей ***КФ*** структуры, а именно:

ГФП:	$\tau_1^{(n_1)}$	$\tau_2^{(n_2)}$	$\tau_3^{(n_3)}$	.....	$\tau_j^{(n_j)}$	.....	$\tau_m^{(n_m)}$
P:	p_1	p_2	p_3	.....	p_j	.....	p_m

$\sum p_j=1$

В целом ряде случаев можно провести удовлетворительные аналогии между стохастическими ***d-ОС*** и различными многокомпонентными объектами стохастической либо квазистохастической природы. В данной связи нами были определены два типа стохастических ***d-ОС*** (*гетерогенные и гомогенные*) и исследовано их асимптотическое поведение [1,3,5,21]. В частности, было получено условие *асимптотического* приближения динамики *гетерогенных* структур к *классическим*. Целый ряд довольно интересных результатов по стохастическим ***ОС-***моделям получен также другими исследователями. Так, на основе специального подхода к моделированию одних стохастических ***d-ОС*** другими ***d-ОС*** того же класса ***А. Матевосяном*** [182] доказано существование *универсальных* стохастических структур и исследованы оценки соответствующих им сложностных и временных издержек моделирования. Было показано, что для определенных подклассов ***W*** стохастических ***ОС***-моделей существует универсальная бинарная стохастическая ***d-ОС***, моделирующая любую структуру из ***W*** в реальное время. Весьма интересные вопросы идентификации стохастических конечных ***ОС***-моделей изучались ***А. Адаматским*** [161,183]. Обсуждение проблематики данных *стохастических* ***ОС***-моделей наряду с целым рядом интересных результатов в этом направлении заинтересованный читатель может найти в интересных работах [1,3,5,15,55,90,143,147,149,157,160, 161,166,308,536], содержащих ссылки на достаточно большое число оригинальных источников. В настоящее время стохастические структуры различного типа исследуются довольно интенсивно.

До сих пор мы рассматривали (*да и в дальнейшем также планируем рассматривать*) исключительно синхронные ***ОС***-модели, характеризуемые тем, что на каждом их шаге применяется единая для всего Z^d-пространства структуры ***ГФП*** из фиксированного ***G***-множества; для классических ***ОС***-моделей ***G***-множество содержит единственную ***ГФП***. Между тем, с теоретической точки зрения и ряда приложений представляют интерес и *асинхронные* ***ОС***-модели, допускающие применение на любом шаге структуры в различных областях Z^d-пространства структуры разные ***ЛФП (ГФП)*** из некоторого фиксированного ***G***-множества. На наш взгляд, *асинхронные* ***ОС*** могут представить определенный интерес в плане исследования космогонических моделей Вселенной, однако на сегодня нам не известны сколько-нибудь интересные результаты по такого класса структурам.

При нашем же подходе (*аналогично случаю классических конечных автоматов*) в качестве состояния ***ОС***-модели понимается конфигурация всего Z^d-пространства. А так как она перерабатывается ***ГФП***, то именно относительно глобальной функции перехода $\tau^{(n)}$ структуры мы и определяем понятие детерминированность, недетерминированность и стохастичность. Однако эти понятия можно определять и на уровне ***ЛФП***, но в таком случае мы будем иметь дело с *асинхронными* ***ОС***-моделями, когда на Z^d-пространстве нарушается, в общем случае, сам принцип *универсальности* локальных законов в каждый момент времени $t>0$. Класс *асинхронных* ***ОС***-моделей представляет значительный как теоретический, так и прикладной интерес, однако теоретические результаты по нему не столь внушительны ввиду сложности исследования такого типа *недетерминированных* и *стохастических* клеточных систем. Большинство полученных здесь результатов носят, главным образом, эмпирический характер.

2. В последнее десятилетие наметился достаточно значительный интерес к разработке моделей новых поколений вычислительных систем, исповедующих *ненеймановскую* параллельную модель вычислений[6]. Были реализованы чрезвычайно интересные практические наработки в данном направлении [6,136,150,156,165,169,178,366,394], базирующиеся на вычислительных ***ОС***-моделях, из которых некоторые уже упоминались. Между тем, классические ***d-ОС*** достаточно громоздки для адекватного моделирования целого ряда *сложных* параллельных вычислительных устройств и алгоритмов. В этой связи нами был определен специальный *подкласс* ***d-ОС*** *с памятью* (***d-ОСП***), которые в определенной мере подобны параллельным вычислительным устройствам с памятью [1,3-5,68-72,88,90,536,593].

Каждый единичный автомат в структуре ***d-ОСП*** имеет конечную ***память*** глубиной ***P*** и может получать информацию непосредственно от своих соседей согласно индекса соседства ***X***. Память автомата представляет собой ***P***-позиционный регистр, состояниями каждой позиции которого являются элементы из алфавита $M = \{m_1, m_2, ..., m_k\}$ (рис. 7).

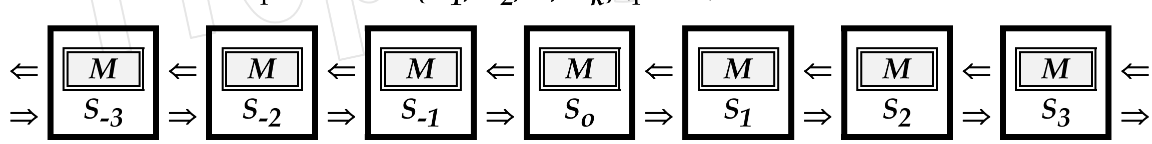


Рис. 7. Принципиальная организация одномерной ОС с памятью (1-ОСП).

Каждый автомат в ***d-ОСП*** может синхронно изменять свое состояние и содержимое ***M***-памяти в дискретные моменты $t > 0$ времени как функции предыдущих состояний ***(F)*** и содержимого ***(R)*** памяти автоматов своего шаблона соседства, определяемого индексом соседства ***X***. По нашему определению ***d-ОСП*** есть упорядоченная семерка $<Z^d,A,M,P,X,F,R>$, где Z^d, A, X определяются аналогично случаю классических ***d-ОС***, ***M*** – алфавит регистровой памяти ***P***-глубины, и ***F*** и ***R*** – упомянутые дискретные функции перехода. Функционирование данного единичного автомата структуры ***d-ОСП*** производится в дискретной шкале времени $t=1,2,3,4,5, \ldots$ согласно следующим дискретным уравнениям, а именно:

$$\begin{cases} S(z,t+1) = F(S_z^X(t), M(z,t)) \qquad S(z,t+1) \in A \\ M(z,t+1) = R(S_z^X(t), M(z,t)) \qquad M(z,t+1) \in M \end{cases} \tag{11}$$

где $z \in Z^d$ – произвольный *единичный* автомат структуры; $S(z,t) \in A$ – состояние ***z***-автомата; $S^X{}_z(t)$ – конфигурация *шаблона соседства* ***(ШС) z***-автомата и $M(z,t)$ – содержимое его ***M***-памяти в момент времени $t > 0$. Автомат структуры *дискретно* и *синхронно* изменяет свои ***S***-состояние и состояние ***M***-памяти в зависимости от состояний его ***M***-памяти и конфигурации состояний автоматов его шаблона соседства в предыдущий дискретный ***(t-1)***-момент времени.

На наш взгляд, структуры типа ***d-ОСП*** $(d \geq 1)$ вполне могут служить как формальной основой для моделирования в их среде целого ряда параллельных дискретных процессов и алгоритмов, так и представляют достаточно интересный самостоятельный формальный объект исследования. При этом, можно убедиться, что определенные таким образом ***d-ОСП*** представляют собой подкласс класса всех классических ***ОС***-моделей, для которых определена соответствующая двухуровневая структуризация состояния *единичного* автомата структуры – внутреннее ***S***-состояние и состояние его регистровой ***M***-памяти.

Действительно, каждая однородная структура ***d-ОСП*** $\equiv <Z^d,A,M,P,X,F,R>$, функционирование автоматов которой определяется системой дискретных уравнений ***(11)***, строго *эквивалентна* [5,53] соответствующей ей классической ***d-ОС*** $\equiv <Z^d,A^*,\tau^{(n)},X>$, для которой имеют место соотношения $A^*=A\mathrm{x}M^p$ и $\#(A^*)=ak^p$. Вместе с тем, подобная структуризация состояния единичного автомата в ***d-ОСП*** позволяет довольно эффективно решать на ***ОСП***-подобных моделях ряд специфических прикладных задач, прежде всего, связанных с исследованием ***ВТ*** высокопараллельного действия. И если в рамках общей теории классических ***d-ОС ОСП***-модели не представляют собой особого интереса, то структуризация состояний их автоматов (*подобно случаю рассматриваемых ниже* ***ОС*** *с рефрактерностью*) определяет для них новые весьма интересные прикладные возможности. В то же самое время на сегодня отсутствует достаточно развитая прикладная теория ***d-ОСП***.

Интересным подклассом ***d-ОСП*** являются структуры, определяемые следующими условиями: ***(1)*** алфавит ***M***-памяти совпадает с ***A***-алфавитом внутренних состояний единичного ***z***-автомата структуры; ***(2) M***-память ***P***-глубины имеет стэковую организацию; и ***(3)*** обновление текущего внутреннего состояния ***z***-автомата сопровождается одновременным помещением обновленного состояния в ***M***-стэк автомата, выталкивая самое раннее по времени хранящееся в нем состояние; ***(4)*** внутреннее состояние ***z***-автомата в момент $t>0$ является функцией конфигураций состояний его шаблона соседства и ***M***-стэка в момент времени ***(t-1)***. Формально функционирование такого типа ***d-ОС*** описывается системой дискретных уравнений следующего общего вида, а именно:

$$\begin{cases} \sigma^{(n+p)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n | m_1, m_2, m_3, \ldots, m_p) = x^*{}_1 \\ R^{(p)}(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_p) = Sh(x^*{}_1, m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{p-1}) \\ \sigma^{(n+p)}(0,0,0,\ldots,0|0,0,0,\ldots,0) = 0\,; \quad x_n, x^*{}_1, m_p \in A \\ R^{(p)}(0,0,0,\ldots,0) = Sh(x^*{}_1, 0,0,0,\ldots,0)\,; \quad (j=1..n;\ k=1..p) \end{cases} \tag{12}$$

Из уравнений *(12)* непосредственно следует, что ***ЛФП d-ОСП*** имеет (*относительно классической)* расширенный набор переменных *(на глубину **М-**стэка)***,** а ***R-***функция определяет модификацию ***М-***стэка путем его *сдвига* с последующим помещением в его начало нового состояние ***z-***автомата. Последние два уравнения системы ***(12)*** задают определяющие условия для ***0-***состояния «***покоя***» классической ***ОС-***модели с памятью.

В качестве весьма простого примера рассмотрим вопрос моделирования ***1-ОСП*** из этого класса с индексом соседства Неймана-Мура ***X={0,1,2}***, ***А-***алфавитом и ***М-***стэком *глубины* ***p*=2** посредством классической **2-*ОС*≡<*Z*^{2},*A**,τ$^{(r)}$,*X*>,** определяемой следующим образом.

(a)

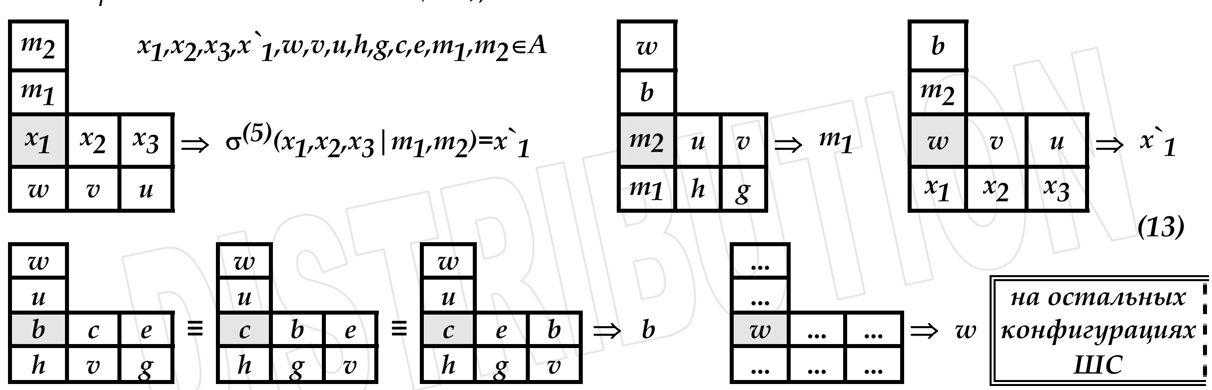
	♦:	□	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	□	
M:	m_2	□	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	□	
	m_1	□	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	□	
	КФ:	□	x_1	x_2	x_3	...	x_j	...	x_g	□	*t = 0*

(b)

Рис. 8. ШС (a) и начальная конечная КФ (b) моделирующей классической 2-ОС.

Алфавит ***A**** моделирующей структуры определяем как ***A*=A***∪{***b***} **(*b*∉*A*),** т.е. расширяем алфавит моделирующей структуры относительно моделируемой на один ***b-***символ. Индекс соседства ***X*** моделирующей структуры определяем в виде ***X*={*(0,0),(1,0),(2,0),(0,-1),(1,-1),(2,-1),(0,1),(0,2)*},** тогда как соответствующий ему шаблон соседства ***(ШС)*** представлен на рис. ***8.а.***

Локальную функцию перехода ***(ЛФП)*** *моделирующей* классической **2-*ОС*** определяем следующей системой *параллельных подстановок* ***(ПП),*** а именно:



Представляем начальную ***КФ*** *моделирующей* классической **2-*ОС*** в виде **(**рис. ***8.b*),** где: ***КФ-***строка определяет текущую конфигурацию внутренних состояний ***z-***автоматов моделируемой ***1-ОСП; М-***строки **(m_1,m_2)** определяют конфигурации состояний их стэковой памяти глубины ***p* = 2** и **♦-**строка выполняет *маркерные* функции **(***3 лежащие под ней строки описывают полную конфигурацию моделируемой* ***1-ОСП*).** Тогда нетрудно убедиться, что **(***оставляем это читателю в качестве довольно полезного упражнения***)**, используя ***ПП (13),*** последующая динамика определенной таким образом начальной ***КФ*** (рис. ***8.b)*** в полосе ***М-***строки и ***КФ-***строки будет пошагово (*строго в реальное время)* моделировать *динамику* соответствующей начальной ***КФ*** внутренних состояний и состояний ***М-***памяти исходной ***1–ОСП.*** Читателю предлагается апробировать вышепредставленный алгоритм моделирования *(полезный и в целом ряде других случаев)* в качестве достаточно полезного со многих точек зрения упражнения и убедиться в справедливости нижеследующего довольно несложного предложения, между тем, имеющего достаточно полезные приложения, а именно:

<u>Теорема 1</u>. Произвольная 1-ОСП ≡ <Z^1,A,M,P,X,F,R> при X={0,1,2, ..., n-1}; где Sh, R определяются системой уравнений вида (12) моделируется строго в реальное время классической структурой 2-ОС ≡ <Z^2, A∪{b}, τ$^{(2n+p)}$, X> (b∉A).

Данный результат обобщается и на общий ***d***-мерный случай, в чем мы предоставляем убедиться читателю. В качестве еще одного простого примера рекомендуется построить *динамику* на **15 .. 20** шагов некоторой начальной ***КФ*** при условии, что ***A***=$\{0,1\}$ и первое из уравнений ***(12)*** принимает следующий вид, а именно: $\sigma^{(5)}(x_1,x_2,x_3 \mid m_1, m_2) = \sum x_j + \prod m_k \ (mod\ 2)$.

3. Наряду с уже представленными ***d-ОСП*** в рамках классических ***d-ОС*** можно выделять также и специальный подкласс ***ОС***-моделей с рефрактерностью. Структура ***d-ОС*** с ***рефрактерностью (d-ОСР)*** представляет собой *классическую* ***d-ОС***, алфавит внутренних состояний которой особым образом структурирован $A=\{0,1\}\cup\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_r\}$ и чья ***ЛФП*** определена нижеследующей системой *параллельных* подстановок ***(ПП)***, назначение каждой из которых достаточно прозрачно и особых пояснений не требует ***(14)***. Структуры данного типа будем обозначать в виде ***d-ОСР(r,P)***, где ***r*** – глубина *рефрактерности*, ***P*** – порог *возбудимости* единичного ***z***-автомата структуры. Алфавит ***A*** внутренних состояний *структурирован* посредством присвоения его элементам нижеследующих характеристик состояния: ***покоя (0)***, ***возбуждения (1)*** и ***рефрактерности r-глубины*** $\{\omega_1,\omega_2, ..., \omega_r\}$. Если величина ***r*** постоянна, то имеют место структуры с *фиксированной глубиной рефрактерности*, в противном случае – с *переменной*. В целом ряде весьма важных приложений вполне естественно рассматривать глубину переменной рефрактерности ***d-ОСР(r,P)*** в зависимости от величины ***P***-порога возбуждения ***z***-автоматов структуры, т.е. ***r = r(P)***. Ряд довольно интересных результатов в данном направлении можно найти, например, в работах [88,90,536] и указанных в них ссылках.

$$\begin{cases} \sigma^{(n)}(\omega_k, x_2, ..., x_n) = \omega_{k+1} \\ \sigma^{(n)}(\omega_r, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \sigma^{(n)}(1, x_2, ..., x_n) = \omega_1 \\ \sigma^{(n)}(0, x_2, ..., x_n) = 1 \Leftrightarrow \left(\sum_{x_j=1} x_j \ge P\right) \end{cases} \qquad (14)$$

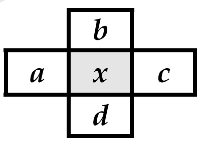
$$x_j \in A,\ k = 1..(r-1);\ j = 2..n$$

Суть ***рефрактерности r-глубины*** состоит в том, что возбужденный ***(в 1-состоянии)*** в момент ***t ≥ 0*** единичный ***z***-автомат структуры, в течение последующих ее ***r***-шагов (*период* ***рефрактерности)*** будет находится в состоянии рефрактерности, переходя с одного ***r***-уровня рефрактерности на другой. По истечении периода рефрактерности ***z***-автомат переходит в ***0***-состояние *покоя*, вновь становясь восприимчивым для последующего возбуждения.

В качестве простого примера использования ***d-ОСР(r,P)*** рассмотрим модель *Гринберга-Гастингса*, симулирующую возбудимые среды. С возбудимыми средами мы имеем дело в ряде различных ситуаций. Например, нерв или мышечная ткань, которые могут находиться в состоянии ***покоя***, *возбужденном состоянии*, сопровождаемом затем состоянием *рефрактерности* (*невосприимчивости)*. Данная последовательность состояний имеет место, например, в сердечной мышце, в случае при прохождении волны возбуждения через сердце при каждом его биении. Другой пример – пожар в степи либо лесном массиве. В этой модели каждый участок леса или степи может быть в одном из нескольких состояний, а именно: *горения*, *сожженный*, *восстановления* и, наконец, в состоянии, *доступном* для нового возгорания. Имеется также множество химических систем, включающих некоторую форму автокатализа, которые проявляют *возбудимое* поведение. Наиболее известные из них – реакция *Белоусова-Жаботинского* и реакции при гетерогенном катализе.

Модифицированные ***ОСР***-модели достаточно успешно используются в медико-биологических исследованиях, в частности, при разработке методов обработки временных и пространственных характеристик процессов в медицинских диагностических системах. Ввиду немалой сложности изучаемых систем их эволюция обычно представляется в форме дискретных пространственно-временных координатах *(класс* ***ОСР****-моделей)* с последующим компьютерным моделированием. В одной из таких моделей состояние элемента ***(x,y)*** в момент времени ***t=n*** описывается величиной энергии ***Z(x,y).*** Если эта величина не превышает некоторый критический уровень ***Z*,*** то элемент считается устойчивым, в противном случае элемент переходит в некое возбужденное состояние и в следующий момент времени ***t = n+1*** он отдает по единице энергии окружающим его соседям. Объектом исследования на данной модели являются *биомедицинские* электрокардиографические сигналы, обычно используемые в функциональной диагностике состояния сердечно-сосудистой системы организма [536].

Смоделируем с целью простоты систему *Гринберга-Гастингса* ***ОС****-*моделью с рефрактерностью с тремя состояниями, а именно состояниями: *покоя* **(0)**, *возбуждения* **(2)**, *рефрактерности* ***(1).*** Данная ***ОС****-*модель будет иметь размерность **2**, глубину рефрактерности ***1***, индекс соседства Неймана и алфавит ***A***={***0,1,2***} внутренних состояний единичного автомата структуры с рефрактерностью.



$$\rightarrow x^* = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x = 1 \ \text{or} \ 2 \notin \{a,b,c,d\} \\ 1, & \text{if} \quad x = 2 \\ 2, & \text{if} \quad 2 \in \{a,b,c,d\} \end{cases} \qquad (\psi)$$

Приведем фрагмент динамики такой модели *Гринберга-Гастингса* для начальной конфигурации ***(t=0)***, содержащей один автомат в *рефрактерном* состоянии ***(1)***, тогда как все остальные автоматы его шаблона соседства находятся в *возбужденном* состоянии ***(2).***

	2	
2	1	2
	2	

		2		
	2	1	2	
2	1		1	2
	2	1	2	
		2		

			2			
		2	1	2		
	2	1		1	2	
2	1				1	2
	2	1		1	2	
		2	1	2		
			2			

				2				
			2	1	2			
		2	1		1	2		
	2	1				1	2	
2	1						1	2
	2	1				1	2	
		2	1		1	2		
			2	1	2			
				2				

t = ***0*** ***1*** ***2*** ***3***

Динамика модели представлена *3* шагами для ***t=1,2,3,*** из которых довольно легко усматривается распространение фронта возбуждения в заданной ***ОС****-*модели. Естественно, характер динамики распространения возбуждений в этой модели определяется такими ее параметрами как: шаблон соседства, глубина рефрактерности ***(r)***, алфавит внутренних состояний, локальная функция $\sigma^{(5)}$ перехода и начальная ***КФ.*** Для анализа подобных ***ОС****-*моделей достаточно эффективным нам представляется их компьютерное симулирование, для чего уже имеется целый ряд интересных программных средств, рассматриваемых в книге несколько ниже. В данной связи определенный интерес представляет программа ***VR***, созданная в ИМПБ РАН (*Пущино)* и предназначенная для симулирования возбудимой среды *Винера-Розенблюта*, образованной ***ОСР****-*моделями [536,593].

Одной из наиболее известных реализаций ***ОСР****-*модели является «*мозг Брайена*», предложенная ***Б. Силверманом*** в ***1984*** и являющаяся упрощенной аналогией нервной ткани. В данной модели единичные автоматы допускают лишь *3* состояния: ***0*** (*покой)*, **1** (*возбуждение)* и **2** (*рефрактерность*), тогда как локальная функция перехода $\sigma^{(9)}$ весьма проста – автомат в ***0****-*состоянии возбуждается, если точно **2** из его соседей находятся в состоянии «***1***». После возбуждения на следующем шаге автомат переходит в состояние рефрактерности ***(2)*** перед восстановлением состояния покоя ***(0).*** Хотя данное правило и относительно старо, систематически оно никогда не исследовалось. При этом, оно является настолько динамичным, что в модели весьма не просто создавать устойчивые конфигурации. Только в ***1999 г. М. Свеней*** обнаружил первые осцилляторы. В настоящее время предложен ряд модификаций данной модели и получены их весьма интересные динамические характеристики [536].

Из *фундаментальных* же свойств ***ОС-***моделей с *рефрактерностью* следует отметить наличие в них *неконструируемых конфигураций* ***(НКФ),*** рассматриваемых нами детальнее несколько ниже и суть которых состоит в том, что они могут существовать лишь в момент времени ***t=0*** и не могут быть сгенерированы структурой ни из какой начальной *конечной* или *бесконечной* ***КФ.*** В случае нашей ***ОС-***модели с рефрактерностью в качестве ***НКФ*** выступает уже простая ***КФ c2,*** у которой только один автомат находится в состоянии ***«2»,*** тогда как все остальные автоматы структуры находятся в состоянии ***«покоя» (0).*** Действительно, предположим, что ***КФ c2*** не является ***НКФ,*** т.е. для нее существует ***КФ*** c_o такая, что $c_o\tau^{(5)}=c2$. Но согласно ***ЛФП*** структуры ***(ψ)*** автомат в состоянии ***«2»*** может возникнуть только тогда, если до этого по меньшей мере хоть один из его соседей имел в предыдущий момент времени состояние ***«2»,*** тогда как сам он в этом состоянии не был. Но тогда уже *ближайшее* окружение автомата не было бы *нулевым*, т.к. автомат из состояния ***«2»*** переходит в состояние ***«1»,*** что противоречит нашему предположению. Поэтому ***КФ c2*** является ***НКФ,*** т.е. ***c2*** может существовать в структуре лишь в начальный момент времени ***t=0.*** Читателю в порядке упражнения рекомендуется обнаружить и другие ***НКФ*** в данной классической ***ОСР-***модели.

Принцип функционирования ***ОСР-***моделей хорошо иллюстрирует следующий весьма простой пример ***1-ОСР*** с *глубиной рефрактерности* ***r=2,*** *порогом возбудимости* ***P=2*** единичного ***z-***автомата структуры и индексом соседства ***X = {0,1,2,3},*** т.е. его алфавит ***A*** состояний структурирован как $A=\{0,1\}\cup\{\omega_1,\omega_2\}$. Для такого вида ***1-ОСР*** локальная функция перехода определяется следующей системой ***ПП,*** аналогичной системе ***(14),*** а именно:

$$\begin{cases} \sigma^{(4)}(1, x_1, x_2, x_3) = \varpi_1 \\ \sigma^{(4)}(\varpi_1, x_1, x_2, x_3) = \varpi_2 \\ \sigma^{(4)}(\varpi_2, x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \sigma^{(4)}(0, 0, 0, 0) = 0 \\ \sigma^{(4)}(0, x_1, x_2, x_3) = 1 \Leftrightarrow (\sum\limits_{x_j=1} x_j \geq 2) \end{cases} \tag{15}$$
$$x_j \in B = \{0, 1\}; \quad j = 1..3$$

Используя сказанное, а также и систему подстановок вида ***(15),*** нетрудно убедиться в генерации таким образом определенной ***1-ОСР*** следующей последовательности конфигураций, а именно:

Генерируемая посредством 1-ОСР последовательность КФ																	***t***
Начальная конфигурация ⇒									□	□	***1***	***1***	***0***	***1***	***1***	□	***0***
....	....	....	....	....	....	....	□	□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	***1***	ω_1	ω_1	□	***1***
....	....	....	....	....	□	□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	ω_1	ω_2	ω_2	□	***2***
....	....	....	□	□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	***0***	***0***	ω_2	□	□	□	***3***
....	□	□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	□	***Пассивная (не меняющаяся со***							***4***
□	***1***	***1***	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	□	□	□	***временем) конфигурация***							***5***

В качестве весьма полезного упражнения читателю рекомендуется рассмотреть также и другие примеры ***ОС-***моделей с рефрактерностью***.*** Структуры данного типа (судя уже по их названию) представляют большой интерес в качестве весьма удобной среды моделирования целого ряда биомедицинских процессов. Введенные ***d-ОСР*** могут служить формальной моделью для целого ряда интересных объектов, включая изучение процессов самоорганизации в системах клеточной природы и распространения активности в формальных нейроноподобных сетях [3,5,33]. Однако наибольший интерес, между тем, представляют исследования распространения возбуждений в зависимости от таких показателей, как типа рефрактерности, ее глубины, порога возбудимости, наличия дефектных автоматов в структуре и начальной конфигурации ее активной области. В данном направлении получен целый ряд интересных общих теоретических результатов [1,3,54], однако неизученными остались более тонкие свойства ***d-ОСР(r,P)***. Поэтому для эмпирического исследования ряда динамических свойств ***2-ОСР(r,P)*** была создана специальная симуляционная программа [6,15,46], позволившая получить целый ряд интересных эмпирических результатов, среди которых можно отметить следующие, а именно:

♦ В ***2-ОСР(r,P)*** существуют самовоспроизводящиеся в смысле Мура области достаточно сложной конфигурации активных (*возбужденных*) единичных автоматов;

♦ глубина рефрактерности ***(r)*** довольно существенно влияет на распространение активности в ***2-ОСР(r,P)***. Например, ряд самовоспроизводящихся при ***P=2, r=2,3*** областей активности при ***r=4*** становятся *исчезающими* (*затухающими*), переходящими в нулевые конфигурации;

♦ в ***2-ОСР(r,P)*** из целого ряда начальных конечных конфигураций при ***P=2, r=2,3*** генерируются самоусложняющиеся области активности, которые при ***r=4*** становятся *затухающими*;

♦ фронты распространения активности в ***2-ОСР(r,P)*** задерживаются «*решетом*» из дефектных автоматов, размер ячеек которого меньше ***P***, и продолжает распространяться при размере ячеек не меньшем, чем ***P***;

♦ в ***2-ОСР(r,P)*** области активности, достаточно плотно упакованные автоматами в *возбужденном* состоянии, могут, между тем, на своих границах расширяться при затухании активности внутри самой области;

♦ в классе всех периодических областей активности существуют начальные области активности, которые, начиная с некоторого шага ***k***, становятся *периодичными* с периодом ***c = 3*** и ***k ≥ h***, где ***h*** – размер стороны минимального квадрата, содержащего начальную область активности единичных автоматов в структуре ***2-ОСР(r,P)***.

При *переменной* же глубине рефрактерности картина распространения активности в ***2-ОСР(r,P)*** существенно усложняется и требует для эффективного исследования высокопроизводительных ЭВМ класса супер-ЭВМ или ЭВМ, базирующихся на вычислительных ***ОС***-моделях, в частности, упоминаемых выше ЭВМ типа ***САМ*** [150,165]. Ниже относительно класса структур ***d-ОСР*** будет представлен ряд результатов и теоретического плана.

ОСР-модели находят все более широкое практическое применение. В частности, на примерах некоторых алгоритмов моделирования распространения волн возбуждения в *миокарде* показана также возможность применения метода ***ОСР*** для моделирования движения волн возбуждения в однородных изотропных средах. При этом, для моделирования волновых процессов в активных средах предложена сеть *нейронных клеточных автоматов* ***(НКА)***, представляющих собой модель формальных нейронов. Данный периодически генерирующий импульсы автомат и имитирует деятельность биологического нейрона. Состояние подобного ***НКА*** характеризуется функцией мембранного потенциала и порогового значения мембранного потенциала. При этом, методы анализа данных сетей позволяют выбирать параметры модели так, чтобы она имела *аттрактор* типа «*ведущего центра*». Сети ***НКА*** могут оказаться удобным аппаратом симуляции для довольно широкого разнообразия колебательных явлений [9,536]. С рядом других интересных вопросов, относящихся к ***ОСР***-проблематике, можно ознакомиться в интересных работах [54,88,90,134,159, 160,166,167,187,198,201,205,255,301,308,333,346,360,536].

4. Как следует из вышесказанного, классические ***d-ОС*** обладают вполне приемлемой степенью общности, допускают достаточно широкий диапазон приложений и широко используются для моделирования многих параллельных дискретных процессов в их динамике [1,3,5,8-10,12,15,23, 27,32-34,46-58,64-67,80-90,121,135,138,146,147,149-152,154,156,157,159-161,165-167,175-179,184-188,201, 213-219,285,298,308,318,329,354,360,366,378,384-388]. В этом отношении динамическое поведение модели некоторого процесса, объекта или феномена, погруженной в классическую ***d-ОС***, можно представлять собственной динамикой развития некоторой начальной ***КФ*** (*одной либо нескольких*) $c_o \in C(A,d,\phi)$, где *динамика* определяется некоторой ***КФ***-последовательностью $<c_o>[\tau^{(n)}]$ конечных конфигураций. При этом, классические ***d-ОС*** представляются достаточно формализованными объектами исследования как методами современной и классической математик, так и методами арсенала собственного сформировавшегося аппарата. В то же время в прикладном отношении классическое понятие ***d-ОС*** оказывается в целом ряде случаев неудобным при моделировании достаточно сложных дискретных процессов и объектов. Само такое моделирование (*по сути дела низкого уровня параллельное символьное программирование*) становится сложным, малообозримым и неэффективным. При этом, сама сущность ряда моделируемых процессов настоятельно требует модификации классического понятия ***d-ОС***. С этой целью нами и был определен специальный класс структур (*в дальнейшем обозначаемых как* ***d-ОС****) [3,5,15,41], до некоторой степени подобных нейронным сетям либо нервным тканям, а также достаточно хорошо отражающим сам принцип функционирования многих типов электронных систем.

Структуры ***d-ОС**** довольно хорошо отвечают как основным общим требованиям и положениям в биологии развития на клеточном уровне, так и принципам функционирования параллельных вычислительных систем. Действительно, общепринято, что клеточное взаимодействие является основой развития многоклеточных организмов. Все аспекты развития многоклеточных систем в основе своей содержат межклеточные взаимодействия, механизм которых достаточно сложен и многогранен. Однако целый ряд его очень важных феноменов может вполне удовлетворительно моделироваться распространением специальных *управляющих импульсов* в структурах ***ОС****-типа. На основе структур ***d-ОС**** можно существенно более адекватно моделировать также феномены морфогенетических полей, которые в настоящее время очень активно исследуются в различных аспектах. Более того, современные идеи и гипотезы в биологии развития [1,4,5,33,90,264,330-334] весьма определенно указывают на перспективность использования структур ***d-ОС**** и в качестве формальной среды моделирования многих феноменов из данной и близких к ней прикладных областей [88,90,536].

В частности, структуры ***d-ОС**** представляют собой довольно удобную среду для моделирования целого ряда биологических процессов и феноменов таких как нейроноподобные сети, процессы в молекулярных жидкостях и мембранах, развитие популяций на клеточном и индивидуальном уровнях, миграции, симулирование различных кооперативных феноменов, различного класса возбудимые среды и др. [4,27,31,134,137,159,167,172,190,198,201-205,264,330-334]. При этом, многие из перечисленных аспектов лежат и в основе создания нейрокомпьютеров [8,9,354,374], образуя одну из важнейших составляющих интерфейса между биологическими и вычислительными науками [4,15,45,47,50,90]. Перспективным представляется использование ***ОС****-моделей и в ряде других важных областей [1,3-5,8,9,11,26,27,31,33,36,45,46,90,134-139,146-152,155-167,176-179,184-189, 330-334]. И в качестве модели возбудимых сред структуры ***d-ОС**** обеспечивают их важнейшую характерную черту – возможность передачи управляющих импульсов на произвольной длины расстояния и с нужными скоростями, что дает возможность создавать различные рода волновые фронты распространения возбуждений в моделирующей среде. Более детальное рассмотрение данного класса структур можно найти в наших книгах [1,3-5,8,9,15,88,90,536].

Введя понятие ***d-ОС****, мы не только получаем намного более удобный относительно *классических* структур аппарат моделирования, но также достаточно удобное средство реализации *принципа* *локального действия* ***(ПЛД)***, используемого в высокопараллельных вычислительных системах. И действительно, характер функционирования ***ОС****-моделей определяет более индивидуальное поведение единичного автомата в структуре, что позволяет легче реализовывать ***ПЛД*** и в более значительной степени напоминает функционирование *однородных вычислительных систем* и *сред* ***(ОВС)***, если проводить ассоциацию внутренних состояний единичных автоматов структуры с выполняемыми программами в узлах ***ОВС***, а импульсы структуры – с управляющими потоками информации в системе, среде.

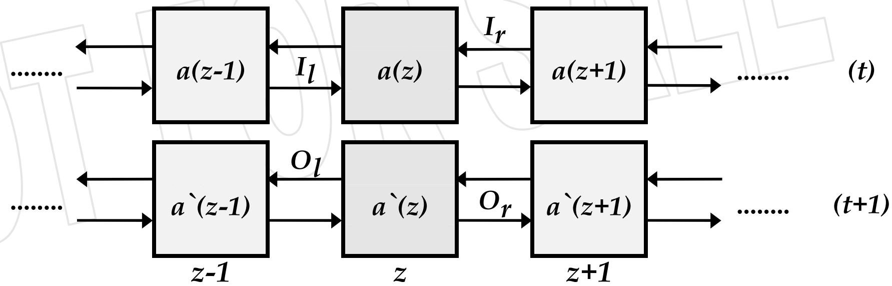


Рис. 9. Принципиальная схема функционирования однородной структуры типа 1-ОС*.

Содержательно такого типа структуры определяются следующим образом. Каждый единичный автомат ***d-ОС**** может получать информацию непосредственно от своих ближайших соседей и может синхронно изменять свое внутреннее состояние, испуская свои управляющие импульсы в дискретные моменты времени $t>0$ как некая функция своего текущего внутреннего состояния и входных управляющих импульсов. Структуры такого класса оказываются очень удобной средой моделирования и описания многих интересных дискретных процессов, позволяя легко получать довольно прозрачную картину информационных потоков, управляющих функционированием погружаемых в ***d-ОС**** моделей и параллельных алгоритмов. Данная картина может быть весьма полезной и при анализе достаточно глубоких свойств моделей, реализуемых соответствующими функциональными алгоритмами ***d-ОС****. Не нарушая общности и более формально, определим структуры ***d–ОС**** для наиболее простого одномерного случая (*см. выше рис.* ***9***). Между тем, этого класса структуры намного проще остальных обобщаются на произвольную ***d***–размерность.

Структура ***1-ОС**** есть упорядоченная четверка $<Z^1, A, I, Fa>$, где первые две компоненты объекта определяются аналогично случаю классических ***1-ОС***, ***I*** – множество управляющих импульсов и ***Fa*** – функциональный алгоритм ***(ФА)*** структуры. Сам функциональный алгоритм ***Fa*** структуры определяется следующими дискретными уравнениями, а именно:

$$\begin{cases} a^1(z)_{t+1} = S[I_r, a(z), I_l]_t \\ (O_r)_{t+1} = R[I_r, a(z), I_l]_t \\ (O_l)_{t+1} = L[I_r, a(z), I_l]_t \end{cases} \qquad a^1(z), a(z) \in A; \;\; O_r, O_l, I_r, I_l \in I\,;\; t = 0,1,2,\ldots \tag{16}$$

где $a^1(z)$ и $a(z)$ – состояния; I_r (O_r) и I_l (O_l) – соответственно правые и левые входные (*выходные*) управляющие импульсы ***z***-автомата структуры. Сама суть функционирования таким образом определенной ***1-ОС**** довольно проста и сводиться к следующему (рис. ***9***). Находясь в состоянии $a(z)$ и получив на входе управляющие импульсы I_r (*справа*) и I_l (*слева*) в момент времени $t \geq 0$, в следующий момент времени ***(t+1)*** ***z***-автомат структуры переходит в состояние $a^1(z)$ и испускает управляющие импульсы O_r (*вправо*), O_l (*влево*), определяемые согласно уравнениям системы ***(16)***. При этом, выходные импульсы каждого ***z***-автомата являются входными импульсами для всех его непосредственных соседей. Итак, множество ***I*** импульсов подразделяется в общем случае на два различных подмножества выходных влево ($0ut_l$) и выходных вправо ($0ut_r$) импульсов; при этом, относительно же текущего ***z***-автомата структуры удобно условно классифицировать выходные импульсы на *входные* (*поступающие в z-автомат от его соседей*; $In^z{}_l$, $In^z{}_r$) и *выходные* (*передаваемые z-автоматом его соседям*; $0ut^z{}_l$, $0ut^z{}_r$). Более того, между обоими типами индексов имеют место очевидные соотношения: $0ut^z{}_r \equiv In^{z+1}{}_l$, $0ut^z{}_l \equiv In^{z-1}{}_r$, $In^z{}_l \equiv 0ut^{z-1}{}_r$, $In^z{}_r \equiv 0ut^{z+1}{}_l$. Очевидно, если входные импульсы для *z*-автомата совпадают с внутренними состояниями соответствующих им ближайших соседей ***(z-1,z+1)***, а выходные импульсы с его внутренним состоянием, то структуры ***1-ОС**** и классическая ***1-ОС*** с индексом соседства Мура тождественны и имеет место $I \equiv A$, $I \cup A = A$. Следовательно, ***d-ОС**** представляют собой эквивалентную модификацию классических ***d-ОС***, значительно более приспособленную для рассмотрения целого ряда прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики. И примеры конкретного применения ***ОС****-моделей подтвердили их достаточно высокую эффективность, прежде всего, с прикладной точки зрения [54-56,88,90,536].

При использовании структуры ***d-ОС**** мы не связаны теми ограничениями, имеющими место в случае классических структур; сам способ функционирования ***d-ОС**** позволяет сфокусировать наше внимание на *сущности* самих моделируемых объектов, сведя к минимуму дополнительные сложности программирования модели в ***ОС****-среде, а саму модель делают существенно удобнее интерпретируемой. Показано, что ***d-ОС**** можно успешно использовать в качестве приемлемого промежуточного этапа при моделировании в *классических* структурах и при исследованиях ряда вопросов их динамики [3,5,9,12,88]. В основу такого подхода положен тот факт, что любая ***d-ОС**** *конструктивно* погружаема в классическую структуру. В частности, показано, что: ***Произвольные 1-ОС**** $\equiv \langle Z^1,A,I,Fa \rangle$ ***эквивалентны классическим структурам 1-ОС*** $\equiv \langle Z^1,A \cup I,\tau^{(7)},X \rangle$ ***с индексом соседства*** $X=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ [1,3,5]. В качестве полезного упражнения читателю рекомендуется в этом убедиться самому, а также обобщить данный результат и на общий ***d***-мерный случай. Для доказательства в случае структуры ***1-ОС**** достаточно ***КФ*** моделирующей ее классической ***1-ОС*** представить в следующем виде, а именно:

………	$a(z-1)$	$0ut^{z-1}{}_r$	$0ut^z{}_l$	$a(z)$	$0ut^z{}_r$	$0ut^{z+1}{}_l$	$a(z+1)$	………
………	-3	-2	-1	0	1	2	3	………

Действительно, для этого вполне достаточно каждый *z*-автомат моделируемой ***1-ОС**** окружить автоматами, состояния которых симулируют соответственно его левый ($0ut^z{}_l$) и правый ($0ut^z{}_r$) выходные импульсы, которые для соседних ему автоматов ***z-1*** и ***z+1*** будут выступать как *входные* импульсы и наоборот соответственно. Так, например, единичные автоматы *моделирующей* ***1-ОС*** в позициях ***1*** и ***2*** представляют для *z*-автомата соответственно его выходной и входной импульсы *справа*, тогда как для единичного ***(z+1)***-автомата они будут представлять соответственно входной и выходной импульсы *слева*.

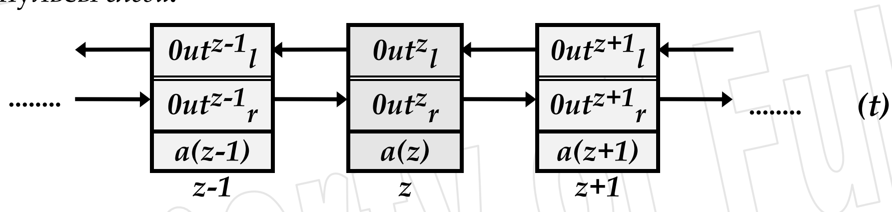


Рис. 10. Принцип организации классической 1-ОС, моделирующей сруктуру 1-ОС*.

Используя вышеуказанный подход и представляя состояния моделирующей классической ***1-ОС*** в *структурированном* виде (рис. ***10***), довольно несложно убедиться в справедливости следующего результата, а именно:

__Теорема 2__. ***Любая структура 1-ОС**** $\equiv \langle Z^1,A,I=0_l \cup 0_r,Fa \rangle$ ***моделируется в строго реальное время классической 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура*** $X=\{-1,0,1\}$, ***алфавитом*** $A^*=A \cup 0_l \cup 0_r$, ***где*** 0_l ***и*** 0_r ***– множества выходных импульсов автоматов 1-ОС* соответственно влево и вправо.***

Проверку этого результата предоставляем читателю в качестве довольно полезного упражнения. Наряду с отмеченными получен ряд и других результатов по эквивалентности *(включая строгую)* ***OC*-*** и классических ***OC*-моделей; в частности, размерности и индексы соседства обоих классов структур совпадают, тогда как алфавит ***A**** внутренних состояний автоматов классической ***d-OC*** является объединением ***(A* = A∪I)*** алфавитов ***A*** и ***I*** структуры ***d-OC*.*** В любом случае уместно отметить то обстоятельство, что для теоретического исследования *формальной клеточной* модели более предпочтительны классические ***d-OC***, тогда как структуры ***d-OC**** представляют во многих отношениях более приемлемую среду для моделирования конкретных объектов, т.е. оба класса структур представляют собой как бы две различные стороны классической клеточной модели параллельной обработки информации [5,88,90,536].

Проиллюстрируем ряд возможностей ***OC*-***моделей на примере решения достаточно известной *проблемы ограниченного роста* ***(ПОР)***, являющейся типичным представителем минимаксных задач в ***ТОС-***проблематике. Исследование динамики последовательностей $<c_o>[\tau^{(n)}]$, симулирующих историю развития некоторой погруженной в ***OC*** модели, включает в целом ряде случаев такой важный вопрос, как наличие в таких последовательностях ***пассивных КФ (ПКФ)***, т.е. ***КФ c****, для которых имеет место следующее соотношение $c^*\tau^{(n)}=c^*$. Ряд авторов [1,131,190,536] исследовали проблему, состоящую в определении классических ***OC-***моделей, позволяющих генерировать из достаточно простых начальных ***КФ ПКФ*** максимально возможного размерова в зависимости от размера шаблона соседства структуры.

Своего рода экстремальной задачей, связанной с ***ПКФ***, явилась и задача *Гайского-Ямада* [5,88,191], состоящая в установлении максимально возможного размера ***ПКФ***, генерируемых *классическими* ***d-OC*** из некоторой простой начальной ***КФ***, но без акцента связи ее размера с размером шаблона соседства структуры. Данная задача в определенном смысле явилась распространением весьма известной задачи Радо [192] на случай классических ***d-OC***. Заинтересованный читатель сможет обратиться к работе [191], содержащей не только результаты по *нижним* оценкам размеров таких ***максимальных ПКФ*** в терминах различных основных параметров ***d-OC***, но также и достаточно интересные обсуждения биологически мотивированных интерпретаций, полученных в данном направлении результатов. Ряд интересных вопросов выращивания цепочек автоматов заданной длины можно найти также в работах [5,195,536].

Здесь же мы рассмотрим так называемую *проблему ограниченного роста* ***(ПОР)*** в классических ***OC-***моделях, имеющую самое непосредственное отношение к проблеме *Гайского-Ямада*, классу задач минимакса в ***ТОС-***проблематике и представляющую несомненный гносеологический интерес с точки зрения развивающихся клеточных систем различной природы. На самом деле чисто рост реальных биологических систем ограничен, строго контролируем и зависит от генетических и ряда внешних факторов. Более того, ***ПОР*** имеет и значительное познавательное значение, ибо позволяет нам в определенной мере оценивать то количество информации, которое требуется для выращивания сложных многоклеточных организмов [536].

Учитывая и затруднения технического характера, возникающие при погружениях достаточно сложных алгоритмов в *классические* ***OC-***модели, нами для решения ***ПОР*** был выбран класс ***OC*-***моделей, определенных выше. Действительно при использовании ***OC*-***моделей мы оказываемся не связанными теми ограничениями, которые имеют место для случая классических структур, а сам принцип функционирования ***OC*-***моделей позволяет полностью сфокусировать внимание исследователя на самой сущности моделируемого процесса либо алгоритма, сводя к минимуму дополнительные сложности погружения исследуемой модели в структуру. Более того, любая ***d-OC****, как мы показали, конструктивно погружаема в классическую ***d-OC***, что позволяет итоговые результаты исследования вполне адекватно интерпретировать в контексте ***OC-***моделей. Теперь определим ***ПОР***, не нарушая общности, для класса наиболее простых структур типа ***1-OC*.***

Задается конечная ***КФ*** c_o длины r состояний единичных z-автоматов в ***1-ОС**** следующего вида c_o=□*SSS...SSS*□ при $|c_o|=r$. Тогда ***ПОР*** сводится к определению функционального алгоритма ***Fa*** структуры, позволяющего вырастить из исходной c_o-***КФ*** пассивную ***КФ*** вида ***c* = □*FFFF ... FFFF*□** максимально возможного размера $L=L(c_o,Fa)$. Наилучшим известным на сегодня решением ***ПОР*** является следующий основной результат [3,5,9,41,56,88].

<u>Теорема 3</u>. Для структур 1-ОС*≡<Z¹,A,I,P> со значениями #A=12 и #I=4m+17, где m – возможно минимальная скорость распространения управляющих импульсов в структуре, существует P-функциональный алгоритм, позволяющий выращивать c-КФ длины L единичных z-автоматов в состояниях «F» из начальной конечной конфигурации c_o длины r, где величина L определяется следующими рекуррентными соотношениями, а именно:

$$L = r(2m+1)^{\sum_{j=0}^{n} \varpi_j^2 + 2(2^r+1)}, \quad \varpi_0 = 2^{4rm(m+1)}, \quad \varpi_j = 2(L_j - r)$$
$$L_1 = r(2m+1)^{\varpi_0^2+2}, \qquad L_j = L_{j-1}(2m+1)^{2^{2^{2L_{j-1}+2}}+2} \tag{17}$$

Для выращивания указанной длины финальной КФ единичных z-автоматов функциональному P-алгоритму требуется t=]3/2+1/2m[*L шагов структуры класса 1-ОС*.

Здесь мы приведем неформальное описание сути реализации одного такого функционального алгоритма ***1-ОС****, решающей ***ПОР***. Для решения ***ПОР*** определяем структуру ***1-ОС*≡<Z¹,A,I,Fa>*** с $A=\{F,0,A_k^i,B_k^i,0`,0``\}$, $\#I=4m+17$ и начальной ***КФ*** вида c_o=□* $A_0^0A_0^0A_0^0\ldots A_0^0$□* внутренних состояний автоматов структуры. Будем говорить, что импульс $\overleftarrow{\alpha}$ имеет *глубину* активности m, если он и его модификации за время $t=m$ проходят через m автоматов структуры, а m-й автомат переводят в состояние p^*, если до того он был в p-состоянии. Затем автомат ***1-ОС****, находящийся в состоянии p^*, вновь испускает $\overleftarrow{\alpha}$-импульс, переходя вновь в p-состояние, и так далее. Очевидно, импульс с m-*глубиной* активности распространяется в структуре ***1-ОС**** со скоростью $v=m/(m+1)$. Импульсы с бесконечной глубиной активности, между тем, распространяются со скоростью $v=1$. С учетом данных замечаний схематично алгоритм функционирования ***1-ОС****, решающей ***ПОР***, сводится к следующему, а именно.

В момент времени $t=0$ z-автоматы структуры, помеченные ★-*маркером* (рис. ***11***), испускают две пары импульсов $(\overleftarrow{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)$ и $(\overleftarrow{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1)$. Импульсы $(\overleftarrow{\alpha}_2,\vec{\alpha}_2)$ распространяются в противоположных направлениях со скоростью $v = 1$, а импульсы $(\overleftarrow{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1)$ – со скоростью $v = m/(m+1)$. Необходимая скорость распространения управляющих импульсов в структуре обеспечивается их m-глубиной активности, посредством введения дополнительных импульсов (*их модификаций*) и внутренних состояний структуры.

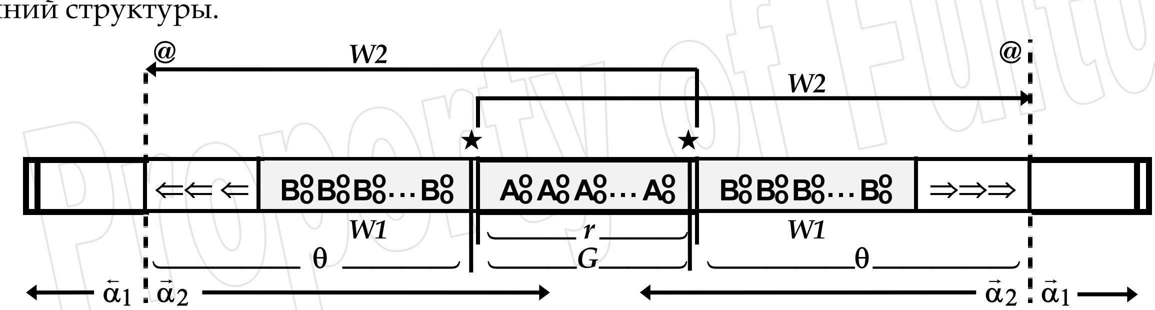


Рис. 11. Иллюстрация принципа реализации функционального Fa-алгоритма в 1-ОС*.

При своем прохождении в структуре импульсы $(\overleftarrow{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1)$ формируют активирующие волны ***W1***, распространяющиеся в противоположных направления со скоростью $v1=m/(m+1)$, переводящие все встреченные *z*-автоматы структуры в B_0^0-состояние. Тогда как импульсы $(\overleftarrow{\alpha}_2,\overrightarrow{\alpha}_1)$ образуют *активирующие* волны ***W2***, распространяющиеся в противоположных направлениях со скоростью ***v2=1***. В @-точках встречи импульсов $(\overleftarrow{\alpha}_2,\overleftarrow{\alpha}_1)$ и $(\overrightarrow{\alpha}_2,\overleftarrow{\alpha}_1)$ вновь формируются две пары импульсов $(\overleftarrow{\alpha}_1,\overrightarrow{\alpha}_2)$ и $(\overleftarrow{\alpha}_2,\overrightarrow{\alpha}_1)$ (рис. *11*). Более того, импульс $\overleftarrow{\alpha}_2$, распространяясь по структуре, на верхних индексах A_k^i-состояний ее автоматов реализует довольно простой алгоритм сложения по (*mod* **2**). Этот алгоритм может быть легко реализован посредством введения нескольких дополнительных управляющих импульсов. Суть его состоит в сложении содержимого, представленного *верхними* (*нижними*) индексами A_k^i-состояний единичных автоматов ***1-ОС**** с единицей по (*mod* **2**); данные алгоритмы сложения будем обозначать соответственно как $S(A_k^i)_i$ и $S(A_k^i)_k$.

Полная реализация ***S***-алгоритма на *верхних* и *нижних* индексах A_k^i-состояний автоматов может быть представлена как $S(A_k^i)_{ik} = S(A_k^i)_i\ S(A_k^i)_k$ и требует для этого $t = 2^{2r}$ времени, где r – число *z*-автоматов структуры, отведенных под ее начальную ***co-КФ*** (рис. *11*). Упомянутый алгоритм $S(A_k^i)_{ik}$ начинает свою работу на нулевых индексах и завершает ее также на нулевых индексах, что приводит нас к конфигурации следующего вида, а именно:

$$c_1=\square\bigstar\ B_0^0B_0^0B_0^0\dots B_0^0\ \underbrace{A_0^0A_0^0A_0^0\dots A_0^0}_{r}\ B_0^0B_0^0B_0^0\dots B_0^0\ \square\bigstar$$

но вместо помеченных ★-маркером автоматов начальной ***co-КФ*** (рис. *11*), ими затем становятся ***z***-автоматы структуры, ограничивающие выращенную описанным способом ***c1-КФ***.

(β). После этого *z*-автоматы ***c1-КФ***, помеченные ★-маркерами, испускают две пары импульсов, имеющие соответственно скорости распространения ***v1=m/(m+1)*** и ***v2=1*** как и в вышеописанной начальной части функционального алгоритма структуры. Эти распространяющиеся импульсы реализуют алгоритм $S(B_k^i)_{ik}$ сложения по *mod* **2**, продолжая движение прочь от @-точек встречи. После завершения алгоритма $S(B_k^i)_{ik}$ распространяющиеся импульсы переводят все *z*-автоматы структуры ***1-ОС****, расположенные между точками очередной встречи (*исключая автоматы в* A_k^i-*состояниях*) в состояния B_k^i, и уже вновь реализуется вышеупомянутый алгоритм $S(A_k^i)_{ik}$. Затем функциональный ***Fa***-алгоритм начинает выполняться с пункта (β), но для существенно более длинных θ-сегментов автоматов структуры в B_k^i-состояниях. Данный цикл продолжается до тех пор, пока не будет достигнута на ***G***-отрезке автоматов ***КФ*** вида $A_1^1A_1^1A_1^1\dots A_1^1$ (рис. *11*). После этого испускаются **2** стопорящих управляющих импульса и на обратном пути от их @-точек встречи, находящихся на уже весьма большом удалении друг от друга, все встреченные ими *z*-автоматы структуры переводятся в ***F***-состояние, формируя заключительную (*финальную*) ***КФ c=□FFF..FFF□*** ***L***-длины. Вывод точных оценок для значений параметров решающей ***ПОР*** структуры ***1-ОС**** мы не приводим, между тем, они могут быть получены при детальном описании функционального ***Fa***-алгоритма, с которым можно ознакомиться в [41], либо получены самим читателем в качестве достаточно полезного упражнения.

Использование введенного понятия структур ***1-ОС**** позволяет нам более наглядно представить себе саму идею *функционального* ***Fa***-алгоритма роста, которая вполне может быть реализована и в среде классических ***1-ОС***, но с существенно большими издержками. Таким образом, наша идея функционального алгоритма сводится к рекуррентно экспоненциальному увеличению времени выращивания цепочки *z*-автоматов структуры ***1-ОС****, используя принцип увеличения амплитуд повторяющихся циклов прохождения одних и тех же пар управляющих импульсов в структуре за счет экспоненциального увеличения длин отрезков *z*-автоматов, определяющих длительность этих циклов. На основе предложенной идеи можно рассматривать различные ее модификации, позволяющие в значительной степени улучшать сформулированный выше результат решения ***ПОР*** [5,41,88,90,536].

Таким образом, время выращивания цепочек ***z***-автоматов указанной фантастической длины не превышает их двойной длины и при возрастании величины ***m***, очень существенно влияющей на длину выращиваемой цепочки, асимптотически стремится к пределу $t =]3/2{*}L[$. Очевидно, что *теоретический* предел времени выращивания цепочки ***z***-автоматов ***L***-длины в структуре ***1-ОС**** равен $t =]L/2[$, однако ввиду ограниченности роста и необходимости обработки этого условия функциональным ***Fa***-алгоритмом данный предел недостижим. Вместе с тем, модификация ***Fa***-алгоритма, использованного для получения вышеуказанного решения ***ПОР***, дает возможность выращивать цепочку ***z***-автоматов при тех же исходных предпосылках за время, асимптотически равное $t =]1/2+1/2m[{*}L$, и длиной, равной следующей величине, а именно:

$$L = r * (2m+1)^{4^{r+1}+3} - 2m$$

Проведенный нами анализ функциональных алгоритмов [3,41,536], решающих ***ПОР***, позволяет разделить их на два больших класса, принципиально различающихся между собой, а именно:

(1) алгоритмы, чья сущность состоит в постоянном поддержании роста фигуры до получения управляющего стопорящего импульса (сигнала);

(2) алгоритмы, чья сущность состоит в предварительной разметке контуров выращиваемой фигуры с последующем заполнением ее некоторыми финальными F-символами заполнителями.

Функциональный алгоритм, лежащий в основе приведенного первого решения ***ПОР***, относится ко второму классу, тогда как оптимальный по времени алгоритм – к первому. По-видимому, для выращивания фигур (*конфигураций*) максимально возможного размера наиболее приемлемыми оказываются функциональные алгоритмы второго типа, тогда как для выращивания фигуры за минимальное время – первого типа. На наш взгляд, алгоритмы первого типа более адекватно отражают суть процессов роста в биологии развития, в основе которого лежат как генетическая информация зиготы, так и влияние внешней среды развития. Используемый для решения ***ПОР*** первый алгоритм, основывающийся на распространении в моделирующей ***1-ОС**** управляющих импульсов, достаточно сложен и в случае, в частности, какого-либо сбоя сможет инициировать неконтролируемый рост фигуры – т.н. «*раковый процесс*». Между тем, дальнейшее усложнение данного функционального алгоритма позволяет [3,5] несколько улучшить предельные размеры конфигураций, выращиваемых в ***ОС****-моделях, и в этой связи возникает достаточно интересный вопрос: ***Существуют ли функциональные алгоритмы, использующие какие-либо другие идеи и позволяющие получать наилучшие результаты по выращиванию конфигураций максимального размера при прочих равных условиях?*** Наконец, из прикладных аспектов ***ПОР*** следует отметить ее полезность для задач исследования информационной связи межклеточных взаимодействий развивающихся клеточных систем, а также для формирования ряда соображений о характере генетического кода и механизмах возникновения различного рода онкологий [5,54-56,88,90,536].

Подобно ***ПОР*** использование концепции ***ОС****-моделей оказывается достаточно эффективным и при решении целого ряда известных минимаксных задач таких как, *проблема синхронизации сети автоматов* (***ПССА***) и *проблема Французского флага* (***ПФФ***). Впервые ***ПССА*** была сформулирована ***Дж. Майхиллом*** в ***1957*** и решена сначала ***М. Минским*** и ***Дж. Маккартни*** в ***1965*** на основе метода «*разделяй и властвуй*», а затем ***Э. Гото*** (*минимальное по времени решение*),затем в ***1966 А. Ваксманом*** и ***Р. Бальцером*** (*минимальные по числу состояний единичного автомата решения*). В последующие годы ***ПССА*** получила целый ряд обобщений и по ним были получены достаточно интересные результаты как теоретического, так и прикладного характера [15]. Превосходный исторический *обзор* по ***ПССА*** и ее современному состоянию можно найти в работе [196]. Последние результаты в данном направлении позволяют осуществлять синхронизацию довольно общего вида сетей из конечных идентичных автоматов с произвольными индексами соседства. Сильный результат по решению ***ПССА*** в минимальное время получен ***Ж. Мазойером*** [157], доказавшим, что множество всех решений ***ПССА*** в минимальное время нерекурсивно. В прикладном аспекте результаты по ***ПССА*** и методы ее решения могут быть вполне успешно применены в различных приложениях таких, как управление функционированием различных сетей ЭВМ либо систем радиостанций, синхронизация различных информационных процессов в ***ОС***-моделях и так далее [536]. Ниже данная проблематика рассматривается несколько подробнее.

5. Для многих задач физического моделирования и, в первую очередь, процессов, *обратимых* на микроуровне, довольно эффективными представляются так называемые ***ОС*** на *разбиении* [150], эквивалентные *асинхронным* ***ОС-моделям*** и определяемые нижеследующим образом. Не нарушая общности, и в целях большей прозрачности изложение концепции подобного типа ***ОС***-моделей будем вести относительно их одномерного случая.

Однородная структура на разбиении (ОСнР*, в англоязычной терминологии – с индексом Марголуса)* определяется как *упорядоченная* пятерка базовых компонент следующего общего вида, а именно:

$$\textit{1-ОСнР} \equiv \langle Z^1, A, m, \Psi^{(m)}, \Xi \rangle$$

где: первые две компоненты Z^1 и A аналогичны случаю классических ***ОС***–моделей; m – размер блока, на которые разбивается Z^1-пространство структуры; $\Psi^{(m)}$ – локальная блочная функция перехода; Ξ – правила коммутации блоков *(переразметка)* Z^1-пространства структуры. Подобная организация структуры выводит ее из класса типичных ***d-ОС***. Между тем, функционирование структуры ***1-ОСнР*** достаточно просто и осуществляется нижеследующим образом.

В начальный момент времени $t=0$ Z^1-пространство структуры разбивается на равные по длине ***(m)*** *блоки* единичных автоматов, т.е. все смежные автоматы группируются в блоки ***m***-длины ***(m-*** *блоки)*. Разбиение определяется ***j***-параметром, который не нарушая общности, полагаем равным ***j=0***. Следовательно, ***m***-блоки образуются *смежными* единичными автоматами структуры ***1-ОСнР*** с координатами следующего общего вида, а именно:

$$\textit{m-блок:}\ \ [X_{j+1}X_{j+2}X_{j+3}\ \ldots\ X_{j+m}] \qquad j \in \{0; \pm m; \pm 2m; \pm 3m; \ldots\}$$

(α) После чего одновременно к конфигурациям всех ***m***-блоков структуры ***1-ОСнР*** применяются *параллельные блочные подстановки* ***(ПБП)*** следующего общего вида, а именно:

$$\begin{gathered} X_{j+1}X_{j+2}X_{j+3}\ldots X_{j+m} \Rightarrow Y_{j+1}Y_{j+2}Y_{j+3}\ldots Y_{j+m} \quad 0^m \Rightarrow 0^m\,; \quad X_{j+p}, Y_{j+p} \in A \\ (j = 0; \pm m; \pm 2m; \ldots; \ p = 1..m) \quad N = a^{m(a^m-1)} - \textit{number of different local functions} \end{gathered} \tag{18}$$

определяющие локальную блочную функцию ***(ЛБФ)*** перехода $\Psi^{(m)}$. Функция $\Psi^{(m)}$ отображает произвольную ***КФ*** ***m-****блока* в новую конфигурацию этого же блока, т.е. имеет место отображение $\Psi^{(m)}: A^m \Rightarrow A^m$. Одновременное применение ***ЛБФ*** ко всем блокам Z^1-пространства структуры определяет глобальную функцию ***(ГФП)*** перехода $\tau^{(m)}$, преобразующую начальную ***co-КФ*** всего однородного пространства структуры в следующую глобальную ***c1-КФ*** (рис. ***12***), т.е. $co\tau^{(m)} = c1$. Однако, в отличие от классических ***ОС***-моделей, коммутация единичных автоматов в которых постоянна и определяется лишь индексом соседства, в структурах ***1-ОСнР*** в следующий момент времени ***t=1*** производится перекоммутация ***m-****блоков* (*переразметка* Z^1*-пространства*). С данной целью ***j***-параметр, определяющий блочную разметку Z^1-пространства, принимает значение $j=p$ $(0<|p|<m)$, обеспечивая режим *непрерывного перекрытия* обоих блочных разметок. Итак, ***m***-блоки второй разметки Z^1-пространства структуры образуются смежными единичными автоматами со следующими координатами а, именно:

$$m\text{-блок: } [Y_{j+p}Y_{j+p+1}Y_{j+p+2} \dots Y_{j+m+p}] \qquad j \in \{0; \pm m; \pm 2m; \pm 3m; \dots\}$$

смещая {*влево*|*вправо*} границы *блочной* разметки относительно предыдущей**.** Вновь к ***m***-блокам новой разметки одновременно применяются ***ПБП (18)***, заканчивая на этом второй шаг ***1-ОСнР*** и получая на выходе ***c2-КФ*** структуры (рис. ***12***).

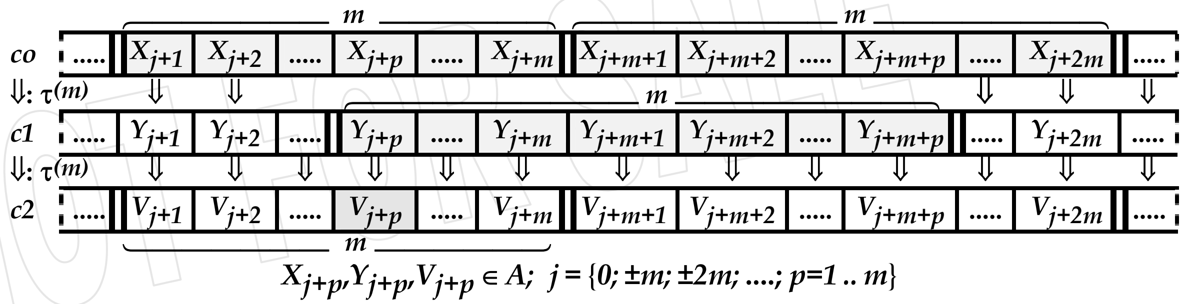


Рис. 12. Иллюстрация принципа функционирования моделей типа 1-ОСнР.

После чего вновь возвращаемся к ***(j=0)***-разметке Z^1-пространства и процесс функционирования ***1-ОСнР*** повторяется с **(α)**-пункта. Из представленных определения структуры ***1-ОСнР*** и самого принципа ее функционирования несложно получить ряд весьма интересных и с теоретической, и с прикладной точек зрения выводов**,** на которых остановимся немного подробнее [90,536,567].

Прежде всего, если ***ЛБФ*** $\Psi^{(m)}: A^m \Rightarrow A^m$ является взаимно однозначным отображением (*которое, по сути дела, состоит в перестановке состояний конфигурации **m**-блока*), в этом случае весь процесс функционирования определенной таким образом ***1-ОСнР*** является строго обратимым**,** т.е. по любой ***КФ*** $c_k \in \langle c_o \rangle [\tau^{(m)}]$ можно отслеживать ее обратную историю (*динамику*)**.** Режим блочной перекоммутации (*переразметки*) Z^1-пространства структуры весьма существенен и обеспечивает возможность обмена информацией между любыми двумя единичными автоматами структуры**.** В противном случае модели структур ***ОСнР***-типа вырождаются в системы бесконечного числа независимых конечных моделей, которые даже в совокупности не представляют сколько-нибудь существенного прикладного интереса.

В вышеприведенном определении ***ОСнР***-модели, естественным образом обобщаемом также на случаи высших ***d***-размерностей ***(d>1)***, **Ξ**-правило переразметки Z^1-пространства состоит из двух последовательных шагов ***(j=0 и j=p)***, повторяющихся *циклически*. Поэтому в общем случае можно использовать несколько (*но конечное число*) шагов переразметки, повторяющихся в совокупности циклически**.** Это позволяет сохранять однородность пространства и времени в такого типа ***ОС***-моделях. При этом**,** мы можем использовать более сложные правила *блочной* переразметки и т.д. При сделанных предположениях мы можем рассматривать ***ОСнР***-модель в качестве некоторого весьма существенно расширенного варианта классической ***ОС***-модели, для которой единичный шаг разбивается на несколько более элементарных (*микро*) подшагов**,** при этом сама ***ОС***-модель должна быть наделена возможностью переменной коммутации индекса соседства, зависящей от местоположения единичного ***z***-автомата модели**,** т.е**.** представлять собой одну из простейших разновидностей из класса асинхронных ***ОС***-моделей [5,88,90,536,567].

Уже простые ***ОСнР***-модели могут вполне успешно использоваться, например, в моделировании поведения частиц газа**.** Конструкция подобной модели адекватна т.н. «*бильярдному автомату*» и базируется на шаблоне соседства *Марголуса* [150,268,273,376]**.** Так, простая газовая ***ОСнР***-модель ***Харди***, ***Поззиса*** и ***Помеау*** дает результаты**,** довольно близкие к результатам решения уравнения *Навье-Стокса*, тогда как более детальные ***ОСнР***-модели ***Фритча***, ***Хэслачера*** и ***Помеау*** позволяют моделировать движение газовых частиц в ***6*** направлениях вместо ***4***. Данного типа модели могут быть использованы, например, в аэродинамике. А небольшого отличия ***ОСнР***-модель (*известная как модель* ***Айзинга)*** может вполне использоваться для симулирования ферромагнетизма, а также реакционно-диффузионных систем. Более детальную информацию читатель может получить, обратившись к источникам, представленным в библиографии [536].

Однако между классическими ***ОС***-моделями и ***ОСнР*** существует и принципиальное различие. Если для первых каждый единичный ***z***-автомат ***ОС***-модели имеет несколько (*в зависимости от индекса соседства)* входов и лишь *один* выход (*определяемый передаваемой соседям информации о своем текущем состоянии*), то для ***ОСнР***-моделей блочное разбиение однородного Z^d-пространства обеспечивает для блоков единичных ***z***-автоматов одинаковые количества входов и выходов при независимости блоков в каждый ***t***-момент времени. Такая организация коммутации единичных автоматов ***ОСнР***-модели позволяет довольно несложно программировать свойство *обратимости*, обеспечиваемое ***ЛБФ*** $\Psi^{(m)}$, которая может легко реализовать функцию простой перестановки в конфигурациях ***m***-блоков разбиения состояний составляющих их единичных автоматов. Более того, в общем случае имеет место следующий основной результат, характеризующий *взаимосвязь* классических ***ОС***-моделей и структур ***ОСнР*** [88,90], а именно:

<u>Теорема 4</u>. Произвольная структура d-ОСнР $\equiv$ $<Z^d,A,m,\Psi^{(m)},\Xi>$ ***не может быть смоделирована классической структурой d-ОС*** $\equiv$ $<Z^d,A,\tau^{(n)},X>$, ***и наоборот.***

Таким образом, понятие ***d-ОСнР*** является существенным *обобщением* классических ***ОС***-моделей. На содержательном уровне приведем соображения в пользу этого утверждения. Прежде всего, рассмотрим пример простейшей структуры ***1-ОСнР*** $\equiv$ $<Z^1, A=\{0,1\}, 2, \Psi^{(2)}, \Xi>$, для которой ***ЛБФ*** определяется параллельными блочными подстановками вида $\Psi^{(2)}\equiv\{00 \Rightarrow 00, 01 \Rightarrow 10, 10 \Rightarrow 01, 11 \Rightarrow 11\}$, тогда как Ξ-правило блочной переразметки Z^1-пространства состоит в *чередовании* значений $\{0,1\}$ ***j***-параметра в *четные* и *нечетные* ***t***-моменты. Исследуем некоторые возможности этого типа ***1-ОСнР*** по генерации ею последовательностей специального вида.

```
co:  | □   □ | 0   0 | 0   0 | 0   0 | 1   1 | 0   0 | 0   0 | 0   0 | 0   0 | □   □ |
c1:    □ || □   0 || 0   0 || 0   0 || 0   1 || 1   0 || 0   0 || 0   0 || 0   0 || 0   □ || □
c2:  | □   □ | 0   0 | 0   0 | 0   1 | 0   0 | 1   0 | 0   0 | 0   0 | 0   0 | □   □ |
c3:    □ || □   0 || 0   0 || 0   1 || 0   0 || 0   0 || 1   0 || 0   0 || 0   0 || 0   □ || □
c4:  | □   □ | 0   0 | 0   1 | 0   0 | 0   0 | 0   0 | 1   0 | 0   0 | 0   0 | □   □ |
c5:    □ || □   0 || 0   1 || 0   0 || 0   0 || 0   0 || 0   0 || 1   0 || 0   0 || 0   □ || □
c6:  | □   □ | 0   1 | 0   0 | 0   0 | 0   0 | 0   0 | 0   0 | 1   0 | 0   0 | □   □ |
.......  | □....... | ....... | ....... | ....... | ....... | ....... | ....... | ....... | ....... | .......□ |
```

Тогда, в соответствии со сказанным в таким образом определенной ***ОСнР***-модели генерируется ***КФ***-последовательность вышеуказанного следующего вида; при этом, одинарными и двойными линиями отмечены первая и вторая блочные разметки Z^1-пространства структуры ***1-ОСнР***. Из рассмотрения поведения данной ***КФ***-последовательности, генерируемой определенной выше бинарной ***1-ОСнР***, несложно убедиться, что, начиная с момента $t=2$, в ней будут представлены конечные конфигурации лишь вида $c_t=\square 10^{2t-2}1\square$, т.е. $<c_o>[\tau^{(2)}]=\{\square 11\square, \square 11\square, \square 10^{2t-2}1\square \mid t \geq 2\}$, где 0^p – ***0***-цепочка длины ***p***. С другой стороны, уже нетрудно убедиться, что никакая классическая бинарная ***1-ОС*** не может генерировать бесконечных ***КФ***-последовательностей указанного вида. Более того, как несложно убедиться, определенная нами ***ОСнР*** является строго обратимой, что играет определяющую роль как при физическом моделировании, так и при создании моделей обратимых вычислений, прежде всего, при создании квантовых компьютеров [536].

Предположим теперь, что для каждой классической ***d-ОС*** существует симулирующая ее ***ОСнР***-модель той же размерности и в том же ***А***-алфавите внутренних состояний единичного автомата. Но тогда на основании определяющих симулирующую ***ОСнР***-модель ***ЛБФ*** получаем довольно эффективный алгоритм определения наличия для модели свойства ***обратимости,*** а значит и ***обратимости*** симулируемой ею классической ***ОС***-модели, что противоречит алгоритмической неразрешимости проблемы ***обратимости*** (*глава* 2) для общего случая классических ***d-ОС*** ($d \geq 2$). Полученное противоречие завершает эскиз доказательства вышеприведенного утверждения. В данном случае речь идет о понятии обратимости ***ОС***-моделей, базирующемся на отсутствии для них неконструируемости ***НКФ***-типа. Детальнее данная тема обсуждается несколько ниже.

С другой стороны, уже за счет увеличения только на один символ ***A***-алфавита *классической* ***d-ОС*** можно посредством нее моделировать в реальное время произвольную структуру ***d-ОСнР***. Для иллюстрации общего принципа рассмотрим пример моделирования произвольной простейшей структуры ***1-ОСнР*** $\equiv \langle Z^1, A=\{0,1\}, 2, \Psi^{(2)}, \Xi\rangle$, чья ***ЛБФ*** определяется параллельными блочными подстановками вида $\Psi^{(2)}$: $\{xy \Rightarrow x`y` \mid x,y,x`,y \in `\{0,1\}\}$, тогда как Ξ-правило *блочной* переразметки Z^1-пространства состоит в чередовании значений $\{0,1\}$ j-параметра в *четные* и *нечетные* моменты t-времени, посредством классической ***1-ОС*** с алфавитом $A^* = A \cup \{\#\}$ ($\# \notin A$) и индексом соседства $X=\{-1,0,1,2,3\}$. Положим, что начальная конфигурация моделирующей ***1-ОС*** следующего вида:

$$c_o = \Box\#00\#X_1X_2\#X_3X_4\# \;.....\; \#X_jX_{j+1}\# \;.....\; \#X_{n-1}X_n\#00\#\Box \tag{19}$$

(*где* # – *маркер-разделитель*) определяет начальные конфигурацию и само блочное разбиение Z^1-пространства моделируемой ***1-ОСнР***. Локальную функцию перехода моделирующей структуры ***1-ОС*** определяем параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$\Psi^{(2)}: X_jX_{j+1} \Rightarrow X`_jX`_{j+1} \text{ – локальная блочная функция 1-ОСнР}$$

$$X=\{-1,0,1,2,3\} \text{ – индекс соседства классической 1-ОС}$$

$$\sigma^{(5)}: \begin{cases} X_{j-1}\#X_jX_{j+1}\# \Rightarrow X`_j & \#X_jX_{j+1}\#X_{j+2} \Rightarrow \# \quad\quad \#0000 \Rightarrow \# \\ X_jX_{j+1}\#X_{j+2}X_{j+3} \Rightarrow X`_{j+1} & 000\#0 \Rightarrow \# \quad\quad\quad\quad\quad 0\#000 \Rightarrow 0 \\ Y_{j-1}Y_jY_{j+1}Y_{j+2}Y_{j+3} \Rightarrow Y_j & \text{– otherwise} \end{cases} \tag{20}$$

$$Y_{j+p} \in A \cup \{\#\}; \quad X_{j+p}X`_{j+1}, X`_j \in X`_{j+1} \quad (j = 0;\; p = \pm 1;\; \pm 2;\; \pm 3;\; \ldots)$$

Путем непосредственной проверки легко убедиться (*оставляем читателю в качестве упражнения*), что начав с ***со-КФ*** (19), определенная ***ЛФП*** $\sigma^{(5)}$ (20) классическая ***1-ОС*** моделирует в реальное время как собственно динамику конфигураций структуры ***1-ОСнР*** (*заданных в* ***А***-*алфавите*), так и Ξ-правило *блочной* переразметки Z^1-пространства (*#-маркерная разметка*). Сам моделирующий алгоритм весьма прост и может успешно использоваться в исследованиях ряда подобных задач.

Вкратце рассмотрим вопрос моделирования структуры на разбиении ***ОСнР*** $=\langle Z^d, A^*, m, \Psi^{(m)}, \Xi\rangle$ классической структурой, ограничившись **1**-мерным случаем, что вовсе не нарушает общности изложения. В качестве *моделируемой* выбирается структура ***ОСнР*** $=\langle Z^1, A, m, \Psi^{(m)}, \Xi\rangle$, для которой алфавит внутренних состояний имеет вид $A=\{0,1,\ ...,\ a\text{-}1\}$, функция $\Psi^{(m)}$ отображает каждую ***КФ*** *m-блока* в новую конфигурацию этого же блока, т.е. ***ЛБФ*** есть отображение $\Psi^{(m)}: A^m \Rightarrow A^m$, а ее одновременное применение ко всем блокам Z^1-пространства структуры определяет глобальную функцию перехода (***ГФП***) $\tau^{(m)}$, преобразующую начальную ***со-КФ*** всего Z^1-пространства ***ОСнР*** в следующую глобальную ***с1-КФ***. Ξ-правило блочной переразметки Z^1-пространства состоит в чередовании значений $\{0,1\}$ j-параметра в четные и нечетные моменты t. При сделанных выше предположениях определяем классическую ***1-ОС,*** моделирующую ***ОСнР*** $=\langle Z^1, A, m, \Psi^{(m)}, \Xi\rangle$, для которой алфавитом внутренних состояний единичных автоматов является множество $A^*=\{b\} \cup A$ ($b \notin A$), тогда как ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ *моделирующей* структуры определяется композицией *четырех* ***ГФП*** вида $\tau^{(n)}=\tau^{(2m)}\tau_l^{(3)}\tau^{(2m)}\tau_r^{(3)}$ ($n=4m+9$). При этом, ***ГФП*** $\tau^{(2m)}$ определяется ***ЛФП*** $\sigma^{(2m)}$, которая задается следующими соотношениями, а именно:

$$\sigma^{(2m)}\begin{pmatrix} x\ldots xb_m x_1\ldots | x_k | \ldots x_m b_1 x\ldots x \\ \leftarrow m\text{-}1 \rightarrow \qquad \leftarrow m\text{-}1 \rightarrow \end{pmatrix} = x_k^*; \qquad b_p = \begin{cases}\Delta, & if\ p=k \\ b, & otherwise\end{cases}; \qquad p=1,m$$
$$x, x_j \in A;\ 1 \le k \le m;\ j=1..m;\ x\ldots x - tuple\ of\ arbitrary\ elements\ from\ A;\ \Delta - empty\ symbol$$

Несложно убедиться, определенная таким образом ***ЛФП*** $\sigma^{(2m)}$ и соответствующая ей ***ГФП*** $\tau^{(2m)}$ обеспечивают реализацию отображений $\Psi^{(m)}$: $A^m \Rightarrow A^m$, определяемых *ЛБФ* $<Z^1,A,m,\Psi^{(m)},\Xi>$, а именно: $x_1x_2x_3 \ldots x_m \to x^*_1x^*_2x^*_3 \ldots x^*_m$; $x_j \in A$; $j=1..m$. Определив произвольную *начальную* ***КФ*** ***co*** в следующем общем виде

$$co = \ldots\ b\ y_1y_2y_3 \ldots y_m\ b\ x_1x_2x_3 \ldots x_m\ b\ h_1h_2h_3 \ldots h_m\ b \ldots;\ x_j, y_j, h_j \in A;\ j=1..m$$

т.е. разбив начальную ***КФ*** $c=\ldots\ y_1y_2y_3 \ldots y_mx_1x_2x_3 \ldots x_mh_1h_2h_3 \ldots h_m \ldots$ моделируемой ***ОСнР*** на блоки длиной m, в следующий момент $t=1$ получаем в *моделирующей* ***1-ОС КФ*** $co\tau^{(2m)}$, эквивалентную ***КФ*** $c\Psi^{(m)}=\ldots\ y^*_1y^*_2y^*_3 \ldots y^*_mx^*_1x^*_2x^*_3 \ldots x^*_mh^*_1h^*_2h^*_3 \ldots h^*_m \ldots$ *моделируемой* ***ОСнР***. Для обеспечения блочной Ξ-переразметки Z^1-пространства (*сдвиг влево и вправо на один автомат*) применяются на шагах **2** и **4** моделирующей структуры ***ГФП*** $\tau_l^{(3)}$ и $\tau_r^{(3)}$, ***ЛФП*** $\sigma_l^{(3)}$ и $\sigma_r^{(3)}$ которых определяются следующими простыми функциями, а именно:

$$\sigma_l^{(3)}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} x_1x_2b & \to & b \\ x_2bx_3 & \to & x_2 \\ x_1x_2x_3 & \to & x_2, otherwise \end{cases} \qquad \sigma_r^{(3)}(x_2,x_3,x_4) = \begin{cases} bx_3x_4b & \to & b \\ x_2bx_3 & \to & x_3 \\ x_2x_3x_4 & \to & x_3, otherwise \end{cases}$$
$$x_j \in A = \{0,1,2,\ldots,a-1\};\ b \notin A;\ j=1..4$$

При этом, если ***ЛФП*** $\sigma^{(2m)}$ оперирует с индексом соседства $X=\{-m, \ldots, -1,0,1, \ldots, m\}$, тогда как ***ЛФП*** $\sigma_l^{(3)}$ и $\sigma_r^{(3)}$ каждая оперирует с индексом соседства $X=\{-1,0,1\}$ Неймана-Мура.

В виду вышесказанного уже несложно заметить, что композиция определенных *трех* ***ГФП*** вида $\tau^{(n)}=\tau^{(2m)}\tau_l^{(3)}\tau^{(2m)}\tau_r^{(3)}$ $(n=4m+9)$ обеспечивает *моделирование одного* цикла (*применение* ***ЛБФ*** $\Psi^{(m)}$ *к текущей конфигурации* ***ОСнР*** $\to$ *сдвиг на автомат влево, новое применение* $\Psi^{(m)}$ $\to$ *сдвиг на автомат вправо*) в определенной описанным образом структуре ***1-ОС***. Сказанное резюмирует следующее достаточно интересное предложение [5,88,90,536,567].

<u>Предложение 1</u>. Произвольная структура ОСнР= $<Z^1, A, m, \Psi^{(m)}, \Xi>$ ***на разбиении с простейшим Ξ-правилом блочной переразметки моделируется в строго реальное время классической 1-ОС с алфавитом $A^*=\{b\}\cup A$ и ГФП $\tau^{(n)}=\tau^{(2m)}\tau_l^{(3)}\tau^{(2m)}\tau_r^{(3)}$ $(n=4m+9)$, определяемой тремя глобальными функциями перехода $\tau^{(2m)}$, $\tau_l^{(3)}$ и $\tau_r^{(3)}$, составляющими искомую ГФП моделирующей 1-ОС.***

Данный результат несложно распространить также на структуры на разбиении и более общих типов, в частности, ***d-ОСнР***$\equiv<Z^d,A,m,\Psi^{(m)}, \Xi>$. В данном отношении имеет место результат.

<u>Теорема 5</u>. Произвольная структура d-ОСнР, определенная в конечном А-алфавите, в реальное время моделируется классической d-ОС с алфавитом $A^*=A\cup\{\#\}$ $(\#\notin A)$.

С другой стороны, классическая ***d-ОС*** моделируется структурой на разбиении ***d-ОСнР***. Один из допустимых способов подобного моделирования проиллюстрируем, не нарушая общности, на примере классических ***1-ОС***. Из результатов по моделированию (*глава* **6**) хорошо известно, что произвольная классическая ***d-ОС*** моделируется структурой с простейшим индексом соседства, соответствующий шаблон соседства ***(ШС)*** которого имеет размер ***(d+1)***. Такое моделирование обеспечивается увеличением мощности ***А***-алфавита моделирующей структуры и замедлением времени. Следовательно, произвольная классическая ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2, \ldots, n-1\}$ моделируется с ***(n-1)****-замедлением* классической ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства $Xn=\{0,1\}\equiv$

{*-1,0*}. Поэтому достаточно ограничиться случаем классических ***1-ОС*** с простейшим индексом ***Xn*** соседства. Для данного класса ***ОС***-моделей ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ определяется *параллельными подстановками* ***(ПП)*** следующего общего вида, а именно:

$$X_jX_{j+1} \Rightarrow X`_j \qquad X_j, X`_j, X_{j+1} \in A \quad j \in \{0; \pm1; \pm2; \dots\} \tag{21}$$

Тогда как моделирующую ее структуру ***1-ОСнР*** определяем в ***А****-алфавите следующего общего вида $A^*=A\cup\left\{\left\langle {x \atop y} \right\rangle \middle| x, y \in A\right\}$ [$\#A^*=a(a+1)$], блочная разметка Z^1-пространства производится блоками размером ***m=2***, тогда как Ξ-правило переразметки состоит из двух последовательных шагов ***(j=0, j=1)***, которые повторяются циклически. Локальную *блочную* функцию $\Psi^{(2)}$ определяем системой параллельных блочных подстановок следующего общего вида, а именно:

$$\psi^{(2)}: \quad X_jX_{j+1} \Rightarrow \left\langle {X'_j \atop X_j} \right\rangle X_{j+1} \qquad X_{j-1}\left\langle {X'_j \atop X_j} \right\rangle \Rightarrow X'_{j-1}X'_j$$
$$X_{j-1}, X_j, X'_j, X_{j+1} \in A; \quad j \in \{0;\ \pm1;\ \pm2;\ \dots\} \tag{22}$$

соответствующими параллельным подстановкам ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ *(21)* моделируемой структуры. Тогда, если ***ГФП*** $\tau^{(2)}$, определяемая ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ *(21)* моделируемой классической ***1-ОС***, переводит любую конфигурацию $c \in C(A)$ в следующую ***КФ*** $c\tau^{(2)}=c` \in C(A)$ за один шаг структуры, а именно:

$$\tau^{(2)}: c=\dots X_{j-3}X_{j-2}X_{j-1}X_jX_{j+1}X_{j+2}X_{j-3}\dots \Rightarrow c`=\dots X`_{j-3}X`_{j-2}X`_{j-1}X`_jX`_{j+1}X`_{j+2}X`_{j-3}\dots$$

то, как нетрудно убедиться, определенная нами структура ***1-ОСнР*** выполняет ту же работу за 2 шага, а именно справедливы преобразования конфигураций следующего вида:

$$c: \quad \dots\Big|\underbrace{X_{j-4}\,X_{j-3}}_{2}\Big|\ \underbrace{X_{j-2}\,X_{j-1}}_{2}\Big|\underbrace{X_j\,X_{j+1}}_{2}\Big|\underbrace{X_{j+2}\,X_{j+3}}_{2}\Big|X_{j+4}\dots$$

$$c': \quad \dots X_{j-4}\Big\|X_{j-3}\left\langle {X'_{j-2} \atop X_{j-2}} \right\rangle\Big\|X_{j-1}\left\langle {X'_j \atop X_j} \right\rangle\Big\|X_{j+1}\left\langle {X'_{j+2} \atop X_{j+2}} \right\rangle\Big\|X_{j+3}\,X_{j+4}\Big\|\dots$$

$$c'': \quad \dots\Big|\underbrace{X'_{j-4}\,X'_{j-3}}_{2}\Big|\ \underbrace{X'_{j-2}\,X'_{j-1}}_{2}\Big|\underbrace{X'_j\,X'_{j+1}}_{2}\Big|\underbrace{X'_{j+2}\,X'_{j+3}}_{2}\Big|X'_{j+4}\dots$$

Таким образом, с учетом сказанного можно сформулировать следующий результат.

<u>Теорема 6</u>. Произвольная классическая 1-ОС с индексом соседства X*=*{0,1,2, ..., n-1} моделируется структурой 1-ОСнР = $<Z^1, A^*, 2, \Psi^{(2)}, \Xi>$ ***с 2*(n-1)-замедлением.***

Данный результат обобщается и на общий ***d***-мерный случай. Задача взаимного моделирования классических структур ***d-ОС*** и ***d-ОСнР*** предполагает исследование и вопросов оптимизации по различным параметрам *(размер **ШС**, **m**-размер блочного разбиения, время моделирования и мощность **А***-алфавита)* моделирующей структуры, которые представляются весьма интересными. Таким образом, многие вопросы динамики ***ОСнР***-моделей можно весьма эффективно рассматривать в рамках развитой теории классических ***ОС***-моделей с учетом специфики первых [5,88,90,536,567].

Класс ***ОСнР***-моделей представляет интерес не только в качестве самостоятельного формального объекта параллельной обработки информации и вычислений, но, в первую очередь, в качестве среды физического моделирования и исследования вычислений, наделенных важным *свойством* обратимости. При этом, следует отметить, что теория данного типа ***ОС***-моделей практически не разработана *(в отличие, например, от классических **ОС**)* и подавляющее количество результатов по ним носит эмпирический характер. Это обусловлено использованием ***ОСнР***-подхода для задач, в основном, физического моделирования на уже упоминавшихся ***САМ***-машинах ***Тоффоли*** [165], аппаратно-программно поддерживающих ***ОСнР***-модели [536,567].

В частности, структуры ***2-ОСнР*** используются для моделирования различного рода физических процессов и явлений, с некоторыми из которых в популярном изложении можно ознакомиться в превосходной книге [150]. В книге можно найти ряд интересных физических моделей таких как: диффузия и равновесие, динамика жидкостей, решетчатых газов, а также модели целого ряда других коллективных явлений, включая хорошо известные системы *Айзинга* [387], которые были первоначально введены с целью изучения магнитных материалов, а впоследствии нашли более широкое применение. Учитывая прикладную значимость ***ОСнР***-моделей, в серии ***САМ***-машин средства их реализации имеют аппаратно-программную поддержку, существенно упрощая сам процесс программирования конкретных процессов и явлений на их основе [150,165,430]. В ***САМ***-машинах реализован *изоморфизм* общей ***ОС***-концепции и аппаратно-программной поддержки, что обеспечивает простоту и эффективность программирования ***ОС***-моделей как классических, так и ***ОСнР***, допускающих конструктивное определение свойства *обратимости*. В работах [150, 160,273,318,536] можно найти весьма интересное рассмотрение свойства обратимости динамики ***ОСнР***-моделей разнообразных физических процессов и явлений на микроскопическом уровне, а также физической интерпретации данного важного свойства.

В заключение данного пункта следует отметить, что используемый нами термин «***структур на разбиении***» эквивалентен термину «***индекс соседства Марголуса***». Между тем, как наш термин представляется более адекватным сути отражаемого им понятия переразметки Z^d-пространства, т.к. он отражает факт динамики изменения алгоритма применения индекса соседства, тогда как термин «***индекс соседства Марголуса***» более ассоциируется со статичными индексами соседства Неймана-Мура, Мура и другими. Вернемся еще раз к вопросу обратимости ***ОСнР***-моделей. Как указывалось выше, если отображение $\Psi^{(m)}: A^m \Rightarrow A^m$, определяемое ***ЛБФ ОСнР***-модели, *взаимно однозначно* (*которое по сути состоит в перестановке состояний конфигурации* ***m****-блока*), то проблема *обратимости динамики* модели в этом случае *алгоритмически разрешима*. При этом, разрешающий алгоритм позволяет по любой ***КФ*** $c_k \in \langle c_o \rangle[\tau^{(m)}]$ отслеживать ее *обратную* историю (*динамику*), но одной лишь информации о взаимной однозначности отображения $\Psi^{(m)}: A^m \Rightarrow A^m$ здесь явно не достаточно. Ввиду определения ***ОСнР***-модели, для решения вопроса обратимости не меньшую роль играет режим блочной перекоммутации (*переразметки*) Z^n-пространства (Ξ-*правило блочной переразметки*). Таким образом, вопрос *обратимости* произвольной ***ОСнР***-модели *алгоритмически* разрешим, однако разрешающий алгоритм базируется не только на анализе отображения $\Psi^{(m)}$ на предмет его *взаимной однозначности*, но и на Ξ-правиле блочной переразметки, позволяющем применять на каждом шаге модели переразметку Z^n-пространства с целью *однозначного* выбора в нем ***m***-блочной структуры для применения обратного для $\Psi^{(m)}$ отображения $[\Psi^{(m)}]^{-1}$.

Наряду с представленными типами классических ***ОС***-моделей для ряда специальных целей (*как теоретических, так и прикладных*) используется и другие классы структур, целый ряд из которых рассматриваются в работах [1,3,5,8,9,54,88,90,135,146,147,150,160,161,166,175-179,187,201,214,252,285, 308,360,366,381]. Специальные классы структур позволяют довольно успешно решать целый ряд важных вопросов динамики ***ОС***-моделей наряду с достаточно интересными и разнообразными прикладными задачами моделирования в их среде. Вкратце рассмотрим некоторые из них [567].

6. *Однородные структуры со входами и выходами* (***ОСВВ***). Данный класс структур был определен и исследован ***В. Кудрявцевым, А. Подколзиным*** и ***А. Болотовым*** [158] и представляет интерес как в качестве самостоятельного формального объекта исследований, так и в прикладном аспекте. Структура данного класса определяется как кортеж $\langle Z^d, W, V \rangle$, где Z^d есть множество ***d***-мерных целочисленных векторов, координаты которых определяют местоположения копий конечного ***W***-автомата с ***a*** состояниями, ***n+p*** *входными* и ***m + p*** *выходными* каналами наряду с определяющей системой уравнений, а именно:

$$\begin{cases} y(t)=\varphi_1(x(t),b(t),s(t)) \\ a(t)=\varphi_2(s(t)) \\ s(t+1)=\varphi(x(t),b(t),s(t)) \end{cases} ; \quad E=\{0,1\};\ \varphi_1: E^n \times E^p \times S \to E^m,\ \varphi: E^n \times E^p S \to S, \varphi_2: S \to E^p$$

где ***S*** **–** множество состояний ***W*-**автомата, а ***x***={$x_1,x_2,\ldots,x_n$}, ***b***={$b_1,\ldots,b_p$}, ***a***={$a_1,\ldots,a_p$}, ***y***={$y_1,y_2,\ldots,y_m$} и ***s*** **–** обозначают основной вход, боковой вход, боковой выход, основной выход и состояние ***W*-**автомата соответственно; тогда как ***V***={$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$} ($\alpha_k \in Z^d$; ***k=1..p***) определяет шаблон соседства структуры**;** каждый вектор с координатами $\alpha_k \in V$ для единичного автомата с координатами α определяет автомат с координатами $\alpha+\alpha_k$, с ***k*-**м боковым выходным каналом которого соединен ***k*-**й боковой вход α**-**автомата ***(k=1..p).*** Автомат ***W*** называется *порождающим* ***ОСВВ,*** φ_1 **–** локальной выходной фунцией, φ_2 **-** функцией взаимодействия и φ **-** локальной функцией переходов**.** ***ОСВВ*** функционирует в дискретные моменты времени ***t=1,2, ...*** Более детально с определением ***ОСВВ*** можно ознакомиться в монографии [158]. Наряду с рассмотрение ***ОСВВ*** в качестве специального подкласса бесконечных автоматов **(***свойства реализуемых ими отображений***,** *сводимость структур к более простым и вопросы композиции структур***)** был рассмотрен также и ряд прикладных аспектов для решения задач математического характера. Среди прикладных задач можно отметить такие, как**:** реализация отображений булевых матриц с распознаванием классов данного типа матриц**,** временная оценка вычисления в ***ОСВВ*-**среде значений отображений булевых матриц**,** решение систем линейных уравнений и целый ряд других [158].

7. *Связанные картографические решетки* ***(СКР)*** в некоторой степени подобны ***ОС*-**моделям тем, что они функционируют в дискретное время и на дискретных решетках. Однако, каждая их ячейка поддерживает некоторую непрерывную переменную**.** ***СКР*** впервые были введены и достаточно детально исследованы их свойства ***К. Кейнко*.** Целый ряд приложений этих ***СКР*** в физике можно найти в физических журналах. Интересен сравнительный анализ ***ОС*-**моделей**,** ***СКР*** и ***LGCA*** при решении задач моделирования сложных химических реакций. При этом, клеточные нейронные сети ***(КНС)*** фактически являются подклассом ***ОС*-**моделей с тем лишь отличием, что используют непрерывные состояния**,** которые могут быть дискретны или непрерывны по времени**.**

Непрерывный пространственный автомат ***(НПА)*** походит на ***ОС*-**модель, за исключением того, что его клетки формируют континуум также, как и допустимые их состояния. На основе этих ***НПА,*** в частности, был предложен непрерывный аналог игры «*Жизнь*» и показано, как такой автомат может быть реализован, используя основные операции вычислений на местности. В различных контекстах представляют интерес и т.н. *неоднородные* ***ОС*-**модели, в которых *единичные* автоматы могут иметь различные локальные функции перехода. Так**,** модель ***В. Кауфмана*** стохастических булевых сетей допускает различные правила ***AND*-***связей* с рядом очень интересных приложений в теоретической биологии**.** Неоднородные ***ОС*-**модели могут использовать не только различные локальные функции перехода, но и различные индексы соседства**.** ***Демарис Д.*** провел довольно интересный сравнительный анализ взаимосвязи нейронных сетей, нелинейной динамики, ***КНС, СКР*** и ***ОС*-**моделей. С более детальным описанием вышеуказанных моделей и их прикладными аспектами можно ознакомиться в работах, представленных в библиографии [536].

А. Хеммерлинг определил т.н. *системы автоматов Тьюринга* ***(САТ),*** которые характеризуются как клеточные структуры, чьи клетки имеют только целочисленные координаты. Между клетками определена некоторая локальная связь **(***например***,** *каждая клетка структуры видит состояния лишь своих соседей***)** и то, что клетка может быть разбита на две либо исчезнуть [468]**.** ***САТ*** симулируют ***ОС*-**модели в реальное время, и наоборот. Определенное преимущество ***САТ*** состоит в том, что имеется хорошая возможность исследовать «*аппаратную сложность*» вычислений, т.е. определять максимальное количество клеток, которые одновременно участвуют в вычислениях**.** В данном направлении можно также определять и иерархии классов сложности вычислений [536].

Введя основные определения, понятия и обозначения ***ТОС***, остальные будем вводить по мере их надобности. В последующих главах монографии рассматриваются наиболее фундаментальные проблемы математической теории, прежде всего, классических ***1-ОС***; между тем, большинство представленных здесь результатов обобщается и на случай высших размерностей. Более полное обсуждение данной проблематики может быть найдено в наших книгах [1,3-5,8,9,88,90], а также в других приведенных в библиографии [536] работах.

1.3. Архитектура теории однородных структур и ее приложений

В настоящее время ***ТОС*** представляет собой довольно хорошо развитую самостоятельную ветвь теории абстрактных бесконечных автоматов, которая имеет очень широкую сферу приложений в различных областях науки и техники. ***ОС***-модели довольно хорошо отражают специфические особенности систем, базирующихся исключительно на локальном взаимодействии элементов и обеспечивающих вычислительную универсальность. При этом, собственно прикладные аспекты моделирования были широко исследованы с теоретической точки зрения. Прикладные аспекты ***ОС***-проблематики весьма обширны, охватывая такие разделы современного естествознания, как моделирование динамики жидкостей и газов, многих физических, химических, биологических и геологических процессов, вычислительные науки, искусственный интеллект, робототехника, обработка образов, моделирование климактических процессов, социальных процессов и т.д.

Именно поэтому, нами предпринята попытка определить архитектуру ***ТОС*** и ее приложений с нынешней точки зрения. Предложенная архитектура в значительной мере носит субъективный характер и не претендует на исчерпывающую полноту охвата ***ТОС***-проблематики. Вместе с тем, в ней учтен ряд замечаний и предложений, полученных после обсуждения данного вопроса по материалам ряда наших предыдущих публикаций [5,39,54,88,90]. Мы надеемся, что этот важный в методическом и методологическом планах вопрос будет в дальнейшем более конкретизирован и уточнен в требуемых пределах, ибо его анализ может оказаться весьма полезным для выбора дальнейших путей исследования в данной области и будет способствовать созданию лучшего архитектурного оформления ***ТОС*** и ее приложений. Целый ряд вопросов архитектуры ***ТОС*** и ее приложений, представляющих определенный гносеологический интерес, рассматриваются в наших книгах [3,5,8,54]. Здесь же мы лишь кратко резюмируем основы концепции предлагаемой архитектуры ***ТОС***-проблематики в целом.

Зарождение ***ТОС***-проблематики восходит к пятидесятым годам прошлого века и к настоящему времени в этом направлении накопилось довольно много работ теоретического и прикладного характера. Наряду с работами, формирующими ключевые направления развития ***ТОС*** и ряда ее приложений, существенно большее число работ относится к т.н. специальным направлениям, имеющим те либо иные степени общности и влияния на дальнейшее развитие проблематики. При этом, вполне возможно, что из ряда исследований такого на сегодня сугубо специального характера в последующем смогут вырасти собственные достаточно развитые направления ***ТОС***-проблематики. Между тем, при анализе большинства публикаций только отдельные *специальные* работы были использованы нами для формирования архитектуры ***ТОС*** и ее многочисленных приложений. В данном контексте предполагается, что вопросы, рассмотренные в этих работах, в ближайшее время должны получить свое дальнейшее развитие. Так, на нижеследующем рис. ***13*** представлена общая принципиальная архитектура ***ТОС*** и ее основных приложений.

На уровне ***А*** *однородные структуры* подразделяются на *бесконечные* и *конечные*. При этом, *конечные* ***ОС***-модели представляют собой обычные конечные автоматы, которые имеют специфическую клеточную организацию, характеризующуюся набором конечного количества взаимосвязанных идентичных единичных автоматов, функционирующих синхронно либо асинхронно согласно заданной локальной функции перехода и индексом соседства, а также граничными условиями.

Однако, клеточная организация таких конечных автоматов и принцип их функционирования способствуют появлению у них качественно новых свойств, недоступных конечным автоматам традиционной организации. Прежде всего, это относится к их возможности производить высоко параллельные обработку информации и вычисления, а также и более адекватно моделировать целый ряд очень важных естественных и искусственных процессов, систем, объектов, явлений и феноменов, характеризующихся ярко выраженным *коллективным* поведением. Поэтому интерес к ***ОС*** проявляют в различных областях: биология, вычислительные науки, социология и др.

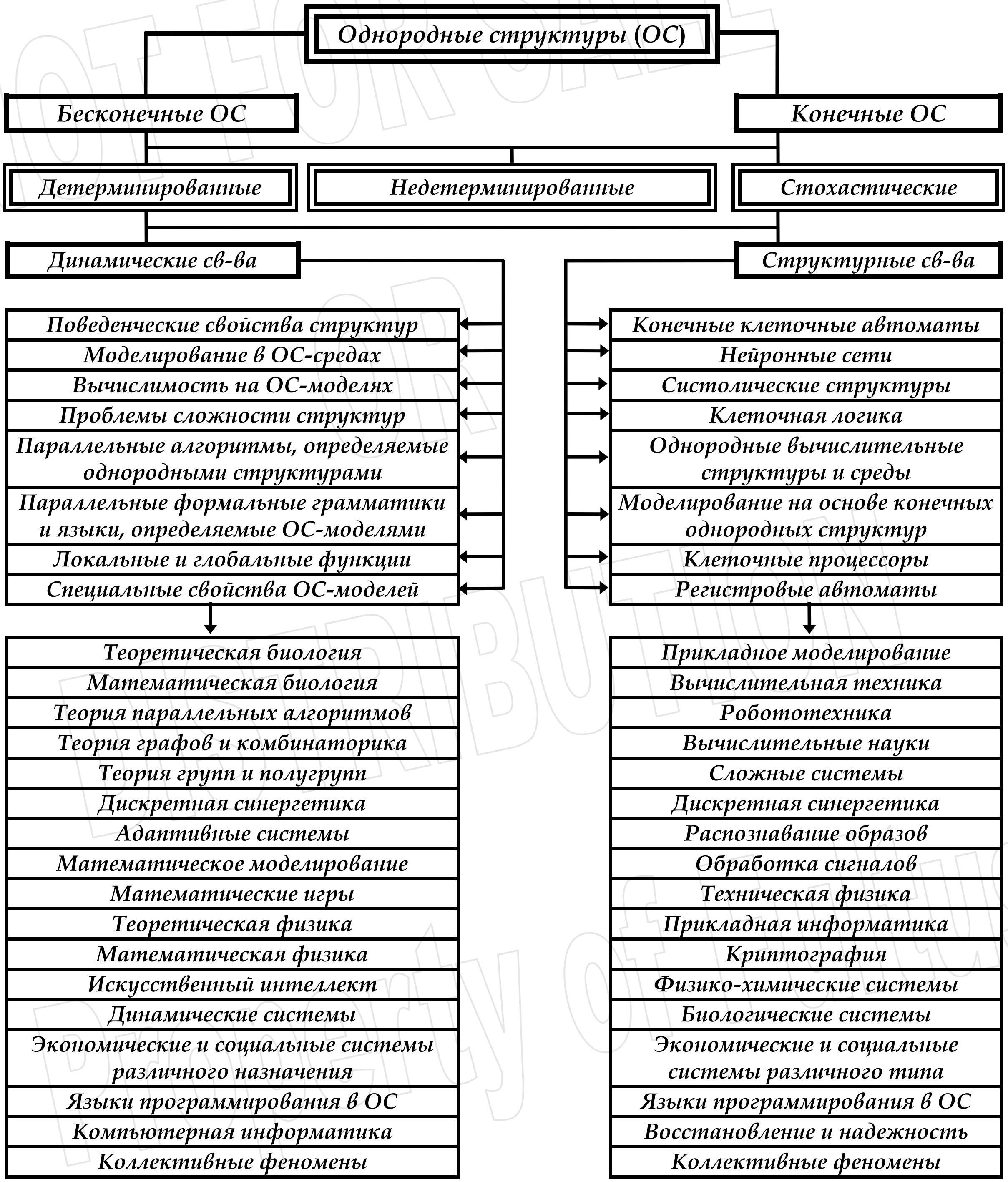


Рис. 13. Архитектура теории классических однородных структур и ее приложений.

В настоящее время теория *конечных* ***ОС***-моделей интенсивно развивается рядом исследователей [135,145,148-150,158-160,162,164-168,172-178,536]; в первую очередь, наиболее интенсивные работы проводятся японскими математиками, получившими целый ряд очень интересных результатов. Однако наибольший интерес конечные ***ОС***-модели представляют именно с прикладной точки зрения в связи с исследованиями и разработкой вычислительных систем высокопараллельного действия. В этом контексте конечные ***ОС***-модели составляют теоретическую основу для весьма обширного класса электронных устройств высокопараллельного образа действия (*матричные и клеточные процессоры, однородные вычислительные структуры, среды, систолические процессоры и др.*). Наряду с этим, конечные ***ОС*** представляют собой превосходные средства и для моделирования целого ряда других объектов, явлений и процессов, в основу которых может быть положена (*или уже лежит*) концепция клеточной организации (*распознавание образов, математическая биология развития, обработка изображений и т.д.*). И здесь в настоящее время имеется большое количество разноплановых применений конечных ***ОС***-моделей. В настоящей книге конечные ***ОС***-модели практически не рассматриваются, однако отдельные теоретические и прикладные результаты, а также наиболее общие направления целого ряда их прикладных аспектов будут упоминаться в контексте рассмотрения бесконечных *классических* ***ОС***-моделей – основного обсуждаемого ниже объекта. Более подробную и актуальную информацию по конечным ***ОС***-моделям, прежде всего, прикладного характера заинтересованный читатель сможет найти в работах [108,148-150,155,174-176,349,370,543,544,536], а также в интернете по ключевой фразе «*finite cellular automata*».

Бесконечные ***ОС*** представляют собой бесконечные клеточные автоматы, состоящие из *бесконечного* числа локально взаимосвязанных между собой единичных идентичных автоматов, чья *глобальная* динамика определяется локальными взаимодействиями всех соседних (*согласно индекса соседства*) автоматов. При определенной степени абстрагирования *бесконечные* ***ОС*** можно ассоциировать с некоторыми моделями абстрактных *вселенных*, динамика которых определяется их *внутренними* законами развития. Такого типа ***ОС***-модели оказываются весьма удобными в тех случаях, когда требуется исследовать динамику поведения различного рода объектов, процессов, алгоритмов и феноменов, в основе которых лежит ряд принципов (*высокий уровень параллелизма, дискретность, локальность взаимодействий, обратимость, неограниченность ресурсов и т.д.*), которые существенно присущи функционированию бесконечных классических ***ОС***-моделей.

Подобные модели могут быть применены в таких различных областях, как: морфогенез, теория эволюции и развития, распознавание образов, машинное самовоспроизведение, адаптивные и динамические системы, искусственный интеллект и робототехника, вычислительная техника и информатика, математика, кибернетика, синергетика, физика, социология, космология и др. С *логической* точки зрения ***ОС*** являются бесконечными абстрактными автоматами со *специфической* внутренней структурой, определяющей целый ряд важных черт и допускающей использование их в качестве новой и перспективной среды моделирования различных дискретных процессов, допускающих режим максимального распараллеливания, обратимости динамики и адекватно отражающих важнейшие черты коллективного поведения. В целом, ***ТОС***-проблематика может рассматриваться как ***структурная*** и ***динамическая*** теория бесконечных абстрактных автоматов, наделенных *специфической* внутренней организацией, носящей новый качественный характер и представляющей собой самостоятельный раздел современной кибернетики.

В настоящее время ***ТОС***-проблематика действительно может рассматриваться в качестве вполне *самостоятельного* раздела современной математической кибернетики со своими проблематикой, методами и приложениями, тогда как сами ***однородные структуры*** служат формальной средой для моделирования многих дискретных процессов и явлений в самых разнообразных областях современного естествознания. Вообще говоря, *бесконечные* ***ОС***-*модели* самым наилучшим образом отвечают, прежде всего, именно теоретическим аспектам исследуемых посредством их проблем, тогда как конечные ориентированы, прежде всего, на прикладные аспекты. Точнее говоря, если конечные ***ОС*** используются в качестве моделей некоторого объекта, то бесконечные структуры представляют собой собственно саму среду моделирования, в которую погружается та или иная исследуемая модель. Как самостоятельный объект теоретических исследований *бесконечные* ***ОС***-модели более естественны и своей потенциальной бесконечностью, обеспечивающей их целым рядом чрезвычайно важных универсальных категорий (*и вычислимость, и самовоспроизводимость, и моделируемость, и обратимость, и т.д.*). Именно классу бесконечных ***ОС***-моделей и посвящена основная часть настоящей монографии.

ОС-модели являются весьма наглядным примером получения довольно сложных объектов и их динамики на основе весьма простых исходных элементов и предпосылок (*аксиоматики*). В этом смысле они существенно лучше соответствуют математическим моделям, которые используются в более абстрактных областях теоретической физики, дискретной синергетики, математической биологии развития, теории хаоса и др., чем более практическим моделям вычислительных наук, базирующимся на современной микроэлектронной технологии. Этим целям *наилучшим* образом отвечают именно конечные ***ОС***-модели. Однако, несмотря на это, бесконечные ***ОС*** – более, чем полезные абстракции, ибо обладают двумя весьма фундаментальными свойствами – глобальное поведение и высокий параллелизм функционирования, определяемые существенно *локальными* взаимодействиями небольшого количества элементарных конечных автоматов [536].

Обе перечисленные черты (*высокий параллелизм и локальность взаимодействий*) вытекают из того обстоятельства, что бесконечные ***ОС*** являются высоко абстрагированными моделями реального физического мира, функционирующими во времени и пространстве. Именно по этой причине они намного лучше, чем многие другие формальные архитектуры, могут быть отображены на физические реалии в их современном понимании. Более того, сама ***ОС***-концепция достаточно отлично приспособлена для решения задач моделирования из различных областей таких, как: вычислительные науки, биология развития, теоретическая физика, математика, кибернетика, дискретная синергетика, хаос, экология, социология, теория дискретных динамических систем и др. Более того, по мнению целого ряда исследователей ***ОС***-концепция вскоре сможет выйти на очень серьезный *междисциплинарный*, значимый для целого ряда важных физических модельных приложений, уровень при условии возможности обеспечения такого *фундаментального* свойства, как *обратимость* динамики ***ОС***-моделей.

В соответствии с нашими современными представлениями свойство *обратимости* присуще всем физическим законам. Используя ***ОС***-концепцию в качестве *концептуальной* основы физического моделирования, необходимо достаточно четко представлять себе, что такие фундаментальные физические характеристики как *однородность* и *локальность* обеспечиваются уже на уровне *самой* ***ОС***-аксиоматики. Тогда как свойство *обратимости* непосредственно ею не обеспечивается и его необходимо программировать в каждом конкретном случае определения ***ОС***-модели. Сегодня существует целый ряд весьма интересных работ, исследующих как само понятие обратимости в контексте ***ОС***-концепции, так и подходы к самому программированию *обратимых* ***ОС***-моделей, позволяющих симулировать на микроскопическом уровне важные физические и иные объекты, процессы, и явления [4,5,12,88,90,108,139,141,146,155,176,198,207,257,262,307,375-377,536]. Сказанное и имеющиеся на данный момент многочисленные интересные примеры приводят нас к вполне однозначному заключению о том, что *бесконечные* ***ОС*** могут представить значительный интерес как относительно новая *перспективная* среда моделирования и исследования многих дискретных процессов и феноменов, допускающих довольно высокую степень распараллеливания, свойства *однородности*, *локальности* и *обратимости*, так и в качестве весьма интересного самостоятельного математического объекта исследований.

На ***В***-уровне *однородные* структуры подразделяются на *три* основных класса: *детерминированные*, *недетерминированные* и *стохастические*, определения которых приведены в предыдущем разделе. Исследования данных классов ***ОС***-моделей ведутся, главным образом, по двум направлениям – динамические (*поведенческие*) и *структурные* свойства (*уровень* ***С***; *рис. 13*). Изучение структурных свойств, особенно конечных ***ОС***, играет чрезвычайно важную роль, в первую очередь, в связи с исследованием новых архитектур перспективной высокопараллельной ***ВТ*** на базе современной микроэлектроники и нанотехнологий, робототехники, распознавания образов, искусственного интеллекта, обработки сигналов, модельного исследования ряда проблем биологии развития и др. Все подобные работы могут быть классифицированы как *макроклеточные* исследования, т.к. во главу угла ставится исследование свойств ***ОС***-моделей именно в зависимости от структуры их единичного клеточного автомата. Как правило, структурно данные автоматы-клетки являются существенно более сложными, чем единичные автоматы ***ОС***-моделей, изучаемых с точки зрения их *динамических* свойств. Количество их внутренних состояний довольно велико, а их локальное функционирование описывается, как правило, достаточно сложной функцией перехода.

Прикладные аспекты ***ТОС*** в большинстве случаев требуют, как правило, четкой спецификации структуры единичных автоматов и их взаимосвязей. Мотивировками для подобного типа работ являются вопросы, связанные с параллельной обработкой информации, обработкой сигналов, клеточной логикой, итеративными и нейроподобными сетями, систолическими структурами, робототехникой, распознаванием образов, адаптацией и др. Математическая теория конечных ***ОС***-моделей интенсивно разрабатывается целым рядом исследователей [5,28,127,135,138,145,148-150,155,158-160,162,164,165-168,544,545,536,586], тогда как ее структурными аспектами занимается достаточно широкий круг исследователей во многих странах, использующих данные модели в качестве аналогов либо прототипов разнообразных исследуемых объектов.

Структурные аспекты *бесконечных* ***ОС***, как правило, рассматриваются в тесной взаимосвязи с их динамическими свойствами, когда требуется установить либо связать динамику ***ОС***-модели со структурой ее единичных автоматов. Данные проблемы достаточно часто возникают в случаях моделирования в ***ОС***-среде клеточных развивающихся систем, а также в исследованиях целого ряда очень важных биологических феноменов развития (*регенерация, регуляция, рост, морфогенез, дифференцировка клеток, самовоспроизведение и др.*) [1,3-5,12,33,41,44,45,51,64,108,113,114,117,155,174-177,187,224,536]. Наконец, структурный подход в виде структуризации множества внутренних состояний единичного ***z***-автомата *бесконечной* ***ОС*** позволяет в ряде случаев весьма существенно упрощать исследования целого ряда проблем их динамического поведения, включая и вопросы погружения в них различных моделей и алгоритмов.

Динамические свойства в отличие от структурных предполагают исследования ***ОС***, как правило *бесконечных*, в основном, с точки зрения историй конфигураций (*как конечных, так и бесконечных*) с течением времени. При таком подходе абстрагируются от внутренней структуры единичного автомата ***ОС***-модели, а внимание акцентируется лишь на основных ее параметрах: размерность, локальная и глобальная функции перехода, индекс соседства, алфавит внутренних состояний единичного автомата, наряду с типами множеств исследуемых конфигураций, определяющих динамику структуры в контексте историй ее начальных конфигураций. Исследования *динамики* бесконечных ***ОС***-моделей представляют большой интерес, прежде всего, с теоретической точки зрения, когда изучаются фундаментальные либо глобальные свойства тех или иных процессов и явлений в структурах. Исследуемой переменной при данном подходе выступает ***конфигурация*** (*конечная или бесконечная*) структуры, а однородное пространство структуры используется лишь для погружения в него самих историй конфигураций. Тогда как сама динамика конфигурации представляет собой историю некоторой реальной модели, определяемой начальным условием (*конфигурацией*) и локальными правилами (*функцией переходов* в ***ОС***-*среде*) развития. В настоящее время имеется не так уж и много работ, посвященных серьезному анализу *динамических* свойств *бесконечных* ***ОС***-моделей во всей их полноте и использующих формальные средства. В основном, для подобных целей используется компьютерное симулирование. Основная причина данного положения дел обусловлена весьма существенными затруднениями, имеющими место в случае общего исследовании данной проблемы. С другой стороны, в целом ряде случаев бывает весьма сложно разграничивать динамические и структурные свойства ***ОС***-моделей, что естественно не уменьшает сложности их исследования.

И наконец, следует отметить, что существуют принципиальные различия между конечными и бесконечными ***ОС***-моделями, четко говорящие в пользу рассмотрения их в качестве отдельных разделов общей ***ТОС***-проблематики. Если *конечные* структуры (*являющиеся обычными конечными автоматами*) предназначены, прежде всего, для моделирования конкретных объектов, проблем исследования на их основе ***(1)*** алгоритмов, лежащих в основе их функционирования, и ***(2)*** для получения более эффективного их функционирования за счет использования специфической внутренней клеточной организации, допускающей достаточно высокий уровень параллелизма, то *бесконечные* структуры представляют собой среду моделирования в широком смысле слова и позволяют исследовать объекты, феномены и процессы самого общего характера в различных областях, являясь довольно высоко абстрагированными моделями реального физического мира, функционирующими во времени и пространстве. По данной причине они лучше, чем многие другие формальные архитектуры могут быть эффективно отображены на физические реалии в их современном понимании. Более того, *бесконечные* ***ОС***-модели представляют большой интерес и в качестве самостоятельного формального объекта исследований. Наряду с этим, до сих пор не известно достаточно глубоких результатов из теории бесконечных ***ОС***, представляющих также и серьезный интерес для конечных структур и их приложений, исключая довольно тривиальные случаи. Однако при последующем использовании *конечных* ***ОС***-моделей, содержащих довольно большое количество единичных автоматов (*например, использование сверхбольших однородных сред и вычислительных структур, появление которых связывается с дальнейшим прогрессом нанотехнологий, биотехнологий и микроэлектроники*), картина может очень существенно измениться в значительно более лучшую сторону и, при этом, достаточно скоро.

Интенсивность исследований в области ***ТОС***-проблематики достаточно неравномерна и может быть в определенной степени отражена в табл. ***1***, носящей в определенной мере субъективный характер. Вместе с тем, несмотря на определенную субъективность представленного анализа, он по ряду оценок отражает основное распределение усилий исследователей в ***ТОС***-проблематике в настоящее время [32,108,110,111,149,150,155,201,349,536].

Таблица 1

Класс однородных структур	***С в о й с т в а***			
	Динамические		***Структурные***	
	Бесконечные	***Конечные***	***Бесконечные***	***Конечные***
Детерминированные	***И***	***И***	***Сл***	***И***
Недетерминированные	***Ср***	***Ср***	***Сл***	***Сл***
Стохастические	***Ср***	***Ср***	***Сл***	***Сл***

Примечание: ***И***, ***Ср*** и ***Сл*** обозначают соответственно *интенсивные*, *средней* и *слабой* интенсивности исследования в том либо ином направлении ***ТОС***-проблематики.

На ***D***-уровне (рис. ***13***) представлены основные разделы *динамического* и *структурного* аспектов в ***ТОС***-проблематике. В качестве основных разделов *структурного* аспекта можно отметить такие: однородные вычислительные структуры и среды, систолические структуры, клеточная логика, нейронные сети, робототехника, клеточные процессоры, моделирование и конечные клеточные автоматы. Ввиду четкой направленности настоящей монографии наполнение данных разделов рассматриваться здесь не будет, но заинтересованный читатель отсылается к многочисленным источникам, приведенным в списке литературы и в [536], содержащим богатую библиографию по данной проблематике.

В последние два десятилетия весьма интенсивно исследуются динамические системы различных типов, прежде всего, в качестве моделей *физических* систем. На формальном уровне *динамическая* система представляет собой некоторое ***A***-множество величин, называемых *состояниями системы*, и правила *перехода* ***F***, определяющие с течением времени переход из одного состояния в другое. Правила перехода (*функция*) ***F*** по состоянию $a^t \in A$ системы в ***t***-момент определяют ее следующее состояние $a^{t+1} \in A$ в момент ***t+1***, т.е. $F(a^t) = a^{t+1}$ $(t=0,1,2, \ldots)$. Из этого определения и определения ***ОС***-моделей следует, что вторые являются *подклассом* класса всех *динамических* систем, имеющих специфическую клеточную организацию (*структурный аспект*) и функционирующих сугубо параллельным образом (*динамический аспект*) при переходе из одного состояния (*конфигурации*) под действием ***ГФП*** в другое. Сказанное мотивирует не только сугубо теоретитический интерес к ***ОС***-моделям, но и их весьма многоаспектные приложения в различных областях [536].

Основными разделами динамического аспекта ***ОС***-проблематики можно полагать следующие: поведенческие возможности, конструируемость, симуляция и вычислимость в ***ОС***, глобальные и локальные функции перехода, проблемы сложности, определяемые ***ОС***-моделями формальные параллельные алгоритмы и языки, а также специальные свойства структур, которые не входят в перечисленные выше разделы теории. В настоящей книге именно динамическому аспекту ***ТОС***-проблематики будет уделено основное внимание, поэтому мы вкратце охарактеризуем основное содержание вышеперечисленных разделов динамической теории однородных структур.

В рамках поведенческих возможностей и конструируемости, в первую очередь, предполагается исследование динамических аспектов структур, определяющих их экстремальные возможности по генерации ***КФ***-последовательностей в среде ***ОС***-моделей. К данной тематике относятся такие вопросы, как неконструируемость, универсальная воспроизводимость конечных конфигураций, условия генерации специальных типов конфигураций, различные критерии конструкционных возможностей структур и др. Стержневой же проблемой данного раздела является исследование глобальных поведенческих свойств ***ОС***-моделей в терминах сугубо локальных взаимодействий составляющих их единичных автоматов. Важнейшими подразделами здесь являются такие, как: характеристика динамики последовательностей конфигураций и их аналитические свойства, влияние на динамику конфигураций основных параметров ***ОС***-моделей, идентификация ***ОС***-модели по генерируемым ею ***КФ***-последовательностям, обратимость динамики конфигураций и определяющие ее критерии и др. Результаты исследований по данному направлению играют фундаментальную роль при исследованиях глобальных динамических свойств ***ОС***-моделей как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. Наряду с этим, данные результаты составляют достаточно существенную часть собственного аппарата исследований по ***ТОС***-проблематике в целом, а также в целом ряде ее приложений [536].

В связи с тем, что ***ОС*** представляют собой превосходную среду моделирования различного рода дискретных параллельных процессов, алгоритмов, явлений, динамических систем клеточной природы, а также целого ряда физических объектов в их динамике, то теоретические аспекты моделирования в структурах представляют особый интерес. Не взирая на широкомасштабность данного раздела, здесь можно выделить целый ряд достаточно интересных подразделов общего назначения таких, как моделирование *одной* структуры *другой* при заданных условиях (*в реальное время, при подавлении тех или иных свойств моделируемой структуры, с обратимой динамикой, при уменьшении размера шаблона соседства и/или мощности алфавита моделирующей структуры и т.д.*), моделирование структурами известных алгоритмов и формальных систем, оптимизационные вопросы моделирования, вопросы надежности и восстановления и целый ряд других. При этом, в стороне остается весьма обширная область погружения в ***ОС***-модели конкретных алгоритмов, объектов, явлений и процессов. В данном направлении получено достаточно много интересных результатов [88,90,536], часть из которых рассматривается и в настоящей монографии.

Растущий рост интереса к параллельным обработке информации и вычислениям определяет и важность исследования *параллельных* алгоритмов, определяемых ***ОС***-моделями. Действительно, любую ***ОС***-модель можно рассматривать как формальный параллельный алгоритм, заданный на множестве всех ее конечных конфигураций. Как следует из определения ***ОС***-модели, данный алгоритм допускает максимальную степень распараллеливания и на формальном уровне весьма адекватно описывает функционирование целого ряда параллельных клеточных динамических систем. В данном направлении уже получен целый ряд интересных результатов, среди которых следует отметить важные работы по определению классов параллельных алгоритмов, наиболее эффективно погружаемых в ***ОС***-модели. Выявленная связь между классическими ***ОС***-моделями и модифицированными *алгебрами Поста* позволяет применять полученные в этом направлении результаты в прикладной теории алгоритмов, имеющей многочисленные приложения в теории вычислений и теоретическом программировании [536].

К параллельным алгоритмам, определяемым *классическими* ***d-ОС***, непосредственно примыкают и вопросы вычислимости в однородных структурах. А так как классические ***ОС*** могут служить формальной моделью параллельных вычислений, подобно тому, как *машины Тьюринга* являются абстрактной моделью современного подхода к понятию вычислимости, то область деятельности многочисленных исследователей в данном направлении представляется достаточно обширной как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. К настоящему времени в этом направлении получен целый ряд весьма интересных и важных результатов и теоретического, и прикладного характера [5,88,90,536].

Сложность является одним из наиболее интригующих и интуитивных понятий современного естествознания. В контексте классического определения ***ОС***-модели понятие *сложности* вполне естественно предполагает два относительно *независимых* аспекта, а именно: *сложность* конечных конфигураций, как главного объекта исследования *поведенческого* аспекта структур, и *сложность* глобальных функций перехода, определяющих собственно *динамику* исследуемого в ***ОС***-модели алгоритма либо процесса. Грубо говоря, если в первом случае исследуется изменение *сложности* моментных снимков *динамики* структуры, то во втором – *сложность* функций, управляющих этой динамикой. Оба данные аспекта неплохо отвечают *параллельной* динамике функционирования ***ОС***-модели и позволяют вводить определенные *иерархии сложности* для основных составляющих однородных структур, а именно – множества конечных ***КФ*** и глобальных функций перехода.

Теория формальных грамматик ***(ТФГ)*** составляет раздел общей теории абстрактных автоматов и в качестве одного из основных практических выходов имеет теорию языков программирования. Следовательно, изучение формальных параллельных грамматик и языков, определяемых ***ОС***-моделями, языков, допускаемых и распознаваемыхи ими, представляет несомненный интерес. С познавательной точки зрения чрезвычайно интересно определить и лингвистические аспекты динамических клеточных систем в рамках общей ***ТФГ***. Более того, имеются успешные попытки использования ***ТФГ*** для создания теории развития биологических форм (*морфогенеза*) и в этом плане *параллельные* грамматики, в частности, определяемые ***ОС***-моделями, могут сыграть весьма существенную роль при формальном исследовании лингвистических аспектов развивающихся клеточных систем, а также вычислительных высокопараллельных ***ОС***-моделей. Итак, основные работы в данном направления исследуют параллельные грамматики (*наряду с порождаемыми ими параллельными языками*), определяемые ***ОС***-моделями различных классов и типов, допускаемые и распознаваемые ими формальные языки, в рамках традиционной проблематики ***ТФГ***, а также и с более широких позиций формальных грамматик [5,88,90,536].

Так как *глобальная* динамика ***ОС***-модели полностью определяется *локальными* взаимодействиями единичных автоматов структуры на основе локальной функции перехода ***(ЛФП)***, то и вопросам исследования данных функций уделяется достаточно много внимания. Здесь наряду с задачами локального характера исследуются и вопросы влияния того или иного типа ***ЛФП*** на глобальную динамику ***ОС***-модели. В свою очередь, глобальные функции перехода широко исследуются как теоретико-множественными, так и групповыми методами в контексте *параллельных отображений*, индуцируемых на множестве всех конфигураций структуры. Наряду с выше перечисленными существует целый ряд других интересных подходов и методов исследования как локальных, так и глобальных свойств ***ОС***-моделей, многие из которых будут рассмотрены в настоящей книге в том либо ином аспекте.

Кроме названных разделов поведенческой теории ***ОС***, имеющих довольно хорошо устоявшиеся тематику, предмет и методы исследования, и довольно существенное наполнение результатами, существует целый ряд и относительно самостоятельных задач, представляющих определенный интерес для развития ***ТОС***-проблематики. К ним можно отнести, например, такие направления, как проблема синхронизации сети автоматов и французского флага, специализированные типы ***ОС***-моделей, выращивание различного типа ***КФ*** и др. С достаточной степенью субъективизма их можно относить либо к специальным вопросам ***ОС***-проблематики или рассматривать сугубо в качестве конкретных ***ОС***-моделей того либо иного класса. Не исключено, что в дальнейшем некоторые вопросы динамической теории ***ОС***, считающиеся ныне специальными, со временем сформируются в отдельные ее направления со своими проблематикой, предметом и методами исследования, а также приложениями. В качестве конкретного примера можно привести задачу *самовоспроизводящихся* конечных конфигураций, во многом определившую развитие проблемы конструктивных возможностей классических ***ОС***-моделей.

Наконец, ***Е***-уровень отражает прикладные аспекты динамической и структурной составляющих общей теории ***ОС***-моделей. Ввиду обилия и разноплановости полученных в этих направлениях прикладных результатов не представляется возможным дать здесь им сколько-нибудь *детальный* обзор, хотя в свете довольно значительной разобщенности исследователей по ***ТОС***-*проблематике* такая работа была бы весьма своевременной, интересной и полезной. При этом, следует иметь в виду, многие прикладные разделы имеют место как для динамических, так и для структурных аспектов ***ТОС***-проблематики, а также для бесконечных и конечных ***ОС***-моделей с акцентом на соответствующие определяющие их характеристики. В частности, биологические модели роста рассматриваются в оптимизационном аспекте в среде *бесконечных* ***ОС***, но могут рассматриваться и в рамках *конечных* структур при исследовании процессов выращивания конкретных объектов [5,536]. Вопросы разработки языков программирования для ***ОС***-*моделей* также имеют специфику относительно бесконечных и конечных ***ОС***-моделей [33,88,108,139,163,536]. Наряду со многими относительно естественными для ***ОС***-моделей предпринимаются попытки использования их в качестве основы для криптографии [208,536], даже решения проблем урбанизации, социологии, экономики и целого ряда других достаточно экзотических областей [205,206,374,536]. Так, идея применения ***ОС***-моделей для *сжатия/восстановления* информации, включая информацию в виде сложных многомерных объектов, была предложена нами в монографии [4]. Заинтересованный прикладными вопросами читатель может обратиться к представленным в перечне литературы источникам, содержащим в свою очередь достаточно полную библиографию по прикладному аспекту ***ТОС***-проблематики, много по данной теме можно найти в [536]. Некоторые прикладные вопросы ***ТОС***-проблематики рассматриваются и в нашей монографии.

Завершая раздел, нам хотелось бы сделать несколько замечаний и общего характера. Во-первых, представленная нами здесь *архитектура* ***ТОС*** и ее приложений носит в значительной степени субъективный характер, хотя и отражает основные тенденции развития ***ТОС***-проблематики в целом. При этом, она базируется, прежде всего, на исследованиях именно в области *классических* ***ОС***-моделей. Предполагается, что со временем предложенная архитектура будет уточняться в необходимых пределах и может послужить вполне удовлетворительной отправной точкой для дальнейшей работы по систематизации ныне бурно развивающейся ***ОС***-проблематики. Наряду с этим, предложенная архитектура позволяет в определенной мере сформулировать некоторые перспективные направления для дальнейших исследований по ***ОС***-проблематике в целом. При этом, если представленная нами архитектура ***ОС***-проблематики и носит *субъективный* характер, то с не меньшим основанием это можно сказать и о предложенной предметной классификации по данной проблематике [110]. Вместе с тем, еще раз следует особо подчеркнуть, работа в обоих направлениях весьма важна и актуальна ввиду большого объема и обширной разноплановости полученных на сегодня результатов по ***ТОС***-проблематике, весьма часто находящихся на стыке различных предметных областей (*теория автоматов, математика, информатика, физика, теория алгоритмов, биология, урбанистика, экология, социология и др.*). Этого требует и довольно высокий уровень *разобщенности* исследований в ***ОС***-проблематике, не совсем понятный при современном уровне развития инфотехнологий, особенно в научной сфере.

Во-вторых, представляя в настоящей монографии, в основном, собственные результаты, мы не будем строго придерживаться самой архитектуры ***ТОС*** и ее приложений. Связано это с тем, что широкий охват ***ТОС***-проблематики и область интересов не позволили нам полностью покрыть полученными результатами тот либо иной раздел архитектуры, хотя некоторые их подразделы разработаны достаточно детально. Поэтому изложение монографии будет базироваться, скорее, на описании подразделов или групп достаточно тесно связанных проблем. Вместе с тем, уже из собственно самого изложения будет несложно усмотреть достаточно адекватные соответствия между предложенной ***ТОС***-архитектурой и содержанием глав книги. Последующие шесть глав книги посвящены непосредственно фундаментальным вопросам теоретического аспекта ***ТОС***-проблематики, тогда как ряд интересных прикладных аспектов обсуждаются в заключительной главе монографии.

Наконец, представляя данную *архитектуру* ***ТОС*** и ее приложений, следует сделать одно весьма существенное замечание. Если составляющие ее ***А***-уровень бесконечные и конечные ***ОС***-модели исчерпывают данный уровень дифференциации структур, то уже на ***В***-уровне, включающим ***3*** *группы* структур *детерминированные*, *недетерминированные*, *стохастические*, между тем, полностью не покрывается все разнообразие существующих на сегодня видов ***ОС***-моделей (*для тех объектов, которые к ним сегодня относят*). Вместе с тем, именно эти три группы структур составляют *основу* современной ***ОС***-проблематики и именно относительно их получена львиная доля результатов как теоретического, так и прикладного характера. Поэтому, беря за основу предложенную выше архитектуру, можно ее как *содержательно* расширять, так и конкретно *детализировать* отдельные ее составляющие. Однако мы, прежде всего, хотели представить легко обозримую архитектуру, отражающую некий *базис* современной ***ТОС*** и ее приложений, не отвлекаясь на специфические ее аспекты, пусть даже и очень интересные.

1.4. Аппарат исследований в теории однородных структур

На сегодня *математическая теория* ***ОС (ТОС)*** представляет собой достаточно хорошо развитый подраздел теории абстрактных автоматов со своими проблематикой, методами исследования и многочисленными приложениями. В настоящем разделе мы представляем краткий набросок тех основных методов и подходов, которые составляют ***стержень*** аппарата исследований различных аспектов ***ТОС***-проблематики; при этом, основной акцент делается именно на классических ***ОС***-моделях, как важнейшем объекте исследования. Настоящий раздел преследует следующие две основные цели, а именно.

Во-первых, нам хотелось показать, что ***ТОС*** является очень благодатной почвой для применения в ней результатов и методов из целого ряда как классических, так и современных *разделов* чистой математики, кибернетики и вычислительных наук. Во-вторых, ***ТОС*** в настоящее время является еще не до конца сформировавшейся областью с отсутствием своих общепринятых, устоявшихся методов, подходов, без собственного развитого аппарата исследований. Большинство из активно работающих в ***ТОС***-проблематике используют свои излюбленные методы исследования тех или иных проблем, которые определяются, как правило, их предыдущим опытом, их интересами и вкусом. И поэтому предлагаемый краткий обзор современного аппарата исследований по ***ТОС***-проблематике поможет в значительной степени распространению некоторых сильных и хорошо зарекомендовавших себя методов, становлению собственно аппарата исследований, привлечет к ***ТОС***-проблематике и ученых из соответствующих областей математики, кибернетики, физики, теории систем, математической и теоретической биологий, вычислительных наук и др. Особую актуальность предлагаемому обзору придает довольно разобщенный характер исследований по ***ТОС***-проблематике. Возможно, представленный обзор методов исследования вызовет полезные дискуссии и будет способствовать более широкому внедрению указанных методов в практику исследования и применения ***ОС***-концепции достаточно широкими кругами исследователей из различных областей современных естествознания, техники и технологий.

Здесь сразу же вполне уместно подчеркнуть, что целый ряд из рассматриваемых ниже методов, составляющих современный аппарат исследований в ***ТОС***-проблематике, использовались и для получения результатов, обсуждаемых в рамках настоящей монографии, однако ввиду *(во многом обзорного)* характера изложения мы посчитали целесообразным в соответствующих местах книги указывать только ссылки на оригинальные работы, где обсуждаемые вопросы изложены более детально и с требуемой строгостью формализма. Данный подход позволяет заинтересованному читателю прояснять все необходимые детали применения того или иного метода исследований в ***ТОС***-проблематике, вникая в саму суть проблемы и без крайней надобности не отвлекаясь на строго формальную сторону вопроса, детально представляемую в цитируемых источниках. При этом, указанные источники наряду с формальной стороной содержат немало иных материалов.

Таблица 2

Уровень	*Используемые методы исследований в ТОС-проблематике*
15	***Компьютерные методы исследования ОС-моделей, включая методы генетических алгоритмов, эволюционные методы и программирование***
14	***Подходы на основе моделирования (модельный подход)***
13	***Симуляционный подход***
12	***Структурный подход***
11	***Подходы и методы на основе общей теории систем***
10	***Статистико-стохастический подход***
9	***Подходы на основе теории сложности***
8	***Методы теории формальных грамматик и языков***
7	***Методы теории рекурсивных функций и алгоритмов***
6	***Методы классической теории чисел***
5	***Методы смещающихся динамических систем***
4	***Методы на основе графо-топологического подхода***
3	***Методы групп, полугрупп и алгебр (алгебраические методы)***
2	***Аппарат булевой алгебры и а-значных логик (а ≥ 3)***
1	***Базовый уровень аппарата исследований в ТОС-проблематике***

Для решения хорошо известной проблемы *декомпозиции* ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях были использованы результаты по неконструируемости – аппарат неконструируемых конфигураций. Несомненно, среди наиболее значительных результатов по теории ***ОС***-моделей наибольшую известность получили методы доказательства существования конфигураций, ранее именуемых таким экзотическим названием как «*Сад Эдема*», и связанные с ними проблемы существования и разрешимости. Однако, нами для подобного типа конфигураций был определен намного более естественный и научно-приемлемый термин «*неконструируемые*», ныне широко используемый в русскоязычной терминологии по *однородным структурам* (*клеточным автоматам*). Этот аппарат сформировался следующим образом. В самом начале своего становления ***ТОС*** состояла из ряда относительно самостоятельных проблем, решение каждой из которых потребовало создания и собственных подходов. Для решения данных проблем был использован и классический аппарат дискретной математики с учетом специфики исследуемого объекта – *однородных структур* **(*ОС*)**. Следует отметить, что именно специфика исследуемых свойств ***ОС***-моделей была здесь в основе определяющей, тогда как использование методов и результатов дискретной математики носило в значительной мере подчиненный характер. При этом, использование методов традиционной дискретной математики и, прежде всего, комбинаторики настолько пронизывает большинство используемых приемов, методов и подходов при исследованиях по ***ОС***-проблематике, что эти разделы совершенно уместно отнести к *базовому* уровню аппарата теории однородных структур [1,3-5,8,9,19,22,34-38,53-56,88,90,536].

В результате решения довольно широкого круга проблем возник своеобразный ***первый*** уровень аппарата исследований по ***ТОС**-проблематике*, ориентированного, в первую очередь, на решение сугубо специфических вопросов динамики конфигураций в классических ***ОС***-моделях. Первый уровень аппарата исследований составили методы изучения и полученные результаты по таким фундаментальным проблемам, как неконструируемость конфигураций, моделирование одной ***ОС*** другой, сложность конечных конфигураций, декомпозиция ***ГФП*** и целый ряд других. Таким образом, выросший из потребностей самой ***ТОС***-проблематики, *первый* (*базовый*) уровень такого аппарата исследований изначально был ориентирован на изучение весьма специальных свойств *динамики* ***ОС***-моделей. При этом, в процессе развития математической ***ТОС*** с многочисленными приложениями постоянно расширялся и сам арсенал средств и методов самого *базового аппарата* исследований по ***ТОС***–проблематике (табл. **2**), на сегодня ставшего достаточно внушительным. В настоящее время данный ***первый*** уровень постоянно расширяется новыми результатами.

Поскольку каждая ***ГФП*** в ***А***-алфавите внутренних состояний единичных автоматов ***ОС***-моделей взаимно однозначно определяется ***ЛФП*** в том же самом алфавите, а сама ***ЛФП***, в свою очередь, представима соответствующей функцией ***а***-значной логики, то для исследования свойств ***ГФП*** **(*ЛФП*)** аналитическими методами можно вполне успешно использовать хорошо разработанный аппарат ***а***-значных логик **(*а* ≥ 3)**. Именно его использование и позволило нам во многих деталях прояснить проблему *декомпозиции* ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях и продвинуть решение ряда других важных задач, связанных с их динамикой [12,23,28,32,54-56,72-74]. В случае бинарных ***ОС***-моделей весьма эффективно используется развитый аппарат булевой алгебры.

Так, для решения вышеупомянутой проблемы декомпозиции ***ГФП*** для классических бинарных ***ОС***-моделей был использован подход, базирующийся на функции ***К. Шеннона***, введенной для оценки сложности реализации функций алгебры логики [28]. Зачатки использования аппарата алгебры логики для исследования проблемы декомпозиции ***ГФП*** в *бинарных* ***1-ОС*** можно найти уже у ***Дж. Батлера*** [130]. На основе алгебры логики можно исследовать и специфические черты *передачи* информации в вычислительной среде *клеточных* и *систолических* процессоров, которые являются одним из практических выходов вычислительной ***ОС***-модели [536].

Между тем, применение ***а***-значных логик при составном ***а***-числе для исследования свойств ***ОС***-моделей встречает немало затруднений, что уже в случае исследования проблемы *декомпозиции* ***ГФП*** потребовало определения одного нового типа алгебраической системы **(*АС*)** [12,73,55,102] с полиномиальной арифметикой. Данный подход позволил использовать алгебраические методы для исследования ***ГФП*** **(*ЛФП*)** наряду с целым рядом других вопросов ***ТОС***-проблематики, ибо функции ***а***-значной логики могут быть представлены в такого типа ***АС*** в виде соответствующих полиномов по (*mod* ***a***). Следует однако отметить, что несмотря на такую весьма очевидную связь между ***ЛФП*** и функциями ***а***-значной логики, лишь сейчас они начинают довольно интенсивно использоваться в исследованиях как динамической, так и структурной теорий классических ***ОС***-моделей, а также целого ряда их прикладных аспектов [5,54-56,88,90,536].

В рамках исследования ***ЛФП (ГФП)*** у ***ОС***-моделей алгебраическими методами представляется также перспективным использование теории ***R***-функций [215], которые в определенном смысле подобны функциям ***a***-значной логики. Тем более, что данный подход может оказаться и весьма перспективным при переходе к новому классу *непрерывных* ***ОС-****моделей*, предполагающих весьма интересные теоретические и прикладные выходы.

С исследованиями проблемы декомпозиции ***ГФП ОС*** и целого ряда других вопросов динамики в классических ***ОС***-моделях связано и применение аппарата групп, полугрупп и алгебр. Данная возможность обусловлена тем очевидным фактом, что глобальные параллельные отображения, индуцируемые ***ГФП***, образуют *полугруппу* (*а при некоторых дополнительных предпосылках и группу*) относительно операции композиции. Данный подход вполне успешно использовали ***Г. Цейтлин*** для исследования ряда свойств ***ПО***-преобразований (*эквивалентных классическим* ***ОС-****моделям*) и ассоциированных с ними *модифицированных* алгебр ***Э. Поста*** [216], а также мы для исследования структуры разложения полугруппы всех *глобальных* параллельных отображений, индуцируемых ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях [72-74,88]. Интересно, что полученные в данном направлении результаты обусловлены комбинированным применением методов как теории полугрупп, так и базового аппарата исследований ***ТОС***-проблематики. Этот *алгебраический* подход представляется довольно перспективным при исследованиях целого ряда фундаментальных свойств, например, классических ***ОС***-моделей наряду с подходом на основе полиномиальной алгебры [90].

На основе методов линейной алгебры ***С.Л. Блюмин*** [129] получил и ряд интересных критериев наличия некоторых феноменов в *линейных* классических ***2-ОС*** специально определенного типа. Это позволяет говорить о возможности успешного использования классических алгебраических методов для качественного описания и исследования некоторых типов линейных ***ОС***-моделей. Исследуя взаимодействие единичных автоматов в клеточных пространствах, ***Э. Вагнер*** показал, что наиболее широко используемые в ***ОС*** индексы соседства (***Неймана, Мура, Кодда, Холланда*** *и др.*) могут быть описаны графо-групповыми методами на основе абелевых групп с конечным числом образующих [217].

Исследования свойств локальных и глобальных отображений, определяемых *классическими* ***ОС***-моделями, является одной из ключевых проблем ***ТОС***. Наибольшее число результатов в данном направлении получено для класса ***1-ОС*** [1,4,72,100,536]. Именно для этих целей использовалась весьма разнообразная техника исследований, из которой следует специально выделить методы изучения ***эндоморфизмов*** смещающихся динамических систем [116]. Данный подход является весьма естественным, учитывая вышесказанное о том, что *классические* ***ОС***-модели представляют собой собственный подкласс класса всех динамических систем. При подобном подходе основная техника исследования классических ***1-ОС*** опирается на свойства смещающихся динамических систем, которые оказались весьма хорошо приспособленными для анализа их методами теории графов [536].

Используя данную возможность, ***М. Насу*** получил ряд весьма интересных свойств *динамики* [124] ***ОС***-моделей на основе графо-топологического подхода. Он, в частности, показал, что многие из важных свойств *глобальных* параллельных отображений, индуцируемых ***ГФП*** *классических* ***1-ОС***, вполне можно рассматривать и как специальные случаи свойств отображений, индуцируемых гомоморфизмами графов. Целый ряд достаточно интересных свойств классических ***ОС***-моделей с использованием теории графов был получен также ***В.Б. Кудрявцевым, А.С. Подколзиным, А.А. Болотовым*** [158]. В последнее время для исследований классических ***ОС***-моделей интенсивно используются методы алгебраической теории графов и динамических *смещающихся* систем [219, 220,536]. На этом пути прослеживается тесная связь между методами теории графов и ***ТОС***. Так, группа французских математиков показала, что ***ОС***-модели можно использовать и для решения целого ряда проблем из теории графов, а именно: декомпозиция блоков, гамильтоновы циклы, минимизация деревьев и др., что дает еще один очень хороший пример обратного влияние ***ОС***-концепции на развитие других областей, в частности, чистой математики.

Из классической теории конечных автоматов ***(КА)*** хорошо известен широко используемый для их определения и исследования подход, который базируется на представлении ***КА*** посредством размеченного графа, определяемого следующим естественным способом. На содержательном уровне функционирование ***КА*** можно представить себе следующим образом. Если в некоторый ***t***-момент времени ***КА*** находится в одном из $s_t \in S=\{s_o,s_1,\dots,s_n\}$ *внутренних* состояний и на его вход поступает v_t-сигнал из алфавита $V=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, то в следующий ***(t+1)***-момент ***КА*** переходит в *новое* состояние $s_{t+1} \in S$, т.е. ***КА*** функционирует согласно программе, составленной из конечного числа команд вида: $v_t s_t \Rightarrow s_{t+1}$. Переходы ***КА*** из одного внутреннего состояния в другое могут описываться не командами, а матрицей переходов или размеченным графом. Между тем, *первый* способ определения ***КА*** малообозрим при довольно большом числе состояний и более удобным является именно графический способ его определения. В данном случае каждому внутреннему состоянию автомата сопоставляется *вершина* графа, а каждой команде $v_t s_t \Rightarrow s_{t+1}$ – *ребро*, которое ведет из s_t-вершины в s_{t+1}-вершину и помеченное v_t-символом. Тогда классическую ***ОС***-модель можно рассматривать как *бесконечный* автомат, определяемый командами вида $c_t \tau^{(n)}=c_{t+1}$, где c_t, $c_{t+1} \in C(A,d)$ – внутренние состояния автомата (*глобальные конфигурации*) и $\tau^{(n)}$ – вход (*глобальная функция перехода*), который постоянен и на графе состояний отдельно не отмечается. Поэтому для исследования динамических свойств классических ***ОС***-моделей вполне приемлем и подход на основе *графов состояний*, используемый достаточно эффективно [5,72,88,90,145,147,158,160,166-169,217,219,244,303,307,385,536].

Динамические свойства всех бесконечных периодических конфигураций в классических ***1-ОС*** интенсивно исследовались японскими математиками школы ***Хисао Ямада*** [219] и ими в данном направлении получен целый ряд весьма интересных результатов. Для исследований подобной проблематики все интенсивнее начинают использоваться и методы классической теории чисел. В этом направлении интересные теоретико-числовые трактовки генерируемых одномерными ***ОС***-моделями конфигураций и их взаимосвязью с проблемой *неконструируемости* можно найти в интересной работе [221], а также и в некоторых других работах [536].

Рассматривая глобальные параллельные отображения, которые индуцируются классическими ***ОС***-моделями на множестве всех конечных конфигураций, можно показать [4], что каждая ***ГФП*** является *словарной примитивно-рекурсивной* функцией [72-74]. Поэтому некоторые динамические свойства ***ОС***-моделей могут описываться и исследоваться также на основе теории рекурсивных функций. Использование данного подхода позволяет получать довольно *изящные* доказательства динамических свойств ***ОС***-моделей. При этом, нами рассматриваются только соответствующие словарные функции и области их значений. Данный подход оказался весьма эффективным при исследованиях алгоритмической разрешимости некоторых проблем динамики ***ОС***-моделей [4,5, 72-74]. К его недостаткам (*даже не взирая на возможность применения довольно хорошо разработанного аппарата рекурсивных функций при решении ряда проблем алгоритмического характера*) нам следует отнести неконструктивность доказательств, тогда как в силу специфики *концепции* ***ОС***-моделей и их приложений во многих случаях на *первый* план выдвигается конструктивность получаемых результатов и прозрачность их интерпретации в той либо иной прикладной области.

Теория формальных грамматик ***(ТФГ)*** в настоящее время довольно хорошо развита и весьма тесно примыкает к общей теории абстрактных автоматов. Поэтому, изучение динамики ***ОС***-моделей с точки зрения определяемых ими *параллельных* грамматик и генерируемых параллельных языков представляет несомненный интерес. Впервые исследование *классических* ***ОС***-*моделей* в контексте

ТФГ было начато нами в ***1974*** и впоследствии данной темой занимался ряд исследователей [9,50, 77,78,222,536]. Методы на основе ***ТФГ*** позволили не только исследовать *параллельные* грамматики и языки, определяемые ***ОС-***моделями, но и привнесли немало нового в собственно *проблематику* однородных структур как классических, так и недетерминированных. Однако наши результаты относятся в основном к одномерному случаю. В настоящее время возрастает интерес к изучению параллельных грамматик, языки которых являются не множествами строк (*слов*), а множествами областей в ***d-***мерном ***(d > 1)*** пространстве. Это позволяет нам перенести методы и проблематику многомерных параллельных грамматик и на общий случай ***ОС-***моделей, и наоборот. При этом, исследованиям подвергаются формальные языки, определяемые как детерминированными, так и недетерминированными ***ОС-***моделями. Подобный подход представляет весьма определенный интерес не только с точки зрения собственно ***ТОС***, но также в плане лингвистического описания ***ОС-***подобных моделей *клеточных* динамических систем различной природы и назначения. При этом, определенную *значимость* данная проблематика представляет и для теории параллельных языков программирования, а также для теории алгоритмов и вычислений. Более того, подобно случаю традиционных формальных грамматик ***ОС-***модели можно исследовать в рамках класса комбинаторных систем со специальными сугубо параллельными продукциями [379]. Целый ряд достаточно интересных работ посвящен именно вопросам языков, допускаемых ***ОС-***моделями и распазнаваемых ими [536].

Вопросам сложности алгоритмов и вычислений уделяется в вычислительных науках (*и не только в них*) достаточно много внимания. При этом, теория сложности в значительной мере зависит и от положенных в ее основу вычислительных моделей и мер сложности. С целью сопоставления результатов по иерархии сложности относительно различных вычислительных моделей можно использовать метод моделирования одного алгоритма другим, однако это далеко не всегда дает желаемые результаты. Так, например, ряд сравнительных вычислений на машинах Тьюринга и классических ***1-ОС*** показывает, что могут иметь место определенного рода *смещения* в иерархии сложностей (*вплоть до ее частичного нарушения*), которые возникают при переходе от одного типа вычислительных моделей к другому [72,87,536]. Поэтому, несмотря на развиваемую ***М. Блюмом*** и его последователями идею аксиоматического построения теории сложности, не зависящей от конкретной концепции вычислительной модели, значительный интерес представляют и теории *сложности* на основе специальных концепций алгоритмов и мер сложности. Это особенно важно с точки зрения прикладных аспектов ***ТОС-***проблематики и теории вычислений. В частности, в случае *первой* – это параллельная обработка информации, моделирование в биологии развития, физическое моделирование и целый ряд других весьма важных прикладных аспектов [536].

На сегодня существует целый ряд работ по применению методов синергетики и теории хаоса к исследованию динамики ***ОС-***моделей [536]. Например, в [541] проиллюстрировано применение двух различных определений хаоса, введенных для *общих* дискретных временных динамических систем ***(DTDS)***, к случаю одномерных ***ОС-***моделей. Имеются работы, описывающие поведение, наблюдаемое в классе т.н. *диссипативных* ***ОС-***моделей [541], т.е. моделей, для которых внешняя среда может так или иначе вводить «*энергию*» для динамического влияния на историю развития ***ОС-***моделей. Ряд других довольно интересных работ в этом направлении можно найти в [536].

Исследование же класса стохастических ***ОС-***моделей естественно предполагает использование и статистических, и стохастических методов. Так, например, при исследовании асимптотики ряда классов стохастических ***ОС-***моделей нами были использованы хорошо известные результаты по стохастическим матрицам и цепям *Маркова* [4,39]. Ряд исследователей использовали статистико-стохастические подходы при исследовании того либо иного класса стохастических ***ОС-***моделей [136,142,150,171,536]. При этом, наиболее активно в данном направлении работают ***С. Вольфрам*** и его сотрудники [132-134,136,138,155, 536]. Статистические методы могут быть использованы и в исследованиях *детерминированных* ***ОС-***моделей. В частности, *локальная* структурная теория [142] базируется на использовании статистических методов при исследованиях детерминированных клеточных систем и представляет некую аналитическую альтернативу методу Монте-Карло при исследованиях ***ЛФП*** в ***ОС***-моделях. Ряд методов исследования ***ОС***-моделей можно найти также в разделе ***8.4*** настоящей монографии.

Для исследования ***ОС***-моделей используются и традиционные средства статистической физики. Например, расширения *Чепмена-Энскога* используются для исследования *динамики* ***ОС***-моделей. Для характеристики динамики ***ОС***-моделей использовались и методы перенормировки. Также широко используются *символическая* динамика наряду с экспонентами *Ляпунова*, вычислениями энтропии и фрактальной размерностью. Хорошие обзоры данных подходов можно найти у ***R.V. Badii*** и ***A. Politi*** [536], а также у ***А. Ильяшинского*** [542]. Целый ряд работ, использующих данные подходы, можно найти и в других ссылках из библиографии [536].

Наряду с исследованием ***ОС***-моделей методами и средствами собственно самой ***ТОС*** (*ее базовый аппарат*) и рассмотренных выше разделов математики и кибернетики довольно перспективным представляется нам исследование динамики ***ОС***-моделей средствами и методами общей теории систем. Показано [63], что классические ***ОС***-модели вполне естественным образом вписываются в определенный класс динамических систем (*стационарных однородных динамических систем*) и их можно исследовать новыми достаточно мощными средствами. Ряд свойств специальных классов ***ОС***-моделей можно исследовать в рамках алгебраических методов пространства состояний. Так, в работах ***Г. Вунша*** [137] методами теории систем исследуются линейные дискретные клеточные системы. Теория клеточных систем основывается на многочленах от нескольких действительных или комплексных переменных и теории функций, и представляет собой цифровую реализацию теории многомерных систем. Итак, *клеточная* система может быть получена из соответствующей многомерной системы методом *дискретизации* по пространственным и временным переменным. Тогда квантование алфавитов многомерной системы приводит непосредственно к понятию ***ОС***-модели в ее общем понимании. ***Г. Вунш*** и его последователи предложили целый ряд подходов к исследованию таких систем. Вышеуказанные результаты могут оказаться весьма полезными при исследованиях детерминированных и стохастических ***ОС***-моделей, являющихся собственными *подклассами* класса всех клеточных динамических систем [613].

Действительно, отказ от линейности граничных условий и ограничение числа состояний клеток системы приводит к понятию *классических* ***ОС***-моделей, тогда как отказ от *детерминированности* функций переходов – к *стохастическим* ***ОС***-моделям. Естественно, исследование ***ОС***-моделей в рамках клеточных систем накладывает свои ограничения на использование *собственных* методов таких систем, однако здесь появляется реальная возможность получения аппарата исследования и неклассических ***ОС***-моделей. С другой стороны, результаты и методы собственно ***ТОС*** могут оказаться весьма плодотворными также и для самой теории клеточных систем. Таким образом, изучение ***ОС***-моделей средствами такой междисциплинарной теории, как общая теория систем, позволит значительно легче устанавливать аналогии между целым рядом процессов, объектов, явлений и феноменов, моделируемых в среде однородных структур [536].

Более того, в настоящее время имеется ряд очень веских доводов в пользу того, что существенное продвижение в деле построения абстрактной теории систем возможно на основе использования модулей над кольцом полиномов. Данный подход, возможно, даст возможность на существенно более общем уровне охватить целый ряд классов динамических систем, включая и *параллельные* дискретные динамические системы, собственным *подклассом* которых являются вычислительные ***ОС***-модели, рассматриваемые нами в настоящей монографии.

Как уже отмечалось, ***ОС*** представляют собой не только прекрасную среду моделирования, но и самостоятельный класс математических объектов, которые могут быть (*и должны*) исследоваться соответствующими математическими методами, разработанными для иных целей. В частности, ряд средств, используемых для описания и классификации дискретно-временных отображений могут быть распространены и на ***ОС***-модели, в частности, в случае систематического изучения рекуррентных конфигураций, ибо они хорошо характеризуют временную асимптотику такого типа моделей. При этом, исследование необратимых ***ОС***-моделей представляют особый интерес для изучения сложных динамических систем. Формальные математические исследования ***ОС***-моделей, базирующиеся на различных подходах и средствах из разичных разделов современной математики, представляет собой весьма обширное поле деятельности, все еще полное открытых вопросов, чьи результаты уже достаточно значительны. Однако усилия в данном направлении вполне оправданы, ибо только в дискретной математике ***ОС***-модели играют роль, аналогичную той, которую играют дифференциальные уравнения в непрерывной математике [5,88,536].

Целый ряд интересных методов исследования был предложен при решении специальных задач ***ТОС***-проблематики. Так, ***К. Кобаяши*** для решения хорошо известной проблемы синхронизации сети автоматов [124] использовал следующую модификацию ***ОС***-модели. Каждый ее единичный автомат располагает конечными регистрами, определяющими пути движения некоего особого «*путешествующего*» автомата ***(ПАВ)***, являющегося единственным в структуре. Такой ***ПАВ*** может двигаться в структуре вдоль линий связи от одного единичного автомата к другому, производя необходимые действия. Подобная ***ОС***-модель позволяет сводить решение данной и целого ряда других проблем к разработке соответствующих алгоритмов движения ***ПАВ*** в этой структуре. До определенной степени подобный метод был предложен нами для исследования операционных систем на предмет возможности распараллеливания выполняемых ими управляющих функций, которые в общем случае вполне можно *классифицировать* [54,58] как функции поиска требуемых вычислительных ресурсов. Между тем, наш подход имеет и существенные отличия. Например, каждый единичный автомат ***ОС***-модели снабжен регистром, имеющим *специальную* структуру – одна часть регистра служит для организации связей между соседними автоматами в структуре для *избирательной* передачи информации, тогда как другая часть предназначена для *управления* работой функциональной части единичного ***z***-автомата. Движущиеся автоматы в данной ***ОС***-модели отсутствуют, упрощая вопросы конкретной реализации средствами микроэлектроники. В рамках предложенной ***ОС***-модели можно сформулировать многие задачи как теоретического, так и прикладного характера в терминах известной проблемы о нахождении кратчайших путей между единичными автоматами в ***ОС***-модели.

Так, например, было показано [4], что в специальным образом структурированной ***ОС***-модели существует параллельный алгоритм, позволяющий идентифицировать минимальный путь от произвольного единичного автомата до любого заданного за время не большее, чем ***2*L***, где ***L*** – кратчайшее расстояние между двумя искомыми автоматами ***ОС***-модели. Несколько иного типа структуры единичных автоматов ***ОС***-модели предлагались нами и рядом других исследователей для моделирования процессов и феноменов в биологии развития, а также для реализации ряда алгоритмов параллельной обработки информации в однородных вычислительных структурах, системах и средах [1,3-5,12,15,26-28,41,44,45,54,58,65,75,88,90,135,146,155,168,173-177,182,183,186,190, 202,224,229,235,244,339,536,586].

Вышеописанный подход вполне можно определить как *структурный*, когда в целях упрощения исследования проблемы и интерпретации получаемых результатов единичный ***z***-автомат ***ОС***-модели наделяется определенной структурой (*детализируется алгоритм его функционирования*), ориентированной на те или иные цели исследования. Подобный подход используется также и при погружении в среду ***ОС***-моделей параллельных алгоритмов. Следует отметить, что данный *структурный* подход на сегодня является одним из наиболее эффективных при исследованиях в ***ОС***-моделях проблем оптимизационного характера. Само формирование структурного подхода представляет не только чисто методологический и теоретический интерес, но также позволяет и достаточно эффективно исследовать ряд сугубо прикладных вопросов, связанных с проблемами моделирования на основе общей ***ОС***-концепции.

К структурному в определенной степени примыкает и так называемый *симуляционный* подход, суть которого сводится к следующему. Для удобства и простоты исследования того либо иного класса проблем, а также интерпретации полученных для них результатов один тип ***ОС***-модели заменяется *эквивалентным* ему другим типом. Так, например, для исследования в классических ***ОС***-моделях ряда проблем было определено понятие структуры ***ОС**** (раздел ***1.2***), эквивалентной соответствующей классической ***ОС***-модели. Показано, что в целом ряде отношений структуры ***ОС**** представляют собой значительно более удобное средство описания и исследования многих конкретных параллельных процессов, объектов и явлений, погружаемых в среду классических ***ОС***-моделей. Практическое использование понятия ***ОС**** для задач моделирования различных дискретных процессов однозначно показало, что определенные таким образом структуры могут служить достаточно удобной формальной основой для разработки высокопараллельных языков программирования для вычислительных ***ОС***-моделей, наряду с эффективным промежуточным средством решения целого ряда проблем для классических ***ОС***-моделей [4,12,72,75,83,108,536].

К симуляционному (*а также в связи с прикладными аспектами*) примыкает и метод *моделирования*. Суть данного метода состоит в моделировании одной ***ОС*** другой с удовлетворением некоторых указанных условий либо в моделировании структурой известных алгоритмов (*как параллельных, так и последовательных*) переработки слов в конечных алфавитах, и наоборот. Моделирование данного типа может ставить перед собой самые разнообразные задачи [1,4,12,26-28,32,52,54-56,71-74,88,108,113-115,120-122,135,139,145-150,156,161,173-177,179-188,192-196,202-208,229,244,536]. Метод моделирования по своей сути является конструктивным и может вполне успешно сочетаться и с другими методами, включая неконструктивные методы. Так, например, моделируя ***SS***-машины посредством классических ***1-ОС*** и используя неконструктивные методы из теории рекурсивных функций, было доказано [1] существование креативных множеств исчезающих конечных ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях. Метод моделирования во многих случаях позволяет навести своего рода мосты между чисто теоретическими результатами и прикладными аспектами самой ***ТОС***-проблематики, в которых он до сих пор является одним из основных методов исследования.

Работая с классическими методами посредством карандаша и бумаги, исследователь старается оперировать небольшим количеством символьных объектов, обладающих весьма значительной концептуальной глубиной (*векторы, матрицы, различного рода операторы*), что обусловливается спецификой и возможностями человеческого мозга. Именно это обстоятельство, по-видимому, объясняет тот факт, что задачи как *комбинаторного*, так и *оптимизационного* характера считаются одними из наиболее сложных для исследования. И только с появлением современных ЭВМ и, в первую очередь класса ***ПК***, очень существенно расширилось исследование дискретных систем и систем с большим числом распределенных переменных. Типичным примером такой тенденции является очень широкое компьютерное исследование ***ОС***-моделей, которые представляют собой один из классов дискретных параллельных динамических систем и чье изучение формальными математическими методами (*в смысле вышесказанного*) в целом ряде случаев встречает серьезные затруднения. Поэтому в последнее время существенно увеличилось количество различного рода результатов по динамическим свойствам ***ОС***-моделей сугубо эмпирического характера [108,138, 139,149,155,156,258,268,269,349,355,536].

Действительно, в последнее время все более существенно в исследованиях по ***ОС***-проблематике применяется компьютерный метод. Учитывая сложность как изучаемых в ***ОС***-моделях объектов, процессов и явлений, так и сложность самой динамики структур, которые весьма существенно, порой, возрастают при определении новых классов структур (*полигенные, недетерминированные, стохастические и др.*), мы вынуждены обращаться к помощи современных типов ЭВМ, которые снабженны развитыми средствами диалога и отображения информации. В значительной мере этому способствует и массовое распространение класса *персональных компьютеров* (***ПК***), которые по многим важнейшим показателям не уступают мини-ЭВМ и даже ЭВМ более старших классов

[17,33,96]. Использование ЭВМ для исследований по ***ТОС***-проблематике восходит к началу ***70-х***, когда стали появляться *первые* программные средства для моделирования однородных структур с целью исследования тех или иных их аспектов и к настоящему времени таких средств имеется достаточно много, реализованных с различной степенью охвата задач моделирования структур и ориентированных на различные компьютерные платформы [1,3,4,6-11,13,17-19,22,26-28,32,108, 113,118,155,156,163,174-176,229,232,239,242,244,269,536]. Данные локальные программные средства позволили прояснить целый ряд интересных вопросов по ***ТОС***-проблематике. Так, в частности, компьютерное моделирование позволило в существенной мере исследовать некоторые аспекты проблемы неконструируемости в классических ***1-ОС*** и динамики ***2-ОС*** с рефрактерностью [1,4, 5,7-10,269]. В рамках последующего развития данного подхода был разработан и ряд достаточно развитых программных человеко-машинных систем [15,96,103,108,155,536], ориентированных на многоплановые исследования по ***ТОС***-проблематике. Ряд таких средств рассматривается ниже.

Для многоцелевого исследования как теоретических, так и прикладных аспектов ***ОС***-моделей, как одного из подклассов класса всех дискретных параллельных динамических систем ***(ДПДС)***, была разработана система ***A-SVEGAL***, представляющая собой интегрированный *интерактивный* пакет для IBM-совместимых ***ПК*** [6,12,103]. Базовой частью пакета является система, позволяющая исследователю достаточно легко контролировать процесс вычисления динамики симулируемой ***ОС***-модели и управлять всем ходом вычислений так, что он может посвятить большинство своей интеллектуальной энергии собственно самому изучению интересующих его проблем, а именно: проверке и выдвижению гипотез, принятию решений, мониторингу, регистрации исследуемых процессов, объектов, явлений, феноменов и так далее.

Разработка и эксплуатация пакета ***A-SVEGAL*** и целого ряда несколько более узкого назначения из программных средств, предназначенных для компьютерного симулирования ***ОС***, позволили в значительной мере уяснить ряд важных вопросов, связанных с моделированием ***ДПДС*** на ЭВМ классической последовательной фон-неймановской архитектуры и рассмотреть ряд интересных проблем разработки параллельного программного обеспечения. Например, была подтверждена весьма существенная сложность моделирования ряда *динамических* аспектов ***ТОС***-проблематики на вычислительной технике, исповедующей чуждую ей последовательную модель вычислений. Именно поэтому ряд исследователей для создания более эффективных симулирующих средств для исследования ***ОС***-моделей и отказались от использования традиционных вычислительных средств, разработав целый ряд систем, базирующихся непосредственно на вычислительных ***ОС***-моделях [138-141,149,154,164,167,223,231,238,349,355,365,536]. Из средств такого типа наибольшую известность получили так называемые машины клеточных автоматов – ***C****ellular* ***A****utomata* ***M****achines* ***(САМ)*** [139,154,165], разработанные в ***МТИ*** (*США*) под руководством ***Т. Тоффоли*** и ***Н. Марголуса***. Эти ***САМ***-машины ориентированы на проведение различных экспериментальных исследований в ***ТОС***-проблематике и эффективной демонстрации функционирования ***ОС***-моделей в режиме реального времени. В настоящее время ***САМ***-машины уже производятся в коммерческих целях и широко используются в целом ряде научно-исследовательских центров при решения различных задач, прежде всего, физического характера [154,155,165,536].

Вместе с тем, задачи моделирования ***d-ОС*** на ЭВМ *традиционной* архитектуры относятся к классу задач так называемой ***NP***-сложности, ибо время их моделирования определяется соотношением $T(m) \approx \alpha x m^d$, где ***m*** – длина ребра ***d***-мерного куба, содержащего *активную* область моделируемой структуры, и α – числовая функция, не убывающая с ростом сложности ***ЛФП***. Именно поэтому весьма активизировались работы по созданию ***ОС***-подобных вычислительных систем для задач моделирования различного типа ***ОС*** [355,536].

Одним из довольно перспективных путей программного исследования ***ОС***-моделей являются и подходы на основе генетического программирования. Генетические алгоритмы, используемые для исследования ***ОС***-моделей, позволяют, в частности, выявлять локальные функции перехода, соответствующие которым глобальные функции перехода ***ОС*** определяют требуемую *динамику* [536]. Генетические алгоритмы в применении к ***ОС***-моделям можно представлять, в частности, следующим образом. К ***ЛФП ОС***-модели добавляется механизм случайного изменения правил перехода (*мутации*). Например, такой подход позволяет отыскивать кратчайший путь на графе. Структура графа кодируется некоторым образом в *хромосомах* единичного автомата ***ОС***-модели. При этом, предполагается, что алгоритмы, приобретенные вследствие мутаций и наследования, будут соответствовать решениям поставленной задачи и не только отмеченной. На наш взгляд, генетические алгоритмы могут способствовать обнаружению интересных типов ***ОС***-моделей. А так как ***ОС***, вообще говоря, можно рассматривать не только как некие модели распределенных динамических систем, но также в качестве *парадигмы* распределенных вычислений, то их вполне можно исследовать и средствами теории вычислений. Это тем более актуально, что обратимые ***ОС***-модели, сохраняющие информацию о своей временной истории, обеспечивают обратимые вычисления, представляющие особый интерес с точки зрения разработки новых перспективных параллельных архитектур вычислительных средств.

На этом завершается краткий обзор основных методов, подходов и средств, используемых при исследованиях по ***ТОС***-проблематике, итоговая совокупность которых представлена в табл. **2**. При этом, следует отметить ряд существенных моментов. Во-первых, основное внимание было нами уделено *динамическим* аспектам теории *классических* ***ОС***-моделей. Между тем, *структурные* аспекты ***ОС***-моделей носят существенно более прикладной характер и требуют привлечения и иных методов, имеющих сугубо конструктивные черты, хотя и здесь применимы некоторые из перечисленных подходов и методов. Во-вторых, только вскользь отмечался и обратный эффект применения перечисленных методов и их влияние на стимулирование дальнейшего развития самих этих методов. Так, например, использование алгебраического подхода повлекло за собой определение новой алгебраической системы [54,102], исследование стохастических ***ОС***-моделей способствовало получению ряда результатов по стохастическим регулярным матрицам [5,39,88], а исследования по динамике конечных ***КФ*** и проблеме декомпозиции ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях способствовали дальнейшему развитию подходов к понятию сложности [5,9,72-74,82,88, 90,108,536] и так далее.

Наконец предполагается, что представленный здесь обзор методов и подходов к исследованиям по ***ТОС***-проблематике вызовет полезные дискуссии и будет способствовать более интенсивному внедрению указанных методов (*составляющих* ***аппарат*** *исследования*) в практику исследования и применения ***ОС***-концепции во всей ее полноте довольно широкими кругами исследователей и, в первую очередь, специалистами из соответствующих областей. Традиционным отечественным исследователям по ***ТОС***-проблематике этот обзор позволит расширить кругозор по возможному *аппарату* исследований и даст определенные подсказки по методам решения собственных задач. По нашему мнению, все это позволит довольно существенно активизировать исследования по ***ТОС***-проблематике и будет способствовать скорейшему становлению собственного и развитого аппарата исследований, наиболее приспособленного именно к специфике *однородных* структур и их многочисленных приложений. Естественно, будучи одним из типов динамических систем, а также формальных систем переработки слов, ***ОС***-модели допускают для своего исследования и намного более широкий спектр средств из областей, не упомянутых нами выше, с которыми заинтересованный читатель сможет ознакомиться в представленной библиографии [536].

Глава 2.
Проблема неконструируемости в классических однородных структурах

2.1. Предварительные сведения по проблематике

Вопросы ***неконструируемости*** являются фундаментальными в математической теории ***ОС*** и ее многочисленных приложениях, особенно при использовании ***d-ОС*** в качестве концептуальных и прикладных моделей пространственно-распределенных дискретных динамических систем, из которых реальные физические системы являются наиболее предпочтительными прототипами. Именно поэтому данная *проблематика* открывает вопросы рассмотрения теоретических аспектов ***ОС***-моделей. Достаточно серьезный гносеологический интерес проблема неконструируемости представляет в случае погружения в ***ОС***-модели космологических феноменов и объектов. Здесь она может ассоциироваться с различными аспектами проблемы достижимости тех либо других состояний либо образований при формировании особых космологических объектов. Аналогом отсутствия ряда типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях может быть, например, *обратимость* основных физических процессов и феноменов [1,3,5,30,53-56,90,150-152,157,268,273]. Данная проблематика становится все более актуальной как ввиду формирования современных пространственно-временных физических теорий, так и в связи с рядом попыток интерпретации разнообразных явлений и феноменов *аномального* с традиционной точки зрения характера. При этом, центральной проблемой ***ТОС*** является задача характеризации *глобальной* динамики ***d-ОС*** как функции ее ***ЛФП***. Так как изучение историй ***КФ*** в ***ОС***-моделях играет основную роль при исследовании их динамики, то весьма важно получить условия существования так называемых *неконструируемых* ***КФ (НКФ)***. Проблема неконструируемости имеет место как для моногенных, так и для полигенных ***d-ОС***, а также в определенной мере и для конечных структур [1,3,5,8,9,30, 43,53-57,61-64,66,68-74,80,90,128,131,135,138,150,239,244,248,255,269,307,314]. Вместе с тем, наряду с перечисленным проблема *неконструируемости* может рассматриваться и как достаточно важная составляющая собственного аппарата исследований по динамике классических ***ОС***-моделей.

Целому ряду особенностей данной проблематики для класса конечных ***ОС***-моделей посвящен последний раздел главы и ей уделялось немало внимания, прежде всего, японской школой [135, 185,230]. Тогда как для *полигенных* ***d-ОС*** эта проблема известна как проблема *полноты*: ***Может ли любая конечная КФ быть сгенерирована из заданной начальной примитивной КФ посредством конечной последовательности ГФП полигенной ОС-модели?*** Исследованием проблемы полноты занимался целый ряд исследователей, получивших много весьма интересных результатов в этом направлении [1,5,90,184-187,240,248,256,294,304]. Для решения этой проблемы была использована техника, впервые предложенная ***Ямада-Аморозо*** [256], а также и теория графов, использованная ***Насу-Хонда*** [248]. Здесь ***Х. Ямада*** и ***С. Аморозо*** доказали, что: ***Существует некоторая бинарная конечная конфигурация, которая не может быть сгенерирована из примитивной КФ Со путем применения к ней какой-либо последовательности ГФП бинарных полигенных 1-ОС с шаблоном соседства размера n=2.*** Опуская здесь ряд промежуточных результатов, окончательное решение проблемы было получено ***А. Маруока*** и ***М. Кимура***, доказавшими следующий довольно важный результат [244,245,526].

<u>Теорема 7</u>. Любая конечная КФ $c \in C(A,d,\phi)$ может быть сгенерирована из примитивной КФ $c_p \in C(A,d,\phi)$ посредством конечной последовательности глобальных функций перехода некоторой полигенной d-ОС, заданной в том же самом конечном A-алфавите внутренних состояний.

Теорема **7** дает полное решение проблемы *полноты* в полигенных ***ОС***-моделях. Однако, наряду с этой проблемой рассматривается также проблема полноты при условии монотонной генерации конечных конфигураций [248,256,536,567].

Проблема *полноты* в определенной мере характеризует *конструктивные* возможности *полигенных* ***ОС***-моделей и ее положительное решение доказывает довольно широкие возможности данного типа однородных структур по генерации ими конечных ***КФ***. Действительно, на базе результата теоремы **7** было показано, что: ***из любой ненулевой конфигурации $c_o \in C(A,d,\phi)$ путем применения к ней конечной последовательности ГФП полигенной ОС-модели можно сгенерировать любую наперед заданную КФ $c \in C(A,d,\phi)$*** [3]. Доказательство данного утверждения весьма просто. Здесь мы представим лишь набросок доказательства. Не теряя общности, рассмотрим класс *полигенных* ***1-ОС***. Пусть $c_o \in C(A,1,\phi)$ – произвольная ***КФ*** $c_o = \square x_1 x_2 \dots x_h \square$ ($x_j \in A$; $j=1..h$, $\square$ – нулевая ***КФ***) длины h и $\tau_1^{(2)}$ – *глобальная* функция перехода структуры, определенная *локальной* функцией перехода $\sigma_1^{(2)}$ следующим образом, а именно:

$$\sigma_1^{(2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & if \quad \langle x_1x_2 \rangle = \langle 00 \rangle \\ 1, & otherwise \end{cases} \qquad \sigma_2^{(2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & if \quad \langle x_1x_2 \rangle = \langle 01 \rangle \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

и $\tau_2^{(2)}$ – глобальная функция перехода, определяемая локальной функцией перехода $\sigma_2^{(2)}$. Но тогда очень легко заметить, что имеет место соотношение $c_o \tau_1^{(2)t} \tau_2^{(2)} = c_p$. Таким образом, наше утверждение о полной конструируемости для случая полигенных ***ОС***-моделей легко следует из данного соотношения и теоремы **7**. Не взирая на непосредственную связь проблемы полноты с другими вопросами динамики ***ОС***-моделей, более детально она рассматриваться здесь не будет, однако ниже отдельные результаты по ней будут обсуждаться в контексте других вопросов ***ОС***-проблематики. Заинтересованный же читатель отсылается за более детальной информацией к цитированной выше литературе и к библиографии [536].

Совершенно иная картина имеет место для случая классических ***ОС***-моделей. В рамках данной проблематики исследуются также и проблемы ***сюръективности*** и ***инъективности*** глобальных отображений, индуцируемых ***ГФП*** классических ***ОС***-моделей. Детальный анализ результатов в данном направлении представлен в работах [1,3,5,54,88,90,138,156,184-187,270-282]; некоторые из них приводятся ниже. Первые исследования по проблеме неконструируемости (*в нашей, однако уже хорошо устоявшейся русскоязычной терминологии*) восходят к работам ***Э. Мура*** и ***Дж. Майхилла*** [1,123,128,230,274,275], породившим целый ряд весьма интересных исследований и результатов в данном направлении. Между тем, в определенном смысле можно отметить, что собственно сама математическая ***ТОС*** выросла из данной проблематики, которая до сих пор сохраняет свои как актуальность, так и привлекательность. В настоящей главе представлены *наиболее* существенные результаты и современное состояние проблемы *неконструируемости* в классических ***ОС***-моделях наряду с обсуждением дальнейших путей исследований в данном направлении ***ТОС***-тематики.

В первую очередь, с целью охвата всех типов ***неконструируемости*** вводится четыре класса ***НКФ*** и устанавливаются соотношения между ними, расширяя полученные на сегодня результаты в данном направлении. Устанавливается ряд критериев существования в классических ***1-ОС*** того либо другого типа ***НКФ***. При этом, одни из них более удобны для теоретических качественных исследований, другие позволяют получать более приемлемые оценки для основных числовых характеристик ***ОС***-моделей. Особое внимание уделяется алгоритмическому аспекту проблемы *неконструируемости*, а также взаимосвязи его с другими вопросами динамики классических ***ОС***-

моделей. В дальнейшем изложении ***НКФ***-проблематики, если нами не оговорено противного, основное обсуждение будет проводиться для случая ***1-ОС***, хотя большинство результатов здесь обобщаются и на случай классических структур высших ***d***-размерностей ***(d ≥ 2)***. Приводимые в главе результаты решают проблему неконструируемости в целом, тогда как рассматриваемые в данном направлении более специальные вопросы позволяют исследовать проблему в деталях. Наряду с этим полученные результаты по ***НКФ***-проблематике позволяют сформировать весьма эффективный аппарат исследования динамики классических ***ОС***-моделей.

2.2. Типы неконструируемости в классических ОС-моделях

Представление всех типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях начнем с понятия, восходящего к ***Э. Муру*** и ***Дж. Майхиллу*** [128,274,275], которые на его основе получили целый ряд основополагающих результатов по *динамике* ***ОС***-моделей и в значительной мере стимулировали теоретические исследования по ***ОС***-проблематике в целом.

<u>Определение 1</u>. Конфигурация $c_b \in C(A,d,B)$ конечного d-мерного B-гиперкуба (блока) единичных автоматов в d-ОС называется неконструируемой (НКФ) только тогда, когда не существует КФ $c \in C(A,d)$ такой, что $c_b \subset c\tau^{(n)}$ $(d \geq 1)$.

Из данного определения следует, что ***КФ*** конечного блока единичных автоматов является в ***ОС***-модели ***НКФ*** только тогда, когда она не может быть подконфигурацией некоторой ***КФ*** модели в момент времени, отличный от нулевого *(начального)*. Такую *неконструируемость* будем называть ***блочной*** (*либо* ***НКФ****-типа*). Если блочная ***c_b-КФ*** конструируема, у нее будут ***c***-предшественники ***($c_b \subset c\tau^{(n)}$)*** как из ***$C(A,d,\phi)$***-множества, так и из ***$C(A,d,\infty)$***-множества. Это с очевидностью следует из возможности имплантации в любого типа начальную ***КФ ОС***-модели блочной ***$c`_b$-КФ*** такой, что имеет место следующее соотношение, а именно: ***$xc`_b y\tau^{(n)} = c_b$*** $\{x,y \in C(A,d)\}$.

Данное понятие неконструируемости является наиболее сильным (*в определенной мере его можно называть «****абсолютным****»*). Вместе с тем, в свое время оно породило целый ряд недоразумений и дискуссий, в результате чего само понятие *неконструируемости* в классических ***ОС***-моделях было нами детально проанализировано и дифференцировано [1,3,5,9,30,43,53-56]. Выбирая в качестве допустимых конфигураций некоторое множество ***$C \subset C(A)$***, можно определять и ***относительную*** *неконструируемость* в противовес *абсолютной неконструируемости* (*определения* ***1,4***), что позволяет не только существенно детальнее исследовать саму суть неконструируемости в ***ОС***-моделях, но и получить довольно мощные средства исследования многих динамических свойств *классических* ***ОС***-моделей.

<u>Определение 2</u>. Конфигурацию B_s конечного d-мерного гиперкуба единичных автоматов в d-ОС будем называть неконструируемой относительно S-множества (НКФ$_S$) только тогда, когда не существует КФ $c^* \in S \subseteq C(A,d)$ такой, что $B_s \subset c^*\tau^{(n)}$.

Очевидно, что в случае ***$S \equiv C(A,d)$*** понятия ***абсолютной*** и ***относительной*** неконструируемостей совпадают. В противном случае каждая ***НКФ*** является в той же ***ОС***-модели ***НКФ$_S$*** относительно любого наперед заданного множества ***$S \subset C(A,d)$***, но не наоборот. Итак, понятие относительной неконструируемости в классических ***ОС***-моделях имеет целый ряд интересных интерпретаций теоретического и прикладного характера, стимулируя его дальнейшее исследование, которое в настоящее время весьма активизируется [536,567].

Собственно причина *дифференцировки* понятия неконструируемости в *классических* ***ОС***-моделях определяется дифференцировкой самого множества всех ***КФ C(A,d)*** на два непересекающихся подмножества *конечных* $C(A,d,\phi)$ и *бесконечных* $C(A,d,\infty)$ конфигураций $[C(A,d,\phi)\cup C(A,d,\infty)=C(A,d)$ и $C(A,d,\phi)\cap C(A,d,\infty)=\varnothing]$, которые относительно *параллельного* $\tau^{(n)}$-преобразования (*отображения*) неэквивалентны, а также используемыми определениями конфигураций. Так, если множество $C(A,d,\phi)$ замкнуто относительно $\tau^{(n)}$-преобразования ***ОС***, то множество $C(A,d,\infty)$, в общем случае, незамкнуто. Объясняется это наличием состояния «***покоя***», удовлетворяющего определяющему соотношению для локальной функции перехода структуры, а именно: $\sigma^{(n)}(x,x,x,\ ...,\ x) = x\ \{x\in A\}$. Такого типа ***ОС***-модели могут служить в качестве некоторого аналога физических реалий и на протяжении дальнейшего изложения мы, если не оговорено противного, будем рассматривать структуры именно такого типа.

Использование множеств *конечных*, *блочных* и *бесконечных* ***КФ*** позволяет существенно продвинуть дифференцировку и уточнение собственно понятия неконструируемости в классических ***d-ОС*** относительно предыдущего состояния этого вопроса [1,3,5,7]. Нетрудно убедиться, что понятие неконструируемости ***НКФ***-типа относится, в первую очередь, к блочным конфигурациям, что и позволяет нам рассматривать два неэквивалентных, в общем случае, класса неконструируемости *блочной* и *конфигурационной*. Действительно, пусть для ***1-ОС*** существует блочная конфигурация c_b, являющаяся для нее ***НКФ***. Но тогда согласно определения ***1 КФ*** $□c_b□=c\in C(A,d,\phi)$ также будет ***НКФ***; обратное же в общем случае неверно, о чем и свидетельствует следующий весьма простой пример. Рассмотрим классическую ***1-ОС*** с алфавитом $A = \{0,1,2\}$, простейшим индексом $X = \{0,1\}$ соседства и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$, определяемой параллельными подстановками следующего простого вида, а именно:

$$00 \Rightarrow 0 \quad 01 \Rightarrow 1 \quad 02 \Rightarrow 1 \quad 10 \Rightarrow 1 \quad 11 \Rightarrow 2 \quad 12 \Rightarrow 1 \quad 20 \Rightarrow 2 \quad 21 \Rightarrow 1 \quad 22 \Rightarrow 1 \tag{23}$$

Очевидно, при $c_o=□11□$ имеем $c_o\tau^{(2)}=□121□$, т.е. *блочная* ***КФ*** $c_b=2$ не является в структуре ***НКФ***. С другой стороны, конечная ***КФ*** $c_1=□2□$ является в структуре ***НКФ***. Действительно, предположим, что существует ***КФ*** $c_o\in C(A,1,\phi)$ такая, что выполняется соотношение $c_o\tau^{(2)}=c_1$:

t=0	c_o	=	------ 1 1 0 ------------
t=0	c_o	=	------ 2 0 0 ------------
t=1	c_1	=	..... 0 2 0 0 0 ----------
автоматы:			.... -1 0 1 2 ....

Попытаемся выяснить вид данной c_o-***КФ***, исходя из ***ЛФП 1-ОС***, определенной параллельными подстановками ***(23)***. Легко убедиться, что для получения в ***0***-автомате ***КФ*** c_1 ***2***-состояния ***КФ*** c_o на автоматах ***(0,1)*** должна иметь состояния ***(2,0)*** либо ***(1,1)***. Тогда ***0***-состояние для ***-1***-автомата в ***КФ*** c_1 становится недостижимым, ибо в ***(23)*** отсутствуют подстановки $x1 \Rightarrow 0$ либо $x2 \Rightarrow 0\ (x\in A)$, доказывая утверждение. Итак, в определенной подстановками ***ЛФП (23)*** структуре конечная ***КФ*** $c_1=□2□$ является неконструируемой, тогда как блочная ***КФ*** $c_b=2$ является в ней конструируемой. Таким образом, *блочная* неконструируемость ***НКФ***-типа в структуре вызывает *конфигурационную* неконструируемость, тогда как обратное в общем случае неверно. С учетом сказанного, можно определить новый тип неконструируемости ***НКФ-3*** в структурах, который возникает на стыке *блочной* и *конфигурационной* неконструируемостей и допускающий ее качественное расширение. Неконструируемая конфигурация типа ***НКФ-3*** определяется следующим образом

<u>Определение 3</u>. Конечная КФ $c=□c_b□\in C(A,d,\phi)$ ***является неконструируемой типа НКФ-3 тогда и только тогда, когда*** c_b***-конфигурация d-мерного гиперкуба единичных автоматов структуры d-ОС является блочно конструируемой при конфигурационно неконструируемой КФ c. Такую конечную c-КФ будем также называть НКФ-3; где □ – «обрамление» блочной*** c_b***-конфигурации 0-состояниями «покоя» на остальных автоматах d-ОС.***

Очевидно, ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ будучи ***НКФ-3***, является и ***НКФ***, однако она не может быть ни ***НКФ-1***, ни ***НКФ-2***. Обобщая вышеприведенное доказательство, несложно показать, что существуют не менее $N=(a-2)^{a-1}[(a-1)^{a^n-a} - (a-2)^{a^n-a}]$ *классических* ***1-ОС***, обладающих неконструируемостью типа ***НКФ-3***. С целью получения данной оценки используется структура ***1-ОС***, определяемая ***ЛФП*** с параллельными подстановками следующего простого вида, а именно:

$0000 \ldots 00 \Rightarrow 0; \qquad 0000 \ldots 00x \Rightarrow x` \in A \backslash \{0,1\};$

$x_1x_2x_3x_4 \ldots x_n \Rightarrow x`_1 \in A \backslash \{0\}$ ***– на остальных кортежах*** $<x_1x_2x_3 \ldots x_n>$ ***и по меньшей мере для одного из них имеет место следующее соотношение*** $x`_1 = 1$ **(24)**

Нетрудно убедиться, что в определенных таким образом ***1-ОС*** *блочная* ***КФ*** $c_b=1$ конструируема, тогда как конечная ***КФ*** c = □1□ является в структуре неконструируемой типа ***НКФ***. Несложный подсчет приводит к вышеуказанной оценке для ***N***-значения. Ввиду сделанных выше замечаний дополнительно к 2 рассмотренным типам неконструируемости ***(НКФ и НКФ-3)*** определяем еще *два* важных типа неконструируемости в *классических* ***ОС***-моделях. Данные два типа обусловлены, прежде всего, именно классичностью ***ОС***–моделей, которая естественным образом позволяет для множества $C(A,d)$ всех конфигураций вводить дифференциацию его на два непересекающихся подмножества ***конечных*** $C(A,d,\phi)$ и ***бесконечных*** $C(A,d,\infty)$ конфигураций соответственно.

<u>Определение 4</u>. Конечная конфигурация $c \in C(A,d,\phi)$ ***называется неконструируемой типа НКФ-1 в классической d-ОС*** ($d \geq 1$) ***только тогда, когда*** $(\exists c` \in C(A,d,\infty))(c`\tau^{(n)}=c)$ ***и*** $(\forall c^* \in C(A,d,\phi))(c^*\tau^{(n)} \neq c)$. ***Конечная конфигурация*** $c \in C(A,d,\phi)$ ***называется неконструируемой типа НКФ-2 в классической структуре d-ОС только тогда, когда*** $(\exists c` \in C(A,d,\phi))(c`\tau^{(n)} = c)$ ***и*** $(\forall c^* \in C(A,d,\infty))(c^*\tau^{(n)} \neq c)$.

Очевидно, если в ***d-ОС*** ($d \geq 1$) существуют ***НКФ-1***, то $(\exists c \in C(A,d,\infty))(c\tau^{(n)}=$□$)$. В целом ряде случаев различие (*на первый взгляд часто едва уловимое*) в определенных нами 4 типах *неконструируемости* оказывает весьма существенное качественное влияние на динамику *классических* ***ОС***-моделей. В целях более четкого акцентирования внимания на этих понятиях неконструируемости словами более понятной терминологии можно сказать, что:

(1) блочная *неконстструируемость* (***НКФ****-типа*) характеризуется невозможностью генерирования *блочной* c_b-***КФ*** ни из какой начальной ***КФ***, т.е. $(\forall c \in C(A,d))(c_b \not\subset c\tau^{(n)})$; естественно, что любая ***КФ***, содержащая такую *блочную* конфигурацию, сама является неконструируемой;

(2) *неконструируемость* типа ***НКФ-1*** {***НКФ-2***} определяется тем, что существуют конфигурации $c \in C(A,d,\phi)$, имеющие *предшественников* (*т.е.* ***КФ*** c^* *таких, что имеет место соотношение* $c^*\tau^{(n)}=c$) только из конфигурационного множества $C(A,d,\infty)$ {$C(A,d,\phi)$};

(3) наконец, *неконструируемость* типа ***НКФ-3*** характеризуется тем, что конечная конфигурация $c=$□c_b□$\in C(A,d,\phi)$, построенная на базе *блочно конструируемой* c_b-***КФ***, является неконструируемой, т.е. не имеет предшественников из $C(A,d)$-множества как конечных, так и бесконечных ***КФ***.

Рассмотрим теперь вопрос существования ***НКФ-1*** для простейших типов ***1-ОС*** с минимальным индексом соседства $X=\{0,1\}$. ***ЛФП*** у ***1-ОС*** с бинарным алфавитом $B=\{0,1\}$ определяем следующим соотношением: $\sigma^{(2)}(x,y) = x^* = x+y \pmod 2$, т.е. определяется параллельными подстановками вида: $00 \rightarrow 0,\ 01 \rightarrow 1,\ 10 \rightarrow 1,\ 11 \rightarrow 0$. Известно [53], что данная ***1-ОС*** не обладает ***НКФ***, но имеет ***НКФ-1***. Следовательно, любые *две* конечные ***КФ*** c_1,c_2 ($c_1 \neq c_2$) генерируют различные последовательности ***КФ***, т.е. $\{c_1\tau^{(2)k}\} \cap \{c_2\tau^{(2)k}\} = \varnothing$ $(k=1,2,3,4, \ldots)$. При этом, несложно показать, что: ***В качестве НКФ-1 может быть только конечная конфигурация, содержащая нечетное количество символов «1».*** Действительно, рассмотрим простую схему восстановления *предшественников* для произвольной конечной конфигурации c, а именно:

t=0	c^{-1}	...	0	0	0	...	...	...	...	...	0	0	1	1	1	...
	c^{-1}	...	1	1	1	...	...	...	...	...	1	1	0	0	0	...
t=1	*c*	...	0	0	1	x_1	...	x_j	...	x_{n-1}	0	1	0	0	...	...
		...	-2	-1	0	1	...	*j*	...	*n-1*	*n*	*n+1*	*n+2*	*n+3*	...	...

Не нарушая общности, начинаем с правого конца ***КФ с***. Для получения в момент ***t=1*** автоматом ***(n+2)*** состояния «***0***» в момент ***t=0*** состояния автоматов **$<n+2,n+3>$** должны быть *(в соответствии с **ЛФП**)* соответственно «***00***» или «***11***». Тогда для получения в момент времени ***t=1*** автоматом ***(n+1)*** состояния «***1***», исходя из предыдущего, автомат ***(n+1)*** в момент ***t=0*** должен быть в состоянии «***1***» либо «***0***» соответственно, т.е. имеет место своего рода ротация состояний относительно автомата ***(n+2)*** в тот же момент ***t=0***. С другой стороны, на автоматах в состояниях «***0***» подобной ротации не производится и их состояния в момент времени ***t=0*** совпадают с допустимыми состояниями следующего за ними автомата в тот же самый момент времени, например, для ***n***-автомата. Итак, ротацию состояний предшественников определяют лишь автоматы, находящиеся в момент ***t=1*** в состояниях «***1***». И если их число в конфигурации ***c*** в момент времени ***t = 1*** будет нечетным, то, как несложно убедиться, на левом конце предшественников c^{-1}, произойдет ротация состояний относительно их правого конца, т.е. обе возможные конфигурации-предшественники будут из множества ***C(B,1,∞)***, что и подтверждает наше предположение о наличии неконструируемости типа ***НКФ-1*** для ***КФ с***. С другой стороны, если ***КФ*** $c \in C(B,1,\phi)$ и является конструируемой, то она будет иметь по одному *предшественнику* c^{-1} как из множества ***C(B,1,ϕ)***, так и множества ***C(B,1,∞)***.

Множество ***C(B,1,ϕ)*** представляет собой набор конечных конфигураций следующего вида:

$$C(B,1,\phi) = \{1, 11, 1x_1x_2 \ldots x_n1 \mid x_j \in B;\ j = 1..n;\ n = 1..\infty\}$$

Из вышесказанного несложно получить достаточно интересное предложение: ***Доля всех НКФ-1 относительно множества C(B,1,ϕ) всех конечных конфигураций равна 1/2***; итак, конфигурации ***НКФ-1*** составляют половину всех конечных конфигураций для простейшей бинарной ***1-ОС***.

Рассмотрим вопрос существования ***НКФ-1*** для структур типа ***1-ОС*** с общим индексом соседства ***X***={***0,1,2, ..., n-1***}, алфавитом ***A***={***0,1,2, ..., a-1***} и ***ЛФП***, определяемой соотношениями вида:

$$\sigma^{(n)}(x_o, x_1, \ldots, x_{n-1}) = x^*_o = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \pmod{a}$$

С учетом ***ЛФП*** данного типа структур несложно убедиться, что: ***Каждая конечная КФ c_o длины, меньшей чем n, будет в ней НКФ-1***. Действительно, в противном случае для нее должна была бы существовать конечная конфигурация ***c**** длиной ***t < n*** такая, что $c^*\tau^{(n)} = c_o$ *(структура генерирует последовательности **КФ** строго возрастающей длины)*. Но тогда согласно ее ***ЛФП*** конфигурация c_o должна была бы иметь длину ***t+n-1*** ***(t ≥ 1)***, что противоречит нашему условию.

Так как структура этого типа генерирует из каждой конечной ***КФ*** c_o последовательность строго возрастающих по длине ***КФ***, то обращение данной последовательности, т.е. последовательность предшественников *(игнорируя бесконечные **КФ**)* приводит или к конечной ***КФ*** по длине, меньшей чем ***n***, а значит ***НКФ-1***, или непосредственно к ***НКФ-1***, но большей длины, учитывая отсутствие ***НКФ***. Таким образом, каждая конечная ***КФ с**** является либо ***НКФ-1***, либо элементом некоторой последовательности $\{c^{\#}\tau^{(n)k} \mid k=1,2, \ldots\}$, где $c^{\#}$ есть ***НКФ-1***. Ввиду же отсутствия в структуре ***НКФ*** имеет место следующее соотношение, а именно:

$$(\forall c_1, c_2 \in C(A,1,\phi))(c_1 \neq c_2 \rightarrow \{c_1\tau^{(n)k} \mid k = 1,2,\ldots\} \cap \{c_2\tau^{(n)k} \mid k = 1,2,\ldots\} = \varnothing)$$

Следовательно, для такого типа структур ***1-ОС*** имеет место следующее соотношение, а именно:

$$\bigcup_j \{c_j\tau^{(n)k} \mid k = 0,1,2,\ldots\} = C(A,1,\phi); \qquad c_j\tau^{(n)0} \equiv c_j,$$
$$where\ \{c_j\} - a\ set\ of\ all\ finite\ configurations\ NCF\text{-}1$$

Следовательно, в структурах такого типа множество всех *конечных* конфигураций генерируется из множества ***КФ*** типа ***НКФ-1***, включая и сами ***НКФ-1***. Иными словами, множество всех ***НКФ-1*** является тем ***базисом***, из которого генерируется все множество ***C(A,1,ϕ)***. Данные результаты уже несложно распространяются и на общий случай структур ***d-ОС*** подобного типа.

При этом, наличие *неконструируемости* типа ***НКФ-3*** в ***ОС***-моделях определяет в некотором роде неожиданный результат: ***При конструируемом ядре (ненулевой части) конечной конфигурации сама она является абсолютно неконструируемой.*** При этом, как нетрудно убедиться, наличие для ***ОС***-модели неконструируемости типа ***НКФ-3*** обязательно влечет за собой и наличие ***НКФ***-неконструируемости для нее; тогда как обратное в общем случае неверно. В частности, простая ***ОС***-модель $<Z^1, \{0,1\}, \tau^{(2)}, \{0,1\}>$ с ***ЛФП***, определенной следующим соотношением вида:

$$\sigma^{(2)}(x,y) = \begin{cases} 1, & if\ x = y = 1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{25}$$

обладает ***НКФ***-неконструируемостью на блочной ***КФ*** c_b**=101**, тогда как в структуре отсутствует неконструируемость типа ***НКФ-3***. Действительно, рассмотрим, например, произвольную *блочно* конструируемую ***КФ*** $c_b = x_1x_2x_3 \ldots x_m$ $(x_k \in \{0,1\};\ k=1\ ..\ m)$ следующего вида:

t : ***c1=***	......	1	0	1	y_2	....	y_m	0	0	0	......
t : ***c2=***	......	0	0	0	z_2	....	z_m	1	0	0	......
t+1: c_b=	......	0	0	x_1	x_2	....	x_m	0	0	.....	......

Из ее конструируемости следует существование для нее предшественников – *блочных* ***КФ c1*** и ***c2***, заканчивающихся справа символами {***0,1***}. Но тогда из вида ***ЛФП (25)*** структуры ***1-ОС*** несложно убедиться в наличии для ***КФ*** $c=\square c_b\square$ предшественников из ***C(A)***-множества, что уже доказывает отсутствие для таким образом определенной ***ОС***-модели неконструируемости типа ***НКФ-3***. При этом, нетрудно убедиться, что при наличии для данной ***ОС***-модели ***НКФ-3*** множество их будет бесконечным. Более того, можно показать, что в классе простых структур $ОС=<Z^1,A,\tau^{(2)},X=\{0,1\}>$ существуют модели, имеющие ***НКФ-3*** минимального размера ***m=a-1*** [10]. Имеют место и другие достаточно интересные оценки для структур подобного типа [1,5,54-56,88,90,536].

Одним из важнейших свойств ***ОС***-моделей, прежде всего, с точки зрения теории вычислений и симулирования физических процессов является свойство их *обратимости*, которое весьма тесно связано с наличием для структур *неконструируемости*, в первую очередь, ***НКФ***-типа. Между тем, проблема обратимости ***ОС***-моделей является не столь и однозначной. Ввиду определения нами типа неконструируемости ***НКФ-1***, обусловленного наличием определяющего для классических моделей соотношения $\sigma^{(n)}(x,x,\ldots,x)=x$, где ***x*** – состояние «*покоя*». Данное соотношение позволяет вполне естественно дифференцировать множество всевозможных конфигураций на два класса – *конечных* ***C(d,A,ϕ)*** и *бесконечных* ***C(d,A,∞)*** *конфигураций* соответственно; при этом, если множество ***C(d,A,ϕ)*** замкнуто относительно ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, т.е. $(\forall c \in C(d,A,\phi))(c\tau^{(n)} \in C(d,A,\phi))$, то множество ***C(d,A,∞)*** может быть и незамкнутым, т.е. $(\exists c^\infty \in C(d,A,\infty))(c^\infty\tau^{(n)} \in C(d,A,\phi))$, что настоятельно обусловливает необходимость уточнения трактовки понятия *обратимости* для *классических* ***ОС***-моделей, т.е. для ***ОС***, удовлетворяющих вышеуказанному определяющему соотношению. Так как при отсутствии даже ***НКФ*** наличие в ***ОС***-модели неконструируемости типа ***НКФ-1*** приводит, вообще говоря, к необратимости модели. В качестве примера рассмотрим бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства

X={***0,1,2***} и локальной функцией перехода $\sigma^{(n)}$, определяемой параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$000 \to 0 \qquad 010 \to 1 \qquad 100 \to 0 \qquad 110 \to 1 \qquad (\Xi)$$
$$001 \to 1 \qquad 011 \to 0 \qquad 101 \to 1 \qquad 111 \to 0$$

Ввиду вышеупомянутого определяющего соотношения указанная ***1-ОС*** является классической *бинарной* ***1***-мерной структурой. Покажем, что такая структура не обладает ***НКФ***. Действительно, для этого вполне достаточно показать, что для структуры отсутствуют пары взаимно-стираемых конфигураций (*определение* ***6***), что ввиду критерия ***Э. Мура*** и ***Дж. Майхилла*** (*теорема* ***18***) и будет обосновывать данное утверждение. С этой целью нам потребуется определить вид пары ***ВСКФ***, присущей рассматриваемой структуре. Для случая данной структуры пары $<c_1,c_2>$ *минимальных* ***ВСКФ*** должны иметь следующий вид, а именно:

$$c_1 = ab\,|\,x_1x_2 \ldots x_p\,|\,cd \quad \text{и} \quad c_2 = ab\,|\,y_1y_2 \ldots y_p\,|\,cd; \qquad x_1 \neq y_1 \qquad x_p \neq y_p$$
$$c_1\tau^{(3)} = c_2\tau^{(3)} = a^*b^*\,|\,z_1z_2 \ldots z_p\,; \qquad a, b, c, d, a^*, b^*, x_j, y_j, z_j \in \{0,1\}; \quad j=1..p$$

Однако, исходя из системы параллельных подстановок (Ξ), определяющих ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$, несложно убедиться, что имеет место соотношение, а именно $(\forall a,b,c,x_1,y_1)(x_1 \neq y_1 \to \sigma^{(3)}(a,b,x_1) \neq \sigma^{(3)}(a,b,y_1))$, из которого уже несложно следует отсутствие для структуры ***1-ОС*** пар ***ВСКФ***, а значит, и ***НКФ***.

С другой стороны, можно показать, что для этой структуры существуют ***НКФ-1*** уже следующего простого вида, как ***КФ c***=□***1***□, где □ – бесконечная вправо (*влево*) цепочка из ***0***-состояний «*покоя*». В этом очень легко убедиться путем вычисления всех возможных предшественников для данной конфигурации (*опуская, при этом, тупиковые варианты*), а именно:

	...	–	–	–	0	1	1	0	0	0	0	0	...
c_1 =	...	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	...
	...	–	–	–	–	1	0	1	1	1	1	1	...
	...	–	–	–	–	0	1	0	0	0	0	0	...
	...	–	–	–	1	0	0	1	1	1	1	1	...
c_2 =	...	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$c_1\tau^{(3)} = c_2\tau^{(3)}$ =	...	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	...

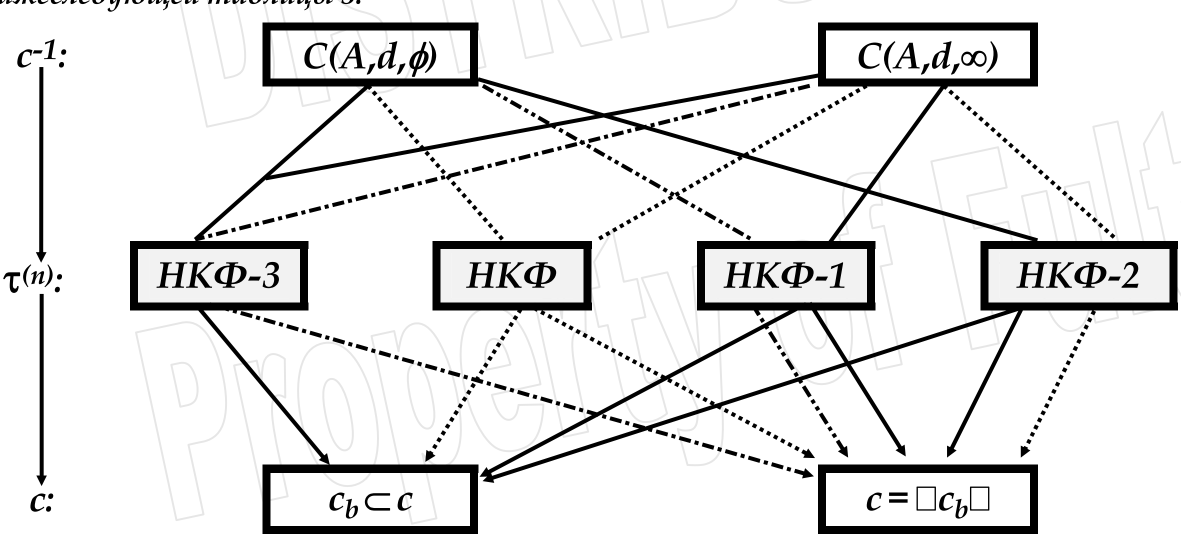
В процессе же вычисления таких *предшественников* выясняется, что ***КФ c***=□***1***□ не только является ***НКФ-1***, т.е. не имеет предшественников из множества ***C(B,1,ϕ)***, но и во множестве бесконечных ***КФ C(d,A,∞)*** она имеет два различных предшественника, а именно $c_1\tau^{(3)} = c_2\tau^{(3)} = c$ {c_1 = ...1111□, c_2 = □111111...; $c_1 \neq c_2$}, что не позволяет однозначно восстанавливать для нее предшественников. Следовательно, динамика рассмотренной нами классической ***1-ОС*** является *необратимой*. Таким образом, мы можем сформулировать достаточно важный результат относительно обратимости классических ***ОС***-моделей, а именно:

<u>Теорема 8</u>. Отсутствие для классических структур неконструируемости НКФ-типа является необходимое, но не достаточное условие обратимости динамики их конечных КФ.

Этот результат требует более четкой трактовки понятия обратимости *классических* ***ОС***-моделей. В нашем понимании ***обратимость*** динамики классической ***ОС***-модели понимается именно как возможность однозначного восстановления *обратимости* хода истории для любой конечной ***КФ***, например, для случая структуры ***1-ОС*** конфигурации вида ***c***=□$x_1x_2 \ldots x_p$□; $x_1, x_p \in A \setminus \{0\}$ на основе ее локальной функции перехода. Указанное понятие *обратимости* совершенно естественно при рассмотрении динамики конечных ***КФ*** в *классических* структурах. Именно в свете этого понятия отсутствие в классических ***ОС***-моделях ***НКФ*** не обеспечивает ***обратимости*** их динамики, что со всей очевидностью и следует из вышеприведенного примера классической бинарной ***1-ОС***. При этом, несколько ниже данный вопрос будет более детализирован в контексте данной трактовки понятия *обратимости*. В случае *классических* ***ОС***-моделей такое соотношение, как □$\tau^{(n)}$=□ на всем протяжении данной монографии ***не будет обусловливать незамкнутость множества C(d,A,∞) относительно ГФП $\tau^{(n)}$ модели, ибо выше мы условились относить □-КФ к множеству C(A,d,ϕ).***

Можно убедиться, все четыре типа неконструируемости ***(НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3)*** имеют место для классических ***ОС***-моделей и попарно неэквивалентны между собой. Нижеследующая диаграмма (рис. ***14***) иллюстрирует взаимосвязь всех ***4*** типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях. На рис. ***14*** схематично представлена сущность определенных нами выше понятий *неконструируемых блочных* и *конечных* ***с-КФ***, определяемых отсутствием для них конфигураций-предшественников из конфигурационных множеств ***C(A,d,ϕ)*** и/или ***C(A,d,∞)***. Относительно же *блочной* и *конфигурационной* конструируемостей для ***КФ*** {c_b|c} допустимыми являются только ***3*** следующие возможности: {-|-}, {+|+} и {+|-}, где символы «+ (-)» обозначают конструируемость (*неконструируемость*) соответствующего типа ***КФ*** относительно ***ГФП*** в структуре ***1-ОС***. При этом очевидно, невозможна неконструируемость *блочной* ***КФ*** c_b при конструируемости конечной ***КФ*** c=□c_b□. Следовательно, ***НКФ, НКФ-1, НКФ-2*** и ***НКФ-3***, и охватывают ***4*** все наиболее интересные возможности существования неконструируемых ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях. При этом, если ***НКФ (НКФ-3)*** – абсолютная неконструируемость относительно ***C(d,A,ϕ)∪C(d,A,∞)***, то и ***НКФ-1***, и ***НКФ-2*** – неконструируемость относительно множеств ***C(d,A,ϕ)*** и ***C(d,A,∞)*** соответственно. Таким образом, *декомпозиция* схемы (рис. ***14***) на более детальные составляющие (рис. ***15***) позволяет нам сделать значительно более прозрачной картину взаимосвязи между введенными нами четырьмя типами неконструируемости. Эти соотношения между четырьмя вышеопределенными типами неконструируемости в классических однородных структурах отображает следующий основной результат, выражаемый нижеследующей теоремой.

<u>Теорема 9</u>. Каждая ГФП $\tau^{(n)}$ в классической d-ОС (d≥1) обладает по крайней мере одним типом неконструируемости НКФ, НКФ-1 либо НКФ-2, а возможно, и НКФ-3. Непустые множества НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3 в классических ОС-моделях всегда бесконечны. Каждая ГФП $\tau^{(n)}$ для классической d-ОС (d≥1) может одновременно иметь типы неконструируемости согласно нижеследующей таблицы 3.



$c^{-1}\tau^{(n)} = c$; c^{-1} – *предшественник для с-КФ*

Рис. 14. Диаграмма, поясняющая сущность основных четырех типов неконструируемости в классических d-мерных ОС-моделях.

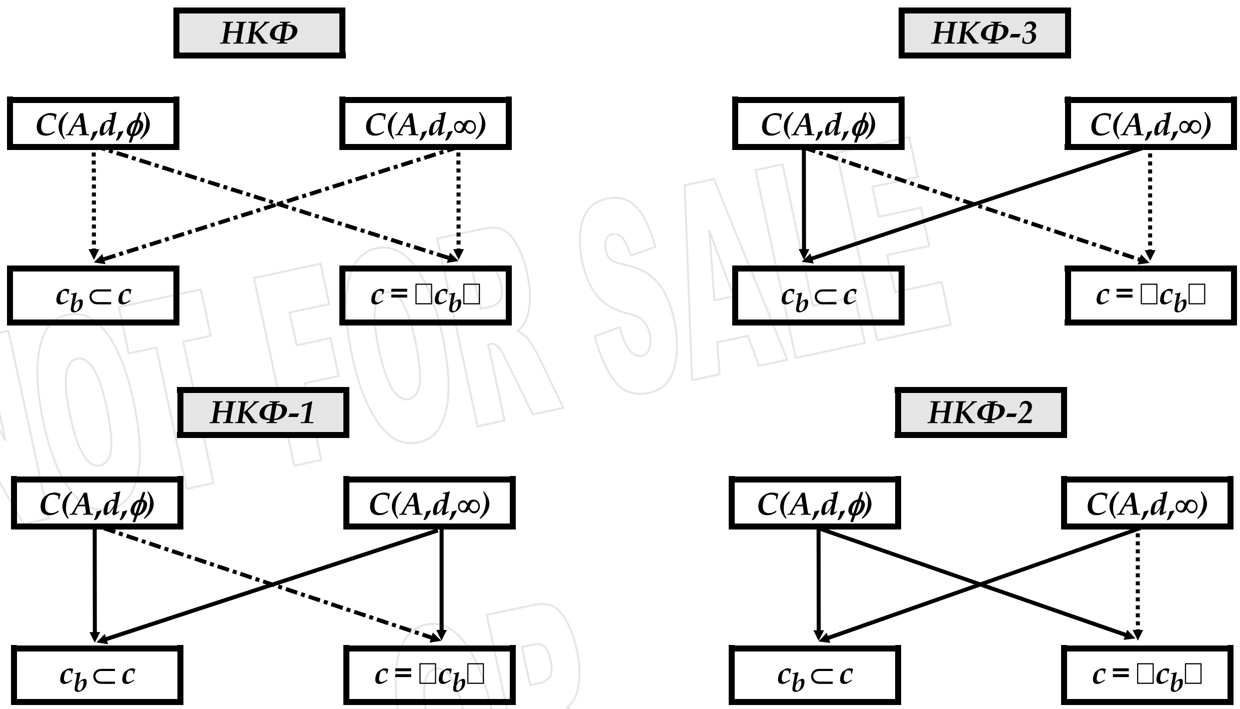


Рис. 15. Диаграммы, представляющие возможности существования предшественников во множествах C(A,d,ϕ) и C(A,d,∞) для конфигураций {c_b | c=□c_b□} относительно четырех типов неконструируемости. На рис. 14, 15 представлена разметка линий сплошная и пунктирная (штрих-пунктирная) обозначающая соответственно допустимость и недопустимость той либо иной возможности существования конфигураций-предшественников для конфигурации с в классических ОС-моделях, т.е. в моделях с соотношением (∃x∈A)($\sigma^{(n)}$(x,x, ..., x) =x).

Таблица 3

Допустимые типы неконструируемости					Возможности
п/п	НКФ	НКФ-1	НКФ-2	НКФ-3	сочетания
1	+	+	+	+	Да
2	+	+	+	-	Да
3	+	+	-	+	Да
4	+	+	-	-	Да
5	+	-	+	+	Да
6	+	-	+	-	Да
7	+	-	-	+	Да
8	+	-	-	-	Да
9	-	+	-	+	Нет
10	-	+	-	-	Да
11	-	-	+	+	Нет
12	-	-	+	-	Да
13	-	+	+	+	Нет
14	-	+	+	-	Нет
15	-	-	-	+	Нет
16	-	-	-	-	Нет

В табл. *3* символ «**+ (-)**» идентифицирует свойство наличия (*отсутствия*) соответствующего типа неконструируемости в *классической* ***d–ОС***, определяя допустимые сочетания их типов. Так, из нее следует, *классические* ***d-ОС*** имеют по крайней мере один из типов {***НКФ, НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3***}.

Доказательства первой части теоремы ***9*** можно найти в работах [3,5,9,53-56,88]. Пусть ***КФ*** c=□c_b□ является в классической ***1-ОС НКФ-3***, но тогда согласно определения ***4*** она не является ***НКФ-1*** и ***НКФ-2***. Поэтому *попарные* пересечения множеств ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3*** пусты. Предположим теперь, что ***КФ*** $c`$=□$c_b 0^k c_b$□ имеет предшественника $c^{-1}$ из множества $C(A,d)$, т.е. $c^{-1}\tau^{(n)}=c`$. Тогда нетрудно убедиться, что при достаточно большом значении k (*т.е. при достаточно длинном блоке единичных автоматов в* ***0****-состоянии, разделяющем в* $c`$*-****КФ*** *все* c_b*-подконфигурации*) ***КФ*** c=□c_b□ тоже будет иметь предшественника, что противоречит условию, что она является неконструируемой типа ***НКФ-3***. Поэтому, если в классической ***d-ОС*** существуют ***НКФ-3***, она обязательно обладает неконструируемостью ***НКФ***-типа. Таким образом, необходимым условием (*но не достаточным, как уже отмечалось выше*) *неконструируемости* типа ***НКФ-3*** является наличие *неконструируемости* ***НКФ***-типа в структуре. При этом, наличие всех четырех типов неконструируемости характерно для каждого класса ***ОС***-моделей, включая и самые простейшие – бинарные ***1-ОС*** с *минимальным* индексом соседства $Xn = \{0,1\} \equiv \{-1,0\}$; нижеследующая таблица ***4*** весьма наглядно иллюстрирует вышесказанное, а именно:

Таблица 4

№	*Локальная функция перехода в бинарной классической 1-ОС*	*Тип неконструируемости в 1-ОС*	*Пример конфигурации*
1	$\sigma^{(2)}(x,y) = x*y$	***НКФ без НКФ-3***	c_b=101
2	$\sigma^{(2)}(x,y) = x+y \ (mod\ 2)$	***НКФ-1***	c=□1□
3	$\sigma^{(2)}(x,y) = x$	***НКФ-2***	$\forall c \in C(A,\phi)$
4	$\sigma^{(2)}(x,y) = x+y \ (mod\ 2) + min\{x,y\}$	***НКФ-3***	c=□101□

Несколько детальнее поясним понятие неконструируемости типа ***НКФ-3***. Формально конечная ***КФ*** c^* = □c_b□ $\{c_b=x_1x_2 \ldots x_p;\ x_1,\ x_p \in B\backslash\{0\};\ x_j \in A;\ j=2..p-1,\ B=\{0,1\}\}$, являющаяся неконструируемой конфигурацией типа ***НКФ-3***, определяется следующим соотношением, а именно:

$$(\forall c \in C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty))(c\tau^{(n)} \neq c^*)\ \&\ (\exists c \in C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty))(c_b \subset c\tau^{(n)}))$$

В качестве нетривиального примера классической ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$ приведем структуру, ***ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками следующего вида:

$$000 \to 0 \qquad 010 \to 1 \qquad 100 \to 0 \qquad 110 \to 1$$
$$001 \to 1 \qquad 011 \to 1 \qquad 101 \to 1 \qquad 111 \to 0$$

Из критерия существования в ***d-ОС*** ($d \geq 1$) ***НКФ***-*неконструируемости*, базирующегося на понятии ***γ-КФ*** (теорема ***24***), несложно убедиться, что определенная таким образом классическая *бинарная* ***1-ОС*** обладает неконструируемостью ***НКФ***-типа. При этом, в качестве *блочно* неконструируемой выступает уже блочная ***КФ*** c_b = <010100>, а именно:

c^{-1}	–	–	–	0	1	0	0	0
c^{-1}	–	0	1	1	1	0	0	0
c^{-1}	–	–	–	–	0	0	0	0
c^{-1}	–	–	–	0	1	1	1	1
c^{-1}	–	–	–	–	–	1	0	0
$c_b=c^{-1}\tau^{(3)}$	0	1	0	1	0	0		

В чем легко убедиться посредством простой проверки отсутствия для нее c^{-1}**-**предшественников, как это следует из вышеприведенной таблицы. При этом, таким же способом можно убедиться в обладании структурой неконструируемости типа ***НКФ-1***, а именно:

c^{-1}	...	–	–	0	1	0	0	0
c^{-1}	...	–	–	–	0	0	0	0
$c^{-\infty}$	...	1	1	1	1	0	0	0
c^{-1}	...	–	–	–	–	1	0	0
c^{-1}	...	–	–	0	1	1	1	1
$c_p=c^{-1}\tau^{(3)}$	...	0	0	1	0	0		

т.е. в качестве ***НКФ-1*** выступает уже простейшая ***КФ*** c_p**=□*1*□,** которая имеет *предшественника* $c^{-\infty}$ только из множества ***C(B,1,∞).*** С другой стороны, блочная ***КФ*** c_b**=<101>** является *конструируемой*, как это легко следует из наличия для нее c^{-1}**-**предшественника следующего простого вида:

c^{-1}	0	1	0	0	1
$c_b=c^{-1}\tau^{(3)}$	1	0	1		

Тогда как данная конечная ***КФ*** c^* = □c_b□ является в структуре неконструируемой, а именно:

c^{-1}	–	–	–	–	0	1	0	0	0
c^{-1}	–	–	–	–	–	0	0	0	0
c^{-1}	–	–	0	1	1	1	0	0	0
c^{-1}	–	–	–	–	–	–	1	0	0
c^{-1}	–	–	–	–	0	1	1	1	1
$c^*=c^{-1}\tau^{(3)}$	0	0	1	0	1	0	0		

т.е. не имеет c^{-1}**-**предшественников из множества ***C(B,d,ϕ)∪C(B,d,∞),*** являясь конфигурационно неконструируемой в структуре**.** Таким образом**,** при блочной конструируемости конфигурации c_b конфигурация c^***=**□c_b□ может быть конфигурационно неконструируемой, т.е. не располагать предшественниками из множества ***C(A,d,ϕ)*** ∪ ***C(A,d,∞)*** конечных и бесконечных конфигураций**.**

Исходя из вида ***ЛФП*** вышепредставленной структуры, достаточно несложно убедиться, что для каждой ***КФ*** $c \in C(B,1,\phi)$ имеем, что **<*c*>**[$\tau^{(3)}$] **–** последовательность строго возрастающих по длине конфигураций, что наглядно иллюстрирует следующая прозрачная схема, а именно:

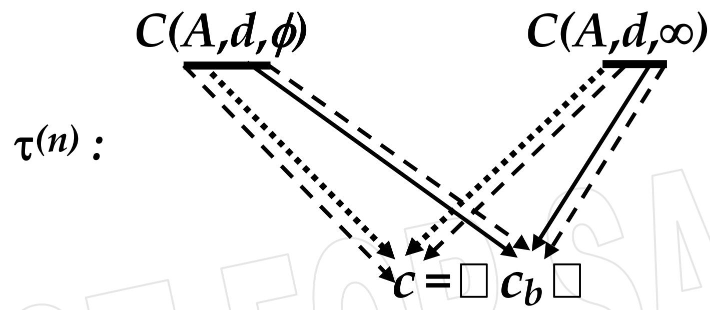
$$\tau^{(3)}: \ldots 000 \left| 1x_2x_3 \ldots x_{n-2} \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \right| 1000 \ldots$$

$$\ldots 01x_o^* \left| x_1^* x_2^* x_3^* \ldots x_{n-2}^* 1 \right| 0000 \ldots$$

$$x_o^*, x_1^*, x_j, x_j^* \in B \qquad (j = 2..n-2)$$

Таким образом**,** для любой пары конечных конфигураций $c_o, c \in C(B,1,\phi)$ *проблема принадлежности* $c \in <c_o>[\tau^{(3)}]$ алгоритмически разрешима. Следует отметить, что оба понятия ***конфигурационной*** и ***блочной*** неконструируемостей принципиально различны и в значительной мере обусловлены *классичностью* ***ОС***, естественным образом допускающей дифференциацию множества ***C(A,d).***

Графически принципиальное различие между *конфигурационно* неконструируемой ***КФ c =*** □c_b□ и *блочно* неконструируемой ***КФ*** c_b можно представить следующей диаграммой, а именно:



где: **——** – наличие c^{-1}-предшественников и **.......** – отсутствие c^{-1}-предшественников для случая ***НКФ-3;*** **------** – отсутствие c^{-1}-предшественников для случае ***НКФ***. Из этой диаграммы довольно прозрачно отличие неконструируемости типа ***НКФ-3*** от неконструируемости ***НКФ***-типа. Если в первом случае неконструируемость, называемая ***конфигурационной***, относится к конечным ***КФ***, тогда как во втором случае мы имеем дело с ***блочной*** конструируемостью. При *конфигурационной* конструируемости (*неконструируемости*) конечная конфигурация c^* (*не*) имеет *предшественников* из множества $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$, тогда как при *блочной* конструируемости (*неконструируемости*) блочная конфигурация c_b (*не*) имеет предшественников, т.е. c^{-1}, из множества $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$, таких, что $c_b \subset c^{-1}\tau^{(n)}$. При этом, можно показать [80] ***(обобщенный критерий): Классическая d-ОС (d≥1) обладает неконструируемостью типа НКФ и, возможно, НКФ-3 только тогда, когда для структуры d-ОС существуют КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$, ***не имеющие предшественников*** c^{-1} ***из множества*** $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$. ***Проблема существования данного типа КФ для произвольной классической d-ОС (d≥1) разрешима при d=1 и неразрешима при d≥2.*** Следовательно, неконструируемость типа ***НКФ-3*** можно рассматривать в качестве *специального* подкласса общей неконструируемости типа ***НКФ***, в ряде случаев представляющего вполне определенный интерес как в теоретических, так и прикладных рассмотрениях классических ***ОС***-моделей. И прежде всего это относится к случаям исследования ***ОС***-моделей в качестве формальных параллельных систем переработки конечных слов в конечных алфавитах [80], а также при симулировании в них на формальном уровне ряда процессов, включая и процессы вычислительного характера. Вполне определенный интерес по данному типу неконструируемости ***НКФ-3*** результаты представляют также в качестве составной компоненты собственного аппарата исследований динамики классических ***ОС***-моделей [80,90].

Таким образом, определением ***4-х*** типов неконструируемости ***(НКФ, НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3)*** мы охватываем данное фундаментальное понятие в целом. *Блочная* неконструируемость ***(НКФ-тип)*** определяет наиболее сильную и ведущую составляющую понятия неконструируемости в целом: ***Блочная*** c_b***-КФ неконструируема только тогда, когда отсутствует КФ*** $c \in C(A,d)$ ***такая, что*** $c_b \subset c\tau^{(n)}$. Тогда как остальные базовые типы неконструируемости ***(НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3)*** носят относительный характер и определяются различиями между определениями множеств *блочных*, *конечных* и *бесконечных* конфигураций относительно глобального $\tau^{(n)}$-отображения ***ОС***-модели.

Неконструируемость типа ***НКФ-3*** несомненно можно рассматривать как некоторый *специальный* случай ***НКФ***-неконструируемости, который устанавливающей существование *неконструируемых* ***КФ*** специального и интересного с весьма многих точек зрения вида. Понятие ***НКФ-3*** лежит на стыке *блочной* и *конфигурационной* неконструируемостей, принадлежа им обоим. При этом, если неконструируемость двух типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** обусловлена дифференцировкой множества $C(A,d)$ на два непересекающихся подмножества $C(A,d,\phi)$ и $C(A,d,\infty)$ *конечных* и *бесконечных* ***КФ***, то выделение во множестве ***НКФ*** отдельного подмножества ***НКФ-3*** обусловлено *дифференцировкой* ***абсолютной*** неконструируемости по самому виду конфигураций, наиболее естественному для ***ОС***-аксиоматики именно классических структур, определяющей их *глобальную* динамику. Таким образом, ***КФ*** $c^*=□c_b□$ $\{c_b=x_1x_2...x_p;\ x_1,\ x_p\in A\backslash\{0\};\ x_j\in A;\ j=2..p-1\}$, являющаяся ***НКФ-3***, определяется следующим соотношением: $(\forall c\in C(A,d))(c\tau^{(n)}\neq c^*)\&(\exists c\in C(A,d))(c_b\subset c\tau^{(n)})$. Суть ***КФ*** c^* типа ***НКФ-3*** довольно хорошо иллюстрирует следующая диаграмма, а именно:

$$\tau^{(n)}:\qquad \begin{array}{c} c\in C(A,d) \\ \not\downarrow \\ c^*=□c_b□ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} c\in C(A,d) \\ \downarrow \\ c`\supset c_b \end{array}$$

Понятия неконструируемостей ***НКФ, НКФ-3*** и ***НКФ-1, НКФ-2*** рассматриваются относительно множеств $C(A,d)$ и $C(A,d,\phi)$ соответственно, основываясь на вполне естественной *дифференцировке* множества всех ***КФ ОС***-модели. Но возможны и другие интересные определения относительной неконструируемости. В частности, ***У. Гольце*** [232] определил понятия множеств *рекурсивных* (C^r) и *рациональных* (C^q) конфигураций, удовлетворяющих соотношению $C(A,d,\phi)\subset C^q\subset C^r\subset C(A,d)$ и исследовал неконструируемость относительно множеств C^q и C^r для классических ***d-ОС*** ($d=1,2$). Он показал, что если в ***1-ОС КФ*** $c\in C(A,\phi)$ имеет c^*-предшественника, то она обязательно имеет и предшественника из C^q-множества; существуют ***КФ*** $c\in C(A,2,\phi)$, имеющие c^*-предшественников только из $C(A,2)\backslash C^r$-множества. Из приведенных результатов также следует неэквивалентность классических структур ***1-ОС*** и ***d-ОС*** ($d\geq 2$) относительно понятия неконструируемости, которые были введены и исследованы ***У. Гольце.***

Рассмотрим теперь несколько детальнее вопрос о существовании допустимых сочетаний типов неконструируемости для классических ***1-ОС.*** Прежде всего, на основе результата теоремы ***6*** [5] и вышесказанного нижняя часть представленной табл. ***3*** (*сочетания* ***9..6*** *типов неконструируемости*) идентифицирует возможность указанных сочетаний в случае *отсутствия* для структуры ***1-ОС*** неконструируемости ***НКФ***-типа. Доказательство данной части теоремы достаточно прозрачно и особых пояснений не требует. Тогда как для исследования возможностей сочетаний ***1..8*** (табл. ***3***) рассматриваются конкретные примеры простых классических ***1-ОС***, в которых устанавливается наличие того или иного типа неконструируемости [10,88]. Данное доказательство представляет также интерес с точки зрения иллюстрации достаточно традиционной методики исследования динамических свойств классических ***ОС***-моделей и легко обобщаемо на общий ***d***-мерный ($d\geq 2$) случай классических однородных структур [88,90,536].

Из теоремы ***9***, в частности, следует, что никакие классические ***d-ОС*** не могут быть свободны от того или иного типа неконструируемости, т.е. никакая ***d-ОС*** не обладает свойством ***абсолютной*** конструируемости. Ниже под обозначениями ***НКФ, НКФ-1, НКФ-2*** и ***НКФ-3*** будем понимать как конкретные неконструируемые ***КФ*** соответствующего типа, так и множества всех таких ***КФ*** относительно заданных ***ГФП*** и ***А***-алфавита классических ***d-ОС.*** С учетом же сказанного вполне можно представить своего рода *верхнюю* границу для существования типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях, выражаемую следующей теоремой ***10.***

<u>Теорема 10</u>. Для каждой ГФП $\tau^{(n)}$ ***классической d-ОС имеют место соотношения НКФ-3⊂НКФ⊂*** $C(A,d,\phi)$, ***НКФ-1*** $\subset C(A,d,\phi)$ ***и НКФ∪НКФ-1∪НКФ-2∪НКФ-3*** $\subset C(A,d,\phi)$. ***Пусть*** $G=C(A,d,\phi)\backslash\{□\}$; ***существуют ГФП в d-ОС*** ($d\geq 1$), ***для которых допустимо соотношение G=НКФ или G=НКФ-2, однако для ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***недопустимо соотношение G=НКФ-1. Существуют ГФП*** $\tau^{(n)}$, ***обладающие неконструируемостью НКФ-типа при отсутствии для них НКФ-3.***

Доказательство первой части теоремы ***10*** повторяет доказательство теоремы ***7*** [1,5]; тогда как для доказательства *завершающей* части вполне можно использовать вышеприведенные рассуждения наряду с результатами по неконструируемости. Итак, результат теоремы ***10*** приводит еще один аргумент в подтверждение существенного различия между типами неконструируемости ***НКФ,***

НКФ-1, НКФ-2 и ***НКФ-3.*** Относительно проблемы неконструируемости возникает также вопрос определения долей классических ***1-ОС,*** обладающих тем или иным типом неконструируемости. В работе [274] ***Э. Мур*** выдвинул гипотезу о том, что доля ***d-ОС,*** обладающих ***НКФ,*** стремится к ***1*** с ростом мощности ***А***-алфавита структуры. В наших книгах [1,5] представлены асимптотические оценки долей ***1***-мерных структур, обладающих как ***НКФ,*** так и ***НКФ-1*** при отсутствии для них ***НКФ.*** Следующий основной результат представляет дальнейшее развитие данного вопроса для одномерного случая классических ***ОС***-моделей [5,10].

<u>Теорема 11</u>. Пусть $N(a,n)$ есть число всех классических 1-ОС, а $N_1(a,n)$, $N_2(a,n)$, $N_3(a,n)$ и $N_4(a,n)$ – число подобных структур, соответственно не обладающих типом НКФ, обладающих типом НКФ-1 при отсутствии типа НКФ, обладающих типом НКФ-2, не обладающих типом НКФ-3. Тогда имеют место следующие определяющие соотношения, а именно:

$$\frac{N_1(a,n)}{N(a,n)} \approx \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{2\pi a^{n-1}})^{a-1}}; \qquad \frac{N_2(a,n)}{N(a,n)} \approx 0.6\ (\sqrt{2\pi a/e^a})^a$$

$$N_3(a,n) > (a-1)^{a^n}; \qquad N_4(a,n) > (a-2)^{a^n}$$

Доказательство первых двух асимптотических соотношений соответствует теоремам ***8*** и ***9*** [5]. В монографии [1] и в ряде других работ было положено начало систематическому исследованию этого и связанных с ним вопросов. Так, ***Э. Икауниекс*** [276], используя простую стохастическую процедуру, показал, что почти все классические ***d-ОС*** обладают ***НКФ.*** С помощью введенного нами определяющего понятия ***γ-КФ*** [37], рассматриваемого в следующем разделе, нам удалось получить асимптотическую оценку числа классических ***d-ОС,*** не обладающих ***НКФ.*** Основной результат выражает *первое* соотношение теоремы ***11,*** справедливое для общего ***d***-мерного случая. Данный результат не только полностью закрывает проблему ***Э. Мура,*** но и показывает степень общности понятия неконструируемости типа ***НКФ.*** Совершенно иная картина имеет место для случая других типов *неконструируемости*. Например, с ростом мощности ***А***-алфавита доля ***1-ОС,*** обладающих ***НКФ-1,*** очень быстро убывает. Следовательно, по степени общности ***НКФ***-понятие является, по-видимому, наиболее представительным относительно типов неконструируемости ***НКФ-1, НКФ-2*** и ***НКФ-3.*** К сожалению, на сегодня отсутствуют подобные удовлетворительные асимптотические оценки для типов неконструируемости ***НКФ-2*** и ***НКФ-3.*** В данном отношении довольно интересным представляется оценить долю ***НКФ-3*** относительно типа ***НКФ,*** учитывая вышеупомянутое соотношение ***НКФ-3 ⊂ НКФ*** для множеств соответствующих ***НКФ.***

Третье соотношение теоремы ***11*** выводится следующим образом. Из определения ***4*** для ***НКФ-2*** (рис. ***14, 15***) следует, что в случае замкнутости множества ***C(A,∞)*** относительно глобального $\tau^{(n)}$-преобразования ***ОС***-модель обладает ***НКФ-2.*** Это условие вполне обеспечивают параллельные подстановки (*определяющие ЛФП в структуре* ***1-ОС***) следующего вида, а именно:

$$000\ldots0 \to 0 \qquad b\,|\,x_2x_3\ldots x_n \to b^* \in A\backslash\{0\}, \quad b \in A\backslash\{0\} \tag{26}$$

$$x_1x_2x_3\ldots x_n \to x^*_1 \in A \ \text{ – на остальных } \langle x_1x_2\ldots x_n\rangle\text{-кортежах; } x_j \in A\ (j=1\,..\,n)$$

Непосредственный подсчет количества ***ЛФП,*** определяемых данного типа ***(26)*** параллельными подстановками, позволяет получить следующую весьма полезную оценку, а именно:

$$N_3(a,n) \geq (a-1)^{(a-1)a^{n-1}} * a^{a^{n-1}} > (a-1)^{a^{n-1}}$$

Доказательство четвертого соотношения будем проводить исходя из следующих соображений, а именно. Фиксируем произвольное состояние $x \in A\backslash\{0\}$ автомата и относительно его задаем ***ЛФП*** структуры ***1-ОС,*** определяемую параллельными подстановками следующего вида:

$$000 \ldots 00 \rightarrow 0 \qquad 00 \ldots 0xy \rightarrow x^*_1 \in A \backslash \{0,x\} \qquad 00 \ldots 0x \rightarrow x \tag{27}$$

$$x_1x_2 \ldots x_n \rightarrow x^*_1 \in A \backslash \{x\} \; – \; \textit{на остальных} <x_1x_2 \ldots x_n>\textit{-кортежах;} \; y, x_j \in A; \; (j=1 \,..\, n)$$

На основе параллельных подстановок ***(27)***, определяющих ***ЛФП 1-ОС***, нетрудно убедиться, что соответствующие им однородные структуры обладают ***НКФ-3*** уже вида ***c=□x□***:

c* = .. 00 ... 0x-	***отсутствие для c-КФ c*-предшественника***
c = □x□	***неконструируемая c-КФ типа НКФ-3***

Непосредственный подсчет числа ***ЛФП***, определяемых паралельными подстановками вида ***(27)***, позволяет получить следующую оценку для числа ***1-ОС***, обладающих ***НКФ-3***, а именно:

$$N_4(a,n) \ge (a-2)^{(2a-2)} * (a-1)^{a^n - 2a + 2} > (a-2)^{a^n}$$

При получении оценок для ***$N_3(a,n)$*** и ***$N_4(a,n)$*** не ставилась задача их оптимизации (*которая сама по себе представляет определенный интерес для ряда дальнейших исследований*), а преследовалась цель показать, что количества ***1-ОС*** с указанными типами неконструируемости достаточно велики. И здесь весьма интересным представляется вопрос получения аналогичных *оценок* для числа ***1-ОС***, соответствующих *возможным* сочетаниям типов неконструируемости согласно теоремы ***9***. Между тем, несмотря на отсутствие точных оценок числа структур, обладающих тем либо иным типом неконструируемости, полученные оценки позволяют получать довольно определенные выводы о степени *общности* указанных типов неконструируемости в *классических* ***1***-мерных ***ОС***-моделях.

Используя критерий существования в ***ОС***-моделях неконструируемости типа ***НКФ*** и, возможно, ***НКФ-3***, базирующийся на понятии ***γ-КФ*** (теорема ***24***), нетрудно получить и оценку количества ***ОС***-моделей, обладающих неконструируемостью указанных типов. С данной целью оцениваем количество структур ***d-ОС (d ≥ 1)***, для которых ***ЛФП*** удовлетворяют следующему условию

$$(x \in A)(КФ(ШС)_j \rightarrow x \mid j = 0 \,..\, a^{n-1}) \tag{γ1}$$

где ***A={0,1,...,a-1}*** – алфавит внутренних состояний единичного автомата ***ОС***-модели, ***$КФ(ШС)_j$*** – ***j***-я конфигурация шаблона соседства ***(ШС)*** модели и ***n*** – число единичных автоматов структуры, составляющих ***ШС***. Более того, условие классичности ***ОС***-моделей не является определяющим. Вопрос искомой оценки сводится к комбинаторной задаче, а именно: ***Оценить число кортежей $<x_1x_2 \ldots x_p>$ ($x_k \in A$; $k=1..p$; $p=ah$), имеющих равное число вхождений всех символов $x \in A=\{0,1,\ldots,a-1\}$.*** Несложно показать, что число ***N*** таких кортежей определяется следующей величиной, а именно:

$$N = \prod_{j=0}^{a-1} C^{h}_{h(a-j)} = \frac{1}{(h!)^a} \prod_{j=0}^{a-1} \frac{[h(a-j)]!}{[h(a-j-1)]!} = \frac{(ha)!}{(h!)^a} \tag{γ2}$$

При этом, условие ***(γ1)*** является *необходимым*, но не достаточным, чтобы ***d-ОС***, удовлетворяющая ему, не обладала свойством неконструируемости ***НКФ***-типа и, возможно, типа ***НКФ-3***. На самом деле, уже бинарная классическая ***1-ОС*** с ***ЛФП*** следующего вида:

$000 \rightarrow 0$	$010 \rightarrow 1$	$100 \rightarrow 1$	$110 \rightarrow 1$
$001 \rightarrow 0$	$011 \rightarrow 0$	$101 \rightarrow 1$	$111 \rightarrow 0$

удовлетворяет условию ***(γ1)***, однако для нее будут существовать пары ***ВСКФ*** уже простейшего вида ***<00|0|11>*** и ***<00|1|11>***, т.е. $\tau^{(3)}$: ***<00|0|11> ≡*** $\tau^{(3)}$: ***<00|1|11> → <000>***, следовательно такая структура обладает неконструируемостью ***НКФ***-типа. В частности, неконструируемыми в ней являются уже блочные ***КФ*** вида ***$c=<x_1x_2 \ldots x_m0100>$ $\{x_j \in B; j=1..m\}$***, в чем уже несложно убедиться непосредственной проверкой, а именно:

$\tau^{(3)}$:	c^{-1}=	-	-	.....	-	-	1	0	0	0	0
	c^{-1}=	-	-	.....	-	-	1	0	0	1	1
	c^{-1}=	-	-	.....	-	-	1	0	0	1	1
	c^{-1}=	-	-	.....	-	-	1	0	1	1	1
	c^{-1}=	-	-	.....	-	-	-	1	1	1	1
		x_1	x_2	.....	x_m	0	1	0	0		

При этом, данная структура обладает и неконструируемостью типа ***НКФ-3***, например, уже вида ***c*=□*1*□**, в чем также несложно убедиться непосредственной проверкой, а именно:

-	-	1	0	1	1	1
-	-	1	0	0	0	0
-	-	1	0	0	0	1
-	-	1	0	0	1	1
-	-	-	1	1	1	1
0	0	1	0	0		

Обладает данная структура и множеством пассивных ***КФ C***={□*(110)*^{k}□ | ***k*=*1*..∞**}. Но тогда с учетом вышесказанного и соотношения *(γ2)* несложно обосновать следующее полезное

Предложение 2. Количество структур d-ОС (d ≥ 1) без НКФ (НКФ-3) с А-алфавитом мощности а и ШС, содержащим n единичных автоматов, меньше нижеследующей величины N, а именно:

$$N=\prod_{j=0}^{a-1} C^{a^{n-1}}_{a^{n-1}(a-j)}=\frac{1}{(a^{n-1}!)^a}\prod_{j=0}^{a-1}\frac{[a^{n-1}(a-j)]!}{[a^{n-1}(a-j-1]!}=\frac{(a^n)!}{(a^{n-1}!)^a}$$

Исходя теперь из полученной оценки для числа однородных структур ***d-ОС (d ≥ 1)*** с алфавитом ***A***={***0,1,2, ..., a-1***} мощности ***a*** и ***ШС***, содержащим ***n*** единичных автоматов, не обладающих типом неконструируемости ***НКФ (НКФ-3)***, получим оценку доли данных структур относительно всех структур с данными параметрами, не ограничивая себя требованием классичности структур.

Общее количество таких структур, очевидно, есть $m=a^{a^n}$. Следовательно, исходя из достаточно простых предположений и собственно результата *предложения* ***1****, доли* Δ_o***(a,n)***, Δ***(a,n)*** однородных структур ***d-ОС (d ≥ 1)***, не обладающих типами неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-3***, могут быть представлены следующими соотношениями, а именно:

$$\Delta_o(a,n)>\frac{(a!)^{a^{n-1}}}{a}\,; \qquad \Delta(a,n)=\frac{a^n!}{(a^{n-1}!)^a\,a^{a^n}}$$

$$\Delta(a,n)=\frac{a^n!}{(a^{n-1}!)^a\,a^{a^n}}\approx\frac{\sqrt{2\pi a^n}}{\sqrt{(2\pi)^a a^{a(n-1)}}}\frac{e^{a^n}a^{na^n}}{e^{a^n}\,a^{a(n-1)(a^{n-1})}a^{a^n}}=\frac{\sqrt{2\pi a^n}}{\sqrt{(2\pi)^a a^{a(n-1)}}}\frac{a^{na^n}}{a^{na^n-a^n}\,a^{a^n}}=$$

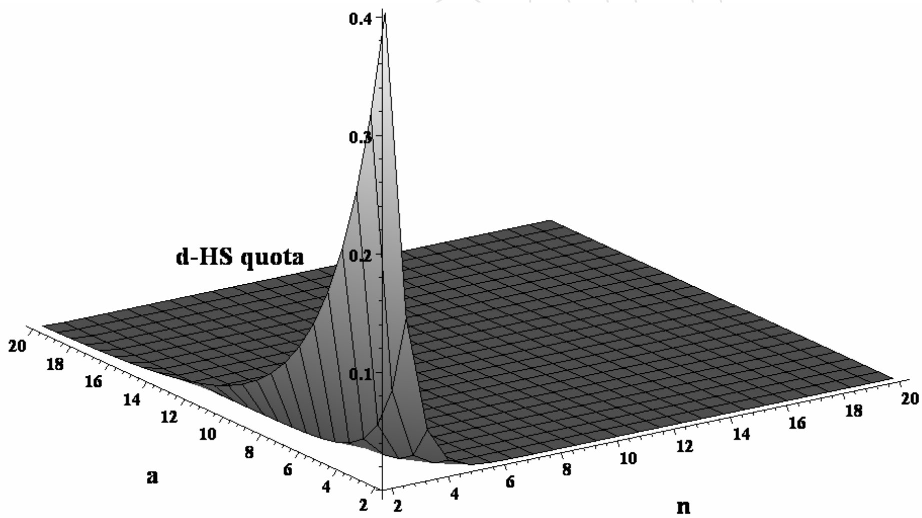
$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{a-1}a^{a(n-1)-n}}}$$

Используя теперь известную формулу Стирлинга для представления факториала вида

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

на основе Δ-значения получаем вышеуказанную прозрачную цепочку преобразований.

Таким образом, теперь уже несложно убедиться, что доля структур ***d-ОС*** ***(d ≥ 1)***, не обладающих типами неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-3)***, довольно быстро убывает даже при относительно *незначительном* росте значений ***a*** (*мощность алфавита внутренних состояний единичного автомата*) и ***n*** (*размер шаблона соседства*), что довольно наглядно иллюстрирует и нижеследующий график, реализованный в среде математического пакета ***Maple*** [98-118].



Вышесказанное позволяет сформулировать следующий полезный результат, а именно:

<u>*Предложение 3*</u>. ***Доля структур d-ОС (d≥1) (требование классичности структур игнорируется) с алфавитом внутренних состояний мощности a и ШС, содержащим n единичных автоматов, не обладающих типом неконструируемости НКФ (и, возможно, типом НКФ-3), определяется нижеследующим асимптотическим соотношением, а именно:***

$$\Delta(a,n) \approx \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{a-1} a^{a(n-1)-n}}}$$

Таким образом, полученная оценка непосредственно не зависит от *размерности* структуры ***d-ОС***, подтверждая тот факт, что с ростом значений ***a*** и ***n*** доля структур, не обладающих типом ***НКФ (НКФ-3)***, с наличием которых не совсем правомочно ассоциируется ***необратимость*** динамики ***ОС***-моделей, становится сколь угодно малой, т.е. ***ОС***-модели с указанным свойством с ростом ***a*** и ***n*** становятся все более «*экзотическими*» на общем фоне всего обилия структур ***d-ОС (d ≥ 1)***.

В качестве примера распределения классических структур ***1-ОС*** относительно представленных выше типов неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-1*** рассмотрим группу бинарных ***1-ОС*** с индексом соседства ***X***={***0,1,2***} и алфавитом ***B***={***0,1***}. ***ЛФП*** этого типа структур определяется параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$\begin{array}{llll} 000 \to x_1=0 & 010 \to x_3 & 100 \to x_5 & 110 \to x_7 \\ 001 \to x_2 & 011 \to x_4 & 101 \to x_6 & 111 \to x_8 \end{array}$$

Очевидно, количество всех данных структур равно $2^7=128$. Ради простоты пронумеруем данные структуры целыми числами, соответствующими их бинарным представлениям $<x_1x_2x_3...x_8>$, т.е. от ***0*** до ***127***. Например, структура, определяемая ***ЛФП*** следующего линейного вида:

$$\sigma^{(3)}(x_o, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{2} x_j \quad (mod\ \ 2); \quad x_j \in B = \{0,1\}$$

при сделанном выше предположении будет иметь уникальный номер ***105***. При этом, множество

C(B,1,ϕ) в десятичном представлении есть не что иное, как множество положительных нечетных чисел, т.е. ***C(B,1,ϕ) = {2k+1 | k ≥ 0}***. Точнее, все ***КФ*** вида ***<1x_1x_2 ... x_n1>*** представляются нечетными числами в диапазоне [$2^{n+1}+1$ .. $2^{n+2}-1$], где $x_j \in B$ ***(j=1..n; n ≥ 0)*** и ***<1> ≡ 3***.

Согласно критерия *неконструируемости* на основе ***γ-КФ*** (теорема ***24)*** несложно убедиться, в том что каждая ***1-ОС*** из вышерассматриваемой группы, ***ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками указанного выше вида, для которых кортеж ***<$x_1x_2x_3x_4$ ... x_8>*** содержит неравные количества вхождений символов ***«0»*** и ***«1»***, обладает ***НКФ*** и даже, возможно, ***НКФ-3*** или ***НКФ-1*** ***(****например*, ***1-ОС*** *с номером* ***118*** *обладает* ***НКФ, НКФ-3*** *и* ***НКФ-1)***. Таких структур насчитывается ***93***, вот их характеристические номера, а именно:

0..14, 16..22, 24..26, 28, 31..38, 40..42, 44, 47..50, 52, 55, 56, 59, 61..70, 72..74, 76, 79..82, 84, 87, 88, 91, 93..98, 100, 103, 104, 107, 109..112, 115, 117..119, 121..127

Структуры этой *подгруппы* могут поддерживать достаточно сложную динамику, на особенностях которой нами внимание здесь не акцентируется. К своего рода критическим структурам данной подгруппы можно отнести структуры с номерами ***0*** и ***127***. В частности, для первой структуры *все* конечные конфигурации являются ***НКФ***, тогда как для второй структуры, как легко убедиться, конструируемыми являются только конфигурации вида {1^k | ***k=3,4,5, ...***}.

Следующую *подгруппу* составляют структуры с номерами ***23, 27, 29, 39, 46, 54, 71, 77, 83***. Данные ***9*** структур характеризуются тем, что существование в них ***НКФ*** обусловлено наличием ***γ-КФ*** уже на конфигурационных блоках размера ***2***. При этом, некоторые из структур данной подгруппы могут обладать и ***НКФ-1***, но данный вопрос нами не рассматривался.

Следующую *подгруппу* составляют структуры, обладающие парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. Вот номера таких структур с их дополнительными характеристиками:

43 – имеет пару ***ВСКФ <11|0|01>*** и ***<11|1|01>***
53 – имеет пару ***ВСКФ <01|11|00>*** и ***<01|00|00>***; не обладает ***НКФ-1***, ибо для данной структуры не существует ***КФ c*∈C(B,1,∞)*** такой, что $c^*\tau^{(3)}$=□, где □ – нулевая ***КФ*** структуры
57 – имеет пару ***ВСКФ <01|00|01>*** и ***<01|11|01>***
58 – имеет пару ***ВСКФ <01|0|01>*** и ***<01|1|01>***
78 – имеет пару ***ВСКФ <10|0|01>*** и ***<10|1|01>***
92 – имеет пару ***ВСКФ <10|0|01>*** и ***<10|1|01>***; обладает ***НКФ-1*** уже простого вида ***c=□11□***
99 – имеет пару ***ВСКФ <10|01|10>*** и ***<10|10|10>***; не обладает ***НКФ-1***, ибо для нее не существует ***КФ c*∈C(B,1,∞)*** такой, что $c^*\tau^{(3)}$=□, где □ – полностью нулевая ***КФ*** структуры
108 – имеет пару ***ВСКФ <10|01|01>*** и ***<10|10|01>***; обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида ***c=□1□***
113 – имеет пару ***ВСКФ <01|0|00>*** и ***<01|1|00>***; не обладает ***НКФ-1***, ибо для нее не существует ***КФ c*∈C(B,1,∞)*** такой, что $c^*\tau^{(3)}$=□, где □ – полностью нулевая ***КФ*** структуры
114 – имеет пару ***ВСКФ <01|0|10>*** и ***<01|1|10>***; обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида ***c=□1□***
116 – имеет пару ***ВСКФ <01|0|00>*** и ***<01|1|00>***; каждая ***КФ***, содержащая подконфигурацию, в частности, ***<010>***, является в структуре неконструируемой ***НКФ***-типа.

Три структуры с номерами ***15, 51*** и ***85*** не обладают ни ***НКФ***, ни ***НКФ-1***, генерируя идентичные *(с точностью до сдвига)* последовательности конфигураций ***НКФ-2*** и формируя вторую подгруппу, с точки зрения динамики особого интереса не представляющую.

К последней подгруппе относятся структуры, не обладающие ***НКФ*** по причине отсутствия для них пар ***ВСКФ***. Номера данных структур с краткими комментариями представлены ниже:

30 – любая ***КФ*** вида {□***(1110)***^{k}***11***□ | ***k=0,1,2, ...***} является в структуре ***НКФ-1***. Это прямо следует из результата вычисления для нее предшественников

45 **–** не обладает ***НКФ-1,*** ибо для нее не существует ***КФ*** $c^* \in C(B,1,\infty)$ такой, что $c^*\tau^{(3)} =$ □, где □ **–** *полностью нулевая* ***КФ*** структуры**;** каждая конечная ***КФ*** в структуре ***НКФ-2***

60 **–** любая ***КФ*** вида {□1^{2k+1}□ | $k=0,1,2, \ldots$} является в структуре ***НКФ-1.*** Это следует из результата вычисления для нее предшественников

75 **–** обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида ***c***=□***1***□

86 **–** обладает ***НКФ-1*** уже простого вида ***c***=□***11***□

89 **–** обладает ***НКФ-1*** уже простого вида ***c***=□***11***□**.** Это следует из результатов вычисления для нее предшественников

90 **–** обладает ***НКФ-1*** уже простого вида ***c***=□***11***□

101 **–** не обладает ***НКФ-1,*** ибо для нее не существует ***КФ*** $c^* \in C(B,1,\infty)$ такой, что $c^*\tau^{(3)}=$□, где □ **–** *полностью нулевая* ***КФ*** структуры**;** каждая конечная ***КФ*** в структуре ***НКФ-2***

102 **–** обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида ***c*** = □***1***□

105 **–** обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида ***c*** = □***1***□

106 **–** обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида ***c*** = □***1***□

120 **–** обладает ***НКФ-1*** уже вида $c_o =$ □1□; $c_j =$ □$10x_1x_2 \ldots x_n1$□; $x_j \in B$; $j=1..n$

Таким образом, из общего числа ***128*** бинарных структур рассмотренной группы:

– ***113*** обладают ***НКФ*** и, возможно, типом неконструируемости ***НКФ-1;***

– ***3*** с номерами ***15, 51*** и ***85*** не обладают ни ***НКФ,*** ни ***НКФ-1*** при наличии для них ***НКФ-2,*** однако особого интереса с точки зрения динамики структур они не представляют**;**

– ***12*** не обладают ***НКФ;*** при этом, только две из них с номерами ***45*** и ***101*** дополнительно не обладают также и ***НКФ-1,*** т.е. каждая конечная ***КФ*** для структур является ***НКФ-2.***

Итак, доля структур, обладающих ***НКФ*** и**,** возможно**,** ***НКФ-1*** составляет ≈ ***0.88,*** тогда как только две структуры с номерами ***45*** и ***101*** **(***не считая структур с примитивной динамикой с номерами* ***15, 51, 85)*** не обладают обоими основными типами неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-1.*** Между тем, каждая последовательность, генерируемая в структуре ***45*** из конечной ***КФ*** c_o, *периодична***.** В этом несложно убедиться, исходя из вида ***ЛФП*** структуры. Действительно, из ее вида следует, что уже правый конец любой конечной ***КФ*** $c = 1x_1x_2x_3 \ldots x_n1$ имеет постоянное местоположение в Z^1 для любой генерируемой из нее ***КФ*** $\{c\tau^{(3)t} \mid t>0\}$**.** Тогда как левый конец в такой последовательности может увеличивать длину генерируемых ***КФ*** **(***относительно длины ее исходной* ***КФ с)*** не более, чем на ***1,*** в чем также несложно убедиться из вида ***ЛФП*** структуры. Отсюда уже вполне естественно вытекает заключение о периодичности каждой последовательности, генерируемой структурой ***45*** из ***КФ*** $c \in C(A,1,\phi)$**.** Длина ***p*** периода определяется как видом исходной ***КФ с,*** так и ее длиной**;** например**,** для конфигураций ***c(k)*** длина периода определяется следующей простой формулой, а именно:

$$c(k) = 1^k \equiv \underbrace{11 \ldots. 11}_{\leftarrow\, k \,\rightarrow} \quad (k \ge 1); \qquad p = 2^{[\log_2 (k+1)]}; \quad \textit{decimal representation } 1^k \equiv 2^k - 1$$

$$\textit{where } [x] - \textit{an integer is no more than } x$$

Подобные **(***с вполне очевидными изменениями***)** рассуждения приводят к аналогичным результатам и для структуры с характеристическим номером ***101*** **–** она тоже генерирует только *периодические* последовательности для конечных конфигураций. При этом, легко можно показать [54], что обе структуры ***45*** и ***101*** для каждой бинарной ***КФ*** $c=1x_1x_2x_3x_4 \ldots x_n1$ генерируют последовательности $\{c\tau^{(3)t} \mid t>0\}$ с одним и тем же периодом**.** Более того**,** для данных структур имеет место следующее достаточно полезное определяющее соотношение, а именно:

$$(\forall c \equiv 1^k \mid k \ge 1)(\forall t \ge 1)(c\tau_{45}^{(3)t} \equiv (c\tau_{101}^{(3)t})^R), \ \ \textit{where } x^R - \textit{inversion of } x$$

```
> t:= table(["000"="0", "001"="0", "010"="1", "011"="0", "100"="1", "101"="1", "110"="0", "111"="1"]):
> Kr := proc(Co::string, T::table) local Art, n, C, r;
   Art, C, n := (proc(S::string)  local k;
       for k from length(S) by -1 to 1 do if S[k] <> "0" then break end if end do; S[1 .. k]
     end proc), Co, 0;
   do  C := convert(parse(Art(psubs(cat("00", C, "00"), T, 'r'))), 'string'); n := n + 1;
       if Co = C then break end if  end do; length(C), n
end proc: Kr("00", t);
                                        1, 2
                                        2, 2
                                        3, 4
                                      127, 128
                                      128, 128
Art_Kr := proc(Co::string, T::table, n::posint)
local a, Kr, C, t, k, d;
   a := cat(seq("0", k = 1 .. length(indices(T)[1][1]) – 1));
   Kr, C, t, k := proc(S::string)
     local k;
       for k from length(S) by -1 to 1 do if S[k] <> "0" then break end if end do; S[1 .. k]
     end proc, Co, {}, 0;
   do
     k := k + 1;  d := nops(Search2(C, {Co})); t := {d, op(t)};
     C := convert(parse(Kr(psubs(cat(a, C, a), T, 'r'))), 'string');
     if n <= d then break end if
   end do;
   Co, k, `if`(nargs = 4, assign(args[4] = t), NULL)
end proc:
> t:= table(["000"="0", "001"="1", "010"="1", "011"="0", "100"="1", "101"="0", "110"="0", "111"="1"]):
> Art_Kr("1011001", t, 66, 'r'), r;
              "1011001", 505, {0, 1, 3, 5, 9, 11, 15, 21, 25, 27, 33, 43, 45, 55, 63, 85}
```

Для эмпирической проверки *периодов* конфигурационных последовательностей, генерируемых структурами с номерами ***45*** и ***101***, можно воспользоваться довольно простой ***Maple***-процедурой ***Kr(Co,T)***, чьи аргументы ***Co*** и ***T*** определяют соответственно *исходную* ***КФ Co*** в строчном формате и таблицу ***T*** параллельных правил подстановок структуры. При этом, процедура ***Art_Kr(Co,T,p)*** обеспечивает тестирование последовательностей конфигураций с начальной конфигурацией ***co*** на предмет выявления ее быть *самовоспроизводящейся* по Муру конфигурацией; второй аргумент ***T*** определяет таблицу параллельных правил подстановок вышеупомянутых ***1-ОС*** с ***X***-индексом соседства ***X***={***0,1, ..., n-1***}, тогда как третий аргумент ***p*** определяет желательное количество копий конфигурации ***Co;*** если же при вызове процедуры ***Art_Kr(Co,T,p,Z)*** четвертый дополнительный аргумент ***Z*** был определен, через него возращается множество количеств копий ***Co***, полученных в процессе генерации. Вышеприведенный фрагмент представляет исходные тексты процедур и примеры их применения. Для понимания процедур достаточно знакомства с ***Maple***, например, в рамках нашей книги [118] и с нашей библиотекой программных средств для ***Maple***.

Таким образом, лишь ***5*** структур из ***128*** с номерами ***15, 41, 45, 85*** и ***101*** обладают свойством *полной обратимости* генерируемых ими *конечных* конфигураций, под которой понимается возможность вычисления всей цепочки конечных предшественников для каждой конфигурации ***co***$\in$***C(A,1,***ϕ***)***, т.е. полностью определить ее предысторию в данной структуре. С учетом же их генерационных возможностей, особого интереса с точки зрения модельных приложений они не представляют.

Следовательно, наибольший интерес с такой точки зрения могут представить только бинарные ***1-ОС*** с индексом соседства ***X={0,1,2}***, обладающие неконструируемостью типов ***НКФ-1*** и/либо ***НКФ***. Сказанное в значительной мере вполне обобщаемо и на более общие случаи классических ***ОС***-моделей. Таким образом, для получения достаточно сложной *динамики* мы должны обратить свое внимание на ***ОС***-модели, обладающие типами неконструируемости ***НКФ*** и/либо ***НКФ-1***. Следовательно, отсутствие для классических ***ОС***-моделей неконструируемости ***НКФ***-типа (*тем паче в совокупности с типом* ***НКФ-1***) может служить своего рода «*фильтром*» при отборе структур с достаточно сложной *динамикой* конечных конфигураций, представляющей интерес [5,536,567].

Более того, можно показать [54], что для обеспечения самовоспроизводимости по Муру всех ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$, т.н. «*универсальной воспроизводимости*», необходимо наличие в ***d-ОС*** типа ***НКФ-1*** при отсутствии в ней ***НКФ***, тогда как *обратное* в общем случае неверно. Таким образом, имеем своего рода «***фильтр***» для отбора структур – кандидатов на предмет обладания структурой свойством *универсальной* воспроизводимости конечных конфигураций по Муру. Именно среди такого типа структур находятся и структуры со свойством *универсальной* воспроизводимости, и со свойством высокой степени воспроизводимости по Муру конечных конфигураций.

Например, среди вышерассмотренных бинарных ***1-ОС*** только структуры с номерами ***30,60,75,86, 89,90,102,105,106*** и ***120*** обладают ***НКФ-1*** без ***НКФ*** и к уже хорошо известной линейной структуре ***105***, обладающей свойством универсальной воспроизводимости, в полной мере можно отнести и структуры с номерами ***90*** и ***102***. При этом, для таких структур обнаружена довольно интересная закономерность, а именно:

<u>Предложение 4</u>. Если для «почти всех» конфигураций $c_o \in C(A,1,\phi)$ и их копий генерируются 1-ОС с номером 90 за t шагов, то то же количество этих же КФ c_o генерируется структурой 102 за 2*t–1 шагов; исключение составляют только конфигурации из множества $\{\square 1^{2k-1} \square \mid k=1,2,3,\ldots\}$.

Тогда как структуры с номерами ***30,60,75,86,89,106*** и ***120*** также обладают в той или иной степени свойством хоть и не универсальной, но (*вплоть до существенной*) воспроизводимости конечных ***КФ***. Таким образом, вполне естественно предположить, что именно среди *классических* структур, обладающих неконструируемостью типа ***НКФ-1*** при отсутствии для них типа ***НКФ***, находятся структуры со свойством *универсальной воспроизводимости* по Муру конечных конфигураций. Это предположение в определенной степени подтверждает и следующий достаточно интересный со многих точек зрения результат [54], а именно.

<u>Теорема 12</u>. Необходимым (но не достаточным) условием обладания классической ОС-моделью свойством универсальной воспроизводимости по Муру конечных КФ является наличие для нее неконструируемости типа НКФ-1 при отсутствии неконструируемости типа НКФ.

Само понятие неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-1*** весьма тесно связано с типами графов динамики классических ***d-ОС***. В частности, имеет место следующий результат [54], а именно.

<u>Теорема 13</u>. Если классическая d-ОС (d ≥ 1) при отсутствии неконструируемости типа НКФ обладает неконструируемостью типа НКФ-1, то для каждой КФ $c_j \in C(A,d,\phi)$ она генерирует последовательности конфигураций (графы состояний) только одного из следующих 2 типов:

(a) $c_j \to c_{j+1} \to \ldots \to c_{j+p} \to \ldots \qquad \bigcup_j \{c_j \tau^{(n)k} \mid k \geq 0\} = C(A,d,\phi)$; c_j – ***NCF-1*** ***(j=1..∞)***

(b) ***имеет последовательности $\{c_j \tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ типа (a) наряду с периодичными.***

Действительно, нетрудно убедиться, что для того, чтобы в классической ***d-ОС (d ≥ 1)*** каждая ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ генерировала *периодическую* последовательность ***КФ***, т.е. $(\forall c \in C(A,d,\phi))(\exists k \geq 1)(c = c\tau^{(n)k})$, необходимо отсутствие для структуры неконструируемости как типа ***НКФ***, так и типа ***НКФ-1***. С другой стороны, несложно убедиться, что для данного типа структур допустимы только графы состояний вышеуказанного вида. Так, для случая вышерассмотренного класса бинарных ***1-ОС*** среди всех структур, обладающих ***НКФ-1*** без ***НКФ,*** к типу ***(a)*** относятся структуры с номерами ***75,89,90,102,105*** и ***106,*** тогда как к типу ***(b)*** относятся только ***3*** однородные структуры с номерами ***30, 60*** и ***86.***

<u>***Теорема 14***</u>***. Если для классической d-ОС (d ≥ 1) отсутствует неконструируемость типов НКФ и НКФ-1, то d-ОС для каждой КФ*** $c_j \in C(A,d,\phi)$ ***генерирует последовательности конфигураций только одного из следующих трех типов, а именно:***

(a) ***все последовательности*** $\{c_j\tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ ***в такой однородной структуре периодичны***

(b) $\ldots\ldots \to c_{j-k} \to \ldots\ldots \to c_{j-2} \to c_{j-1} \to c_j \to c_{j+1} \to c_{j+2} \to \ldots\ldots \to c_{j+k} \to \ldots\ldots$

(c) ***структура имеет последовательности*** $\{c_j\tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ ***конфигураций типов (a) и (b)***

Так, в частности, для случая вышерассмотренного класса бинарных ***1-ОС*** типы ***(a)*** обеспечивают структуры с номерами ***45*** и ***101.*** Так, в качестве примера, иллюстрирующего тип ***(b),*** представим *бинарную* ***1-ОС*** с индексом соседства ***X=***{***0,1,2,3***} и локальной функцией перехода, определяемой следующей простой формулой, а именно**:**

$$\sigma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_1 + 1 \pmod 2), & if <x_1x_2x_3x_4> \in \{<0010>, <0101>, <1010>, <1101>\} \\ x_1, & otherwise \end{cases}$$

Тогда как в качестве примера, иллюстрирующего тип ***(c),*** представим *бинарную* ***1-ОС*** с индексом соседства ***X=***{***0,1,2,3***} и локальной функцией перехода, определяемой следующей формулой**:**

$$\sigma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_1 + 1 \pmod 2), & if <x_1x_2x_3x_4> \in \{<0101>, <1101>\} \\ x_1, & otherwise \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего довольно важного результата [54]**.**

<u>***Теорема 15***</u>***. Для существования неконструируемости типа НКФ-1 в d-ОС (d≥1) необходимо (но не достаточно) наличие для структуры конфигураций*** $c^\infty \in C(A,d,\infty)$ ***таких, что имеет место*** $c^\infty\tau^{(n)} = c \in C(A,d,\phi)$***. Более того, для существования в d-ОС (d ≥ 1) без НКФ неконструируемости типа НКФ-1 необходимо и достаточно наличие в структуре d-ОС конфигураций*** $c^\infty \in C(A,d,\infty)$ ***таких, что*** $c^\infty\tau^{(n)} = c \in C(A,d,\phi)$***. Проблема существования неконструируемости типа НКФ-1 в классических структурах, не обладающих неконструируемостью НКФ-типа, алгоритмически неразрешима при d ≥ 2 и разрешима при d = 1.***

Более того, доказательство последнего утверждения теоремы основывается на алгоритмической неразрешимости проблемы «*домино*» [260], рассматриваемой и в настоящей книге ниже.

Существование двух основных типов неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-1*** определяет и два типа *обратимости* динамики ***ОС***-моделей ***(d ≥ 1).*** Если *первый* тип определяет обратимость динамики относительно множества конфигураций ***C(A,d,∞),*** то второй **–** относительно множества ***C(A,d,ϕ)*** всех конечных конфигураций. При этом, если ***ОС***-модель уже обладает свойством обратимости *первого* типа, то для нее обратимость *второго* типа может отсутствовать. Более того, при наличии необратимости второго типа у ***ОС***-моделей у конечной конфигурации может быть более одного предшественника из множества ***C(A,d,∞).*** Так, для структуры с номером ***60*** при отсутствии в ней ***НКФ,*** т.е. наличии *обратимой динамики первого* типа**,** каждая конфигурация вида $\{1^{2k+1} \mid k=0,1,\ldots\}$ является в структуре ***НКФ-1;*** при этом**,** в качестве предшественников c^{-1} для нее выступает пара различных бесконечных конфигураций. Между тем, с точки зрения здравого смысла *второй* тип *обратимости* представляется нам заслуживающим существенно большего внимания, т.к. весьма затруднительно удовлетворительно интерпретировать как переход *бесконечной* ***КФ*** в конечную, так и наоборот. Естественно, можно найти, например, некоторые аналоги в математике, когда $\sqrt{2}$ – иррациональное число, представляемое *бесконечной* непериодической десятичной дробью, а $(\sqrt{2})^2$ – уже целое число. Между тем, в случае с ***ОС***-моделями мы имеем дело с бесконечными (*в основном*) периодическими конфигурациями. Можно пытаться применять другие оригинальные умопостроения, мало что имеющие общего с реальностью.

Между тем, если рассматривать ***ОС***-модели с обратимостью обоих типов (*т.е. иметь дело с полной обратимостью*) то, как уже не раз отмечалось выше, особого интереса с точки зрения модельных приложений они не представляют. Следовательно, наибольший интерес с данной точки зрения могут представить лишь ***ОС***-модели, обладающие неконструируемостью, прежде всего, типов ***НКФ*** и/либо ***НКФ-1***. Между тем, ***ОС***-модели с необратимостью только второго типа обладают динамикой достаточно ограниченной сложности. Тогда как, уже рассмотренные выше *бинарные* классические ***1-ОС***, обладающие полной обратимостью, имеют достаточно простую динамику конечных ***КФ***, прикладная интерпретация которых особого интереса не представляет.

Как уже отмечалось, для наличия в ***d-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ-1*** необходимо наличие для нее конфигураций $c \in C(A,d,\infty)$ таких, что $c\tau^{(n)} = □$, а в более общем случае и $c\tau^{(n)} = c^* \in C(A,d,\phi)$. Однако, здесь необходимо иметь в виду следующий довольно существенный аспект. Среди всех *бесконечных* конфигураций для класса ***1-ОС*** целесообразно различать ***КФ*** двух основных типов: *бесконечные в обе стороны* (c^{∞}) и *бесконечные только влево* (c^{∞}_{-}) или *вправо* (c^{∞}_{+}). Пусть в *классической* ***1-ОС*** при отсутствии для нее неконструируемости ***НКФ***-типа существуют ***КФ*** следующего вида $c^{\infty}_{+} = □x_1x_2 \ldots x_n \ldots x_j \infty$ $(x_1, x_j \in A\backslash\{0\})$ такие, что $c^{\infty}_{+}\tau^{(n)} = □ \in C(A,1,\phi)$. Но тогда уже несложно доказать существование в структуре по меньшей мере двух различных конечных ***КФ*** $c_p = □x_1x_2 \ldots x_n \ldots x_p□$ и $c_k = □x_1 \ldots x_k□$ $(p \neq k;\ x_1, x_p, x_k \in A\backslash\{0\})$, образованных на основе ***КФ*** c^{∞}_{+}, и таких, что имеет место $c_p\tau^{(n)} = c_k\tau^{(n)} = c \in C(A,1,\phi)$ (*в частном случае может иметь место и соотношение* $c_p\tau^{(n)} = c_k\tau^{(n)} = □$), где □ – также относится (*согласно ранее отмеченному соглашению о структуре множества конечных конфигураций*) к конечным конфигурациям. Следовательно, структура будет обладать парами ***ВСКФ*** и, следовательно, неконструируемостью ***НКФ***-типа, что противоречит предположению. Аналогичным образом обстоит дело и для *бесконечных* конфигураций c^{∞}_{-}-типа. Следовательно, в классических ***1-ОС*** при отсутствии неконструируемости ***НКФ***-типа могут существовать только бесконечные в обе стороны ***КФ*** c^{∞} такие, что $c^{\infty}\tau^{(n)} = □ \in C(A,1,\phi)$. Тогда как факт наличия для классической ***1-ОС КФ*** типа c^{∞}_{-} либо c^{∞}_{+} таких, что $c^{\infty}_{+}\tau^{(n)} = □ \in C(A,1,\phi)$ либо $c^{\infty}_{-}\tau^{(n)} = □ \in C(A,1,\phi)$, обеспечивает наличие для ***1-ОС*** неконструируемости ***НКФ***-типа. В данном контексте мы можем сформулировать следующее достаточно полезное предложение, а именно.

<u>Предложение 5</u>. Классическая 1-ОС обладает неконструируемостью НКФ-типа тогда, если для структуры существуют конфигурации $c^* \in C(A,d,\phi) \cup c^{\infty}_{+} \cup c^{\infty}_{-}$ ***такие, для которых имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:*** $c^*\tau^{(n)} = □$.

Таким образом, относительно понятия неконструируемости оказывается *дифференцированным* и само множество $C(A,1,\infty)$ всех бесконечных ***КФ*** классических ***1-ОС***. В целом ряде случаев данное обстоятельство оказывается достаточно существенным. А в ряде случаев существенность данной дифференцировки не меньше дифференцировки $C(A,d)$ на множества $C(A,d,\phi)$ и $C(A,d,\infty)$.

Доказательство ряда достаточно интересных результатов по классическим ***d-ОС*** ($d \geq 1$), прежде всего имеющих дело с множеством $C(A,d,\infty)$ *бесконечных* конфигураций, существенно использует следующее достаточно очевидное предложение, а именно.

<u>Предложение 6</u>. Для каждых целого d≥1 и алфавита A={0,1, ..., a-1} произвольная КФ в алфавите A d-мерного гиперкуба с ребром размера L, определяемого величиной

$$L = n\,\left]\sqrt[d]{a^{n^d}+1}\right[\,, \quad \textit{where }]x[\textit{ - integer greater than } x$$

будет содержать по меньшей мере две идентичные подконфигурации на d-мерных гиперкубах с ребром уже размера n. Тогда как для вырожденного 1-мерного случая и целого n ≥ 1 существует целое $m = n(a^n+1)$ такое, что каждый кортеж $P_j=\langle x_1x_2 \dots x_m\rangle$ будет содержать уже по меньшей мере 2 идентичных непересекающихся конфигурационных подкортежа $\langle y_1y_2y_3 \dots y_n\rangle$ ($x_k, y_p \in A$; $k=1..m$; $p=1..n$; $n < m$).

Доказательство данного предложения (*не нарушая общности*) на примере **1-**мерного случая легко следует из следующего достаточно прозрачного наброска, а именно:

$$y^1{}_1y^1{}_2 \dots y^1{}_n \;\Big|\; \underbrace{y^2{}_1y^2{}_2 \dots y^2{}_n \;\Big|\; y^3{}_1y^3{}_2 \dots y^3{}_n \;\Big|\; \dots\dots\dots \;\Big|\; y^m{}_1y^m{}_2 \dots y^m{}_n}_{m = a^n + 1}$$

из которого на основе соотношения $y^k{}_p \in A$ ($k=1..m$; $p=1..n$) и конечности ***A-***множества вытекает наличие в каждом кортеже $\langle y^1{}_1y^1{}_2 \dots y^1{}_n \dots y^m{}_1y^m{}_2 \dots y^m{}_n\rangle$ по меньшей мере пары идентичных непересекающихся подкортежей длины ***n***, что и доказывает наше предложение ***6***. В частности, данный результат лежит в основе доказательства предложения ***3***.

На основе проведенного анализа основных типов неконструируемости, а также компьютерного симулирования можно констатировать, что *динамика* конфигураций $c_o \in C(A,d,\phi)$ в классических ***ОС*** характеризуется графами переходов состояний следующего типа, а именно:

1. <u>Бесконечная непериодическая последовательность</u> конфигураций из множества ***C(A,d,ϕ)***

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \dots.\ c_j \to \dots.$$

для которой имеются две возможности, а именно:

(a) определить строгий алгоритм структурной организации составляющих ее конфигураций в зависимости от начальной ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ и момента времени ***t;*** примерами того могут служить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** с номерами ***105*** и ***111***.

(b) такой алгоритм отсутствует либо достаточно сложен для определения.

2. <u>Последовательность чистого цикла</u>; при этом, под данное определение подпадают также и ***пассивные КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, определяемые соотношениями $c_o\tau^{(n)} = c_o$ (*с точностью до сдвига*).

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \dots.\ c_j$$

Существуют ***ОС-***модели, в которых каждая ***КФ*** c_o генерирует чистый цикл, период которого **≥ 2** и зависит как от вида ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, так и от ее размеров. Хорошими примерами вполне могут служить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** с номерами ***45*** и ***101***.

3. <u>Последовательность смешанного цикла</u>; характеризуется наличием в ней некоторой ***КФ*** $c_j \neq c_o$ генерирующей чистый цикл, а именно:

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \dots.\ c_j \to \dots. \to c_{j+p} \to$$

Примерами могут послужить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** с номерами ***66 (КФ 1011)*** и ***44 (КФ 101, 10101)***. При этом, несложно убедиться, что ***ОС***-модели, динамика которых включает графы типа ***(3)***, также обладают и неконструируемостью типа ***НКФ***.

Графами другого типа динамика классических ***ОС***-моделей не обладает; при этом, ее динамика может отвечать как совокупностям вышеуказанных графов, так и исключительно *одному* из них. Например, динамика ***1-ОС*** с номером ***105*** описывается графами исключительно типа ***(1.a)***, тогда как ***1-ОС*** с номерами ***45*** и ***101*** графами исключительно только типа ***(2)***.

Приведенные соображения были рассмотрены нами в качестве одного из возможных подходов к классификации динамики классических ***ОС***-моделей [29,30] в контексте обсуждения достаточно интересной работы ***А. Беркса*** [314]. Впоследствии, систематизируя ***ОС***-модели по их поведению, ***С. Вольфрам*** выделил в них *четыре класса* подобно нашему подходу. Между тем, представленная классификация носит чисто феноменологический характер и не дает каких-либо рекомендаций для конструирования требуемых правил поведения ***ОС***-моделей, а лишь в целом характеризует возможные типы динамики. Имеются и другие феноменологические критерии классификации правил поведения классических ***ОС***-моделей, на которых мы здесь не останавливаемся по ряду соображений, а отсылаем заинтересованного читателя к интересным работам, представленным в библиографии [536]. В любом случае *феноменологические* критерии только внешне качественно характеризуют динамику ***ОС***-моделей, не позволяя использовать их в качестве инструментария непосредственного программирования ***ОС***-моделей с требуемой динамикой.

Тогда как сами графы предисторий (*предшественников*) конфигураций c_o из множества $C(A,d,\phi)$ относятся к следующим базовым типам, а именно:

1. <u>Бесконечная непериодическая последовательность</u> конфигураций из множества $C(A,d,\phi)$:

$$\ldots \leftarrow c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

Примером может служить рассмотренная выше ***1-ОС*** с номером ***39 (КФ □1^k□ | k=1..n)***

2. <u>Конечная последовательность</u> конфигураций из множества $C(A,d,\phi)$, а именно:

$$c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

Имеет место, если ***КФ*** c_{-j} является неконструируемой ***НКФ***-типа. Например, для упоминаемой ***1-ОС*** с номером ***39*** одна из возможных последовательностей предшественников для ***КФ*** c_o=□*1*□ имеет вид c_{-3} = □*101*□ → □*111*□ → □*11*□ → □*1*□ = c_o, где конфигурация □*101*□ является ***НКФ***.

3. <u>Последовательность чистого цикла</u>; при этом, под это определение подпадают и ***пассивные*** конфигурации $c \in C(A,d,\phi)$ (*с точностью до сдвига*), а именно:

$$c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

Примерами могут служить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** с номерами ***45*** и ***101***.

4. <u>Последовательность смешанного типа</u>; характеризуется наличием в ней некоторой ***КФ*** c_{-j}, для которой предшественники могут быть из множества $C(A,d,\phi)$, из множества $C(A,d,\infty)$ либо из обоих множеств одновременно, а именно:

$$\begin{array}{lll} \leftarrow \ldots c_{-j-p} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-j-1} & & c_r \in C(A,d,\phi);\ r=0..-j-p \\ & c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o & \\ \leftarrow \ldots b_{-j-k} \leftarrow \ldots \leftarrow b_{-j-1} & & b_q \in C(A,d,\infty);\ q=-j-1..-j-k \end{array}$$

Примерами могут служить рассмотренные выше бинарные ***1-ОС*** совместно и с другими типами ***ОС***-моделей [9,54]. При этом, можно убедиться, что графы предшественников типа ***(4)***, начиная ***с КФ*** c_{-j}, допускают также и подграфы видов ***(1) – (3)***. Между тем доказано следующее [88,90]:

<u>Предложение 7</u>. В общем случае проблема классификации классических d-ОС (d ≥ 2) согласно их типам графов переходов состояний (конечных конфигураций) алгоритмически неразрешима.

Наша и подобная ей классификация ***С. Вольфрама*** динамики классических ***ОС***-моделей носят сугубо феноменологический характер и существенной *классификационной* роли не играют. Обе они получены на основе экспериментирования с довольно простыми типами классических ***ОС***-моделей и сугубо умозрительных экспериментов. Между тем, каждая классификация, которая претендует называть себя таковой, должна обеспечивать алгоритм или прямой, или косвенный, позволяющий относить произвольную *классическую* ***ОС***-модель к тому или иному типу. Однако обе упомянутые *классификации* не позволяют это делать, ибо, например, ввиду неразрешимости проблемы существования неконструируемости типа ***НКФ*** в ***ОС***-моделях размерности ***d≥2*** мы не можем дифференцировать произвольную ***ОС***-модель уже относительно типа ***4***. Невозможность подобной классификации доказали также ***Culik K.*** и ***Yu S.*** [555], основываясь на примере одной неразрешимой проблемы, а именно.

<u>Предложение 8</u>. Для произвольной структуры d-ОС (d≥2) отсутствует алгоритм определения того, будут ли все конечные конфигурации в ней исчезающими.

Среди других способов классификации ***ОС***-моделей можно отметить подход ***C. Langton*** на базе ***λ***-параметризации, измеряющий долю *ненулевых* значений ***ЛФП***, совместно с подходами ***Dubacq J., Goldenfeld H., Israeli N.***, предложившими *параметризацию* ***ЛФП*** на основе известного понятия сложности ***А.Н. Колмогорова*** [5,88,90,536], а также довольно интересный вероятностный подход ***А.В. Лебедева*** [569]. На сегодня имеется и ряд других подходов к классифмкации ***ОС***-моделей.

Введенные выше четыре типа неконструируемых ***КФ*** рассматривались относительно множеств ***C(A,d), C(A,d,φ), C(A,d,∞)***, базируясь на понятиях *блочных*, *конечных* и *бесконечных* конфигураций, и характеризуют так называемое ***абсолютное*** понятие неконструируемости в классических ***ОС***-моделях. Целый ряд интересных интерпретаций и в теоретических, и прикладных аспектах ***ОС***-моделей имеет такое понятие, как *относительная* неконструируемость, когда конструируемость рассматривается относительно того либо иного подмножества ***C***** множества ***C(A,d)***, например, известные случаи ***C**≡C(A,d,φ), C**≡C(A,d,∞)*** или ***C**⊂C(A,d) –*** конечное *непустое* множество ***КФ***. В частности, ***У. Гольце*** [232] исследовал понятие неконструируемости относительно множеств *рекурсивных* и *рациональных* конфигураций. Введем теперь более общее понятие ***относительной*** неконструируемости в *классических* однородных структурах безотносительно собственно к виду базового множества ***КФ***.

<u>Определение 5</u>. Конфигурация c∈C(A,d) является неконструируемой относительно множества B⊂C(A,d) конфигураций и ГФП $\tau^{(n)}$ ***классической d-ОС (d≥1) тогда и только тогда, когда имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:*** $(\forall c^* \in B)(c^*\tau^{(n)} \neq c)$.

Между тем, теперь возможна (*подобно рассмотренному выше*) и дальнейшая детализация понятия ***относительной*** неконструируемости, например, в разрезе *блочном* и *конфигурационном*. Понятие *относительной* неконструируемости конфигураций в более широком смысле, чем это делалось, в *классических* ***ОС***-моделях имеет целый ряд очень интересных интерпретаций в теоретических и прикладных аспектах [5,54], что стимулирует его дальнейшее исследование. В первую очередь, возникает важный вопрос о взаимосвязи абсолютной и относительной неконструируемостей в классических ***ОС***-моделях. Следующий результат дает частичный ответ на данный интересный со многих точек зрения вопрос [55].

<u>Теорема 16</u>. Если ГФП в классической 1-ОС не обладает НКФ, то она не будет иметь и НКФ-3; относительно множества $B=C(A)\backslash C$ такая ГФП будет обладать НКФ-1 или/и НКФ-3, может обладать НКФ-2 и/или НКФ-3 и НКФ-3, если С-множество является строгим подмножеством соответственно множеств $C(A,\phi)$, $C(A,\infty)$ и $C\cap C(A,\phi) \neq \varnothing$, $C\cap C(A,\infty) \neq \varnothing$. Если же для ГФП $\tau^{(n)}$ в классической 1-ОС отсутствуют НКФ, то по отношению ко множествам КФ $B=C(A)\backslash C(A,\infty)$ и $B=C(A)\backslash C(A,\phi)$ такая ГФП $\tau^{(n)}$ имеет соответственно каждую конфигурацию $c\in C(A,\phi)$ типа НКФ-2 и неконструируемость типов НКФ-1 и/или НКФ-3.

Доказательство теоремы ***16*** базируется на определениях типов неконструируемости и теореме ***9***. Действительно, отсутствие для классической ***1-ОС*** типа ***НКФ*** влечет за собой отсутствие для нее ***НКФ-3***, а также отсутствие неконструируемости ***НКФ***-типа для *любого* подмножества $B=C(A)\backslash C$, где ***С*** – произвольное конечное подмножество ***КФ*** из множества ***С(А)***. При этом, если $C\subset C(A,\phi)$, то относительно множества $B=C(A)\backslash C$ глобальная функция перехода $\tau^{(n)}$ обладает ***НКФ-3*** либо ***НКФ-1***. Тогда как в случае $C\subset C(A,\infty)$ относительно ***В***-множества ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ может обладать ***НКФ-2*** и/или ***НКФ-3***, а при условии $C\cap C(A,\phi) \neq \varnothing$ и $C\cap C(A,\infty) \neq \varnothing$ ***В***-множество может обладать ***НКФ-3***. Таким образом, отсутствие для *классической* ***1-ОС НКФ*** влечет за собой возможность наличия для нее ***НКФ-3*** независимо от типа составляющих ***С***-множество ***КФ***. Несложно убедиться, при этом, что при отсутствии для ***ГФП НКФ*** в соответствующей ей ***1-ОС*** *каждая* ***КФ*** $c\in C(A,\phi)$ будет ***НКФ-2*** относительно множества ***КФ*** $B=C(A)\backslash C(A,\infty)$; тогда как относительно $B=C(A)\backslash C(A,\phi)$-множества классическая ***1-ОС*** обладает типами неконструируемости ***НКФ-1*** и/или ***НКФ-3***.

Из теоремы ***16*** следует, что типы *абсолютной неконструируемости* ***НКФ***, ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3*** в общем случае *не эквивалентны* также и на уровне относительной неконструируемости. Весьма интересным представляется намного более детальное исследование проблемы относительной неконструируемости, включая классы полигенных, недетерминированных и асинхронных ***ОС***-моделей. Например, совершенно другая картина феномена неконструируемости имеет место в случае *недетерминированных* ***ОС***-моделей. Согласно определения такого класса структур (раздел ***1.2***) *недетерминированная* ***ОС***-модель определяется ***G***-множеством допустимых ***ГФП*** структуры, и в каждый момент $t > 0$ к текущим конфигурациям ***d-ОС*** применяются все допустимые функции из множества $G = \{\tau_k^{(n)}\}$ $(2 \le k \le a^{a-1})$. При сделанных предположениях имеет место следующий основной результат [5,55,88,90].

<u>Теорема 17</u>. Недетерминированная d-ОС ($d \ge 1$) обладает НКФ тогда и только тогда, когда все ГФП из допустимого G-множества обладают непустыми B_j-множествами НКФ и $(\forall k,j)(k\neq j \rightarrow B_k\cap B_j=\varnothing)$. Существуют недетерминированные d-ОС ($d \ge 1$), не обладающие НКФ, для которых каждая допустимая ГФП из ее G-множества обладает, в свою очередь, НКФ.

Как показывает результат второй части теоремы ***17***, условие непустоты *пересечений* B_j-множеств является существенным. Так, результаты, аналогичные сформулированным в теореме ***17***, имеют место и для неконструируемости типа ***НКФ-1*** для случая недетерминированных ***1-ОС***, которые не обладают ***НКФ (НКФ-3)***. При этом, попытки их обобщения на случай высших размерностей и неконструируемости типа ***НКФ-2*** пока встречает определенные затруднения [5,536].

Весьма интересный класс ***ОС***-моделей представляют собой *асинхронные* структуры, для которых в разных областях однородного Z^d-пространства в каждый момент времени ***t*** действуют разные ***ГФП*** из некоторого допустимого *конечного* ***G***-множества глобальных функций. Такие структуры представляют определенный интерес как с точки зрения формальных моделей *мультиобработки* информации, так и некоторых аналогов *космологических* моделей Вселенной. Для данного класса структур естественным образом формулируется *проблема неконструируемости* и целый ряд иных проблем, аналогичных случаю *классических* и *недетерминированных* ***ОС***-моделей. При этом, если области разбиения Z^d-пространства бесконечны, то здесь применимы полученные результаты по неконструируемости для классических и недетерминированных ***ОС***-моделей. В противном случае довольно большое влияние оказывает поведение конфигураций на границах разбиения пространства (*границы неоднородности*). В работах [54-56,88,90] обсуждаются только самые общие вопросы, связанные с данной проблематикой. В частности, показано, что *асинхронные* ***ОС***-*модели* могут обладать неконструируемостью типов ***НКФ*** и/или ***НКФ-1*** даже, если составляющие их ***ГФП*** ими не обладают. В случае класса *асинхронных* ***ОС***-моделей проблема неконструируемости существенно усложняется, если собственно само понятие асинхронности несколько расширить. В данном отношении интересными представляются ***ОСнР***-модели (раздел **1.2**).

Весьма интересной с целого ряда точек зрения представляется также модель *асинхронной* ***d-ОС***, в которой на фоне действия некоторой (*фоновой*) ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ выделено конечное или бесконечное множество областей однородного Z^d-пространства, в которых действуют отличные от фоновой глобальные функции перехода; между тем, при условии тождественности для всех ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***А***-алфавита внутренних состояний индексы соседства их могут быть различными. Посредством такой *асинхронной* ***ОС***-модели интересно было бы попытаться смоделировать некоторые общие феномены развития *Вселенной* в нашем современном ее представлении. Так, если распределение областей в Z^d-пространстве таково, что среди данных областей можно выделять области сколько угодно большого размера, в которых действует *фоновая* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, то неконструируемость в такой асинхронной ***ОС***-модели полностью определяется свойствами фона. Тогда как в более общем случае она определяется взаимодействием тех глобальных функций, размеры областей действия которых в Z^d-пространстве не имеют верхнего предела. Рассмотрев целый ряд принципиальных вопросов неконструируемости и основные характеризующие их результаты, переходим теперь к обсуждению ***критериев*** существования различных типов неконструируемости в такого класса однородных структурах.

2.3. Критерии существования в классических ОС-моделях основных типов неконструируемости

Первый ***критерий неконструируемости*** в классических ***ОС***-моделях связан с именами ***Э. Мура*** и ***Дж. Майхилла*** [123,128,131,274,275,] и базируется на понятии *взаимно-стираемых конфигураций* (***ВСКФ***). В слегка обобщенном, но эквивалентном первоначальному, виде классическое понятие ***ВСКФ*** вводится следующим образом.

<u>Определение 6</u>. Две различные конфигурации c_1, $c_2 \in C(A,d,\phi)$ ($c_1 \neq c_2$) образуют для ГФП $\tau^{(n)}$ в структуре d-ОС ($d \geq 1$) пару ВСКФ тогда и только тогда, когда имеет место $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)}$.

Нетрудно убедиться, что данное определение эквивалентно определению ***ВСКФ Э.Ф. Мура***, но более удобно для теоретических неколичественных исследований динамики классических ***ОС***-моделей. Используя понятие ***ВСКФ***, ***Э. Мур*** и ***Дж. Майхилл*** получили ***критерий*** существования в структурах ***d-ОС*** (*не обязательно классических*) неконструируемых ***КФ НКФ***-типа, обобщенный нами на случай неконструируемости типа ***НКФ-3*** [10], а именно.

<u>Теорема 18</u>. В классической d-ОС ($d \geq 1$) существуют НКФ (и возможно НКФ-3) тогда и только тогда, когда для ее ГФП $\tau^{(n)}$ существуют пары ВСКФ.

Данный критерий существования ***НКФ*** в классических ***d-ОС*** остается справедливым также для случая *нестабильных* ***ОС***-моделей, для которых не выполняется условие $\sigma^{(n)}(x,x, ..., x)=x$, которое определяет в структурах ***x***-состояние ***покоя***. Данный критерий предполагает исследование ряда вопросов, связанных со свойствами ***ВСКФ***, некоторые из которых рассматриваются нами ниже. Однако, предварительно мы нуждаемся в исходном ***ВСКФ***-понятии строго по ***Муру-Майхиллу***

[1,274,275]. Ради большей наглядности и без нарушения общности определение ***ВСКФ*** по ***Муру-Майхиллу*** приведем для случая структуры ***1-ОС***.

<u>Определение 7</u>. Пусть W будет некоторый блок из m смежных единичных автоматов 1-ОС и B (рамка) будет множеством всех соседних им автоматов согласно X-индекса соседства X={0,1, 2, ..., n-1}. Обозначим через КФ(P) произвольную КФ конечного P-блока единичных автоматов структуры; естественным образом определяется и объединение двух блочных конфигураций. Две блочные конфигурации $КФ_1(W) \cup КФ(B)$ и $КФ_2(W) \cup КФ(B)$ будем называть парой ВСКФ для ГФП $\tau^{(n)}$ в классической 1-ОС тогда и только тогда, когда имеет место $[КФ_1(W) \cup КФ(B)]\tau^{(n)} = [КФ_2(W) \cup КФ(B)]\tau^{(n)}$ и $КФ_1(W) \neq КФ_2(W)$. При сделанных предположениях W-блок будем ниже называть внутренним блоком (ВБ) пары ВСКФ или сокращенно просто ВБ ВСКФ.

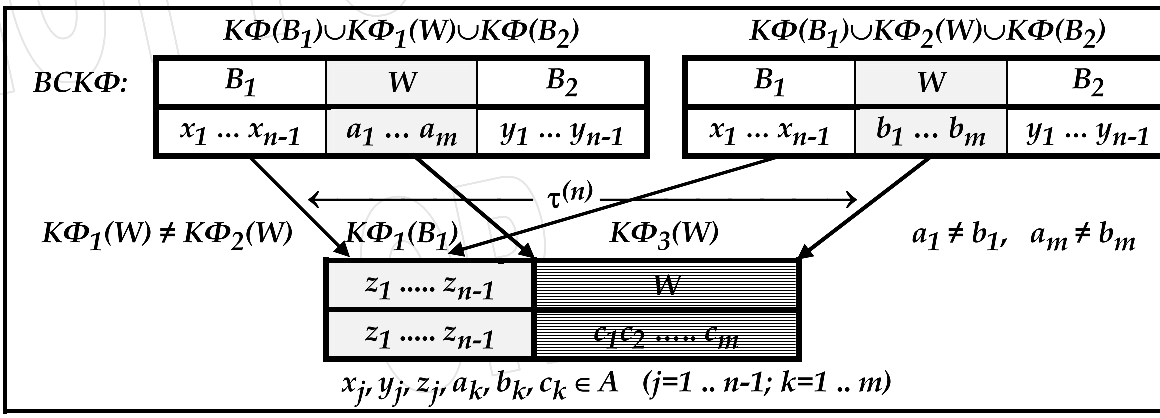


Рис. 16. Иллюстрация отображения пары ВСКФ посредством ГФП $\tau^{(n)}$ классической 1–ОС в одни и те же самые блочные конфигурации $КФ_3(W)$ внутреннего блока (ВБ) и $КФ_1(B_1)$.

Суть ***ВСКФ*** для случая классических ***1-ОС*** иллюстрирует рис. ***16***. Из определения ***7*** несложно убедиться, что множество пар ***ВСКФ*** всегда бесконечно и их структура представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Исследование же структуры ***ВСКФ*** для размерностей ***d≥2*** встречает существенные затруднения и допустимо только в частных случаях (*по причинам, обсуждаемым в следующем разделе*), поэтому наиболее интересные и существенные на сегодня результаты получены именно для случая структур ***1-ОС*** [1,19,20,88].

Из теоремы ***18*** и определения ***7*** следует, что для обладания классическими ***1-ОС*** парами ***ВСКФ*** (*а значит и* ***НКФ***) необходимо выполнение параллельными подстановками, определяющими ее ***ЛФП***, следующего условия, а именно:

$$(\exists \langle x_1x_2 \ldots x_{n-1} \rangle)(x_1x_2 \ldots x_{n-1}a \Rightarrow c \;\&\; x_1x_2 \ldots x_{n-1}b \Rightarrow c;\ a \neq b) \quad (a,b,c,x_j \in A;\ j=1 \,..\, n-1)$$

С другой стороны, данное условие не является достаточным, о чем свидетельствует достаточно простой пример классической ***1-ОС***, определяемой ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ с тождественными параллельными подстановками вида: $x_1x_2 \ldots x_n \Rightarrow x_1$ ($x_j \in A;\ j=1 \,..\, n$). Определенная данным образом классическая структура не обладает как ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. Относительно ***ВСКФ Э. Муром*** в свое время был сформулирован целый ряд интересных вопросов, решение которых для ***1***-мерного случае и позволило получить ряд весьма интересных результатов. Следующий результат иллюстрирует многообразие типов ***ВБ*** у ***ВСКФ*** даже в случае довольно простых бинарных классических ***1-ОС*** с индексом соседства ***X***={***-1,0,1***} Неймана-Мура [1,3,5,10,19,20,88].

<u>Теорема 19</u>. Существуют классические бинарные 1-ОС с индексами соседства Неймана-Мура, имеющие пары ВСКФ с простым ВБ размера L только лишь одного из нижеследующих основных типов, а именно:

1) $L = \{p^+ \mid p \geq 1\}$; *2)* $L = \{1^+, 2^+, 3^+, p^- \mid p \geq 4\}$; *3)* $L = \{1^-, p^+ \mid p \geq 2\}$
4) $L = \{1^+, 2p^-, (2p+1)^+ \mid p \geq 1\}$; *5)* $L = \{1^-, 2^+, p^- \mid p \geq 3\}$; *6)* $L = \{1^+, p^- \mid p \geq 2\}$

где верхний индекс {+|-} определяет {наличие|отсутствие} для структуры 1-ОС пар ВСКФ с простым (не содержащим других пар ВСКФ) внутренним блоком.

Целый ряд примеров *(полученных методом компьютерного симулирования)* показывает [78,79], что с увеличением мощности ***А***-алфавита внутренних состояний и ***Х***-индекса соседства классической ***1-ОС*** расширяются допустимые типы ***ВБ ВСКФ***. При этом, структура ***А***-алфавита существенно влияет даже на само понятие неконструируемости в классических ***ОС***-моделях. Действительно, проблема неконструируемости в ее общей постановке связана не только с дифференцировкой ***А***-алфавита внутренних состояний единичных автоматов ***ОС***-модели, но и с его мощностью. У классических ***ОС***-моделей алфавит $A=\{0,1,2,3, ..., a-1\}$, где ***0*** – выделенное состояние «*покоя*» и ***a*** – фиксированное *целое* число. Если же в качестве ***А***-алфавита структуры ***1-ОС*** выбрать множество ***N*** всех неотрицательных целых чисел, то уже относительно структуры $1\text{-}OC=<Z^1, A=N, \tau^{(2)}, X>$ общепринятый смысл понятия неконструируемости ***НКФ***-типа теряется [1,19,20]. С этой целью рассмотрим простой пример ***1-ОС, ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками следующего чрезвычайно простого вида, а именно:

$$00 \Rightarrow 0 \quad x_1x_2 \Rightarrow x_2 \quad x_1 \neq 0; \qquad 0x_2 \Rightarrow x_2\text{-}1 \qquad x_2 > 0; \quad x_1, x_2 \in N \qquad (28)$$

Нетрудно убедиться, что в определенной таким образом ***1-ОС*** существуют пары ***ВСКФ*** уже вида ***<0|0101 ... 01|0>*** и ***<0|101010 ... 10|0>***. С другой стороны, данная ***1-ОС*** не обладает ни одним из рассмотренных выше типов неконструируемости, т.е. структура обладает свойством *абсолютной* конструируемости. Действительно, на основе параллельных подстановок ***(28)***, определяющих ***ЛФП*** структуры, нетрудно убедиться, что каждая блочная ***КФ*** вида $c_b=x_1x_2 \ldots x_m$ имеет не менее одного предшественника вида $c`_b=x`_1x`_2\, x`_3 \ldots x`_mx`_{m+1}$ такого, что $c`_b\tau^{(2)} = c_b$ ($x_j, x`_k\in N$; $j=1..m$, $k=1..m+1$); состояние каждого единичного автомата в структуре в следующий момент времени ***t>0*** определяется лишь состоянием его соседа справа, позволяя согласно системе параллельных подстановок ***(28)*** определять для произвольной блочной ***КФ*** c_b предшественника $c`_b$, а именно: для произвольного $x_j$-значения в конфигурации $c_b$ выбирается кортеж $<x`_jx_j+1>$ либо $<x`_jx_j>$ в $c`_b$ соответственно при $x`_j=0$ или $x`_j\neq 0$. С другой стороны, ***1-ОС, ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ которой определяется параллельными подстановками следующего чрезвычайно простого вида, а именно:

$$\boxed{0x_2 \Rightarrow x_2 \qquad x_1x_2 \Rightarrow x_1{*}x_2 \qquad (x_1 \neq 0;\ x_1, x_2 \in N)}$$

не обладает парами ***ВСКФ***, но имеет ***НКФ*** уже вида $c_b=1nm$ при $m/n\text{-}[m/n] \neq 0$ [1]. Таким образом, структура ***А***-алфавита *классических* ***ОС***-моделей весьма существенна для определения проблемы неконструируемости; о других случаях существенности структуры ***А***-алфавита будет идти речь ниже. Между тем, если отмена дифференцировки ***А***-алфавита в контексте выделения особого ***0***-состояния «*покоя*» сохраняет в силе критерий существования ***НКФ***, отменяя в общем случае все остальные типы неконструируемости ***(НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3)***, тогда как расширение его и на бесконечный случай приводит к нарушению самого понятия неконструируемости в такого рода ***ОС***-моделях [5,10,54-56,88,90,536].

Как уже отмечалось выше, результаты по проблеме неконструируемости составляют достаточно эффективную часть *базового* аппарата исследования динамики классических ***ОС***-моделей [5,10], поэтому различного рода оценки ***ВБ ВСКФ*** и других элементов проблемы представляют особый интерес. В данном плане представляет интерес восходящий к ***Э.Ф. Муру*** весьма важный вопрос о *минимальном размере* простого ***ВБ ВСКФ***, на который один из ответов дает следующая основная теорема, а именно.

<u>Теорема 20</u>. Для любых целых $a \geq 3$ и $n \geq 2$ существует классическая 1-ОС с индексом соседства $X=\{0,1, ..., n-1\}$ и алфавитом состояний $A=\{0,1,2, ..., a-1\}$, обладающая парами ВСКФ с простыми ВБ минимального размера $L = n$.

Доказательство теоремы можно найти в работах [19,20]. В свете теоремы ***20*** вполне естественным является желание получить оценки для минимального размера простого ***ВБ*** у ***ВСКФ***. И в случае классических ***1-ОС*** имеет место следующий достаточно полезный результат [1,3,5,88].

<u>Теорема 21</u>. Если для классической 1-ОС существуют пары ВСКФ с простым ВБ минимального размера L, то для L справедлива следующая оценка $n \leq L < a^{n-1}(a^{n-1} - 1) + n - 2$.

К сожалению, аналогичную оценку для случая классических ***d-ОС*** получить не представляется возможным и это одно из следствий алгоритмической *неразрешимости* проблемы существования в произвольной классической ***d***-мерной ***ОС***-модели ***(d ≥ 2) НКФ***. Действительно, в противном случае *(как несложно убедиться)* данная проблема была бы на основе теоремы ***18*** алгоритмически разрешимой. Тогда как, с другой стороны, на основе теоремы ***21*** довольно легко устанавливается алгоритмическая разрешимость проблемы существования пар ***ВСКФ (НКФ)*** для общего случая ***1***-мерных как классических, так и нестабильных ***ОС***-моделей [1,3,5].

Используя подход ***Э. Мура*** [274] и результат данной теоремы, можно получить верхнюю оценку для минимального размера ***НКФ*** в классических ***1-ОС*** [1]. Однако, такая оценка представляется нам очень грубой и, практически, малопригодной для практического использования. На основе принципиально другого подхода нам удалось получить существенно более лучшие оценки для минимальных размеров ***(L1 и L2) НКФ*** и ***НКФ-1*** в случае классических структур ***1-ОС***, а именно: ***Минимальные размеры L1 и L2 для НКФ и НКФ-1 в произвольной классической структуре 1-ОС удовлетворяют соответственно соотношениям $L1 \leq (2^a-1)^{n-1}+1$ и $L2 \leq (2^a-1)^{n-1}$*** [1,19]. Данный результат совершенно не базируется на понятии ***ВСКФ*** и позволяет конструктивно определять в произвольной ***1-ОС*** не только наличие *неконструируемости* типов ***НКФ*** и ***НКФ-1***, но во многом и саму их структуру. Подобные результаты по оценке минимальных размеров ***НКФ*** для *простых* бинарных ***1-ОС*** с рядом интерпретаций понятия неконструируемости были получены ***А. Вунше*** и ***А. Адаматским*** [269,536].

Между тем, следует сделать одно замечание, касающееся упомянутой оценки для минимального размера ***(N) НКФ*** для класса ***1-ОС: $N \leq (2^a-1)^{n-1} + 1$***. В работе [269] отмечена несостоятельность данной оценки для случая бинарных ***1-ОС*** с шаблоном соседства ***(ШС)*** размера ***$n = 2$***. Но данное несоответствие обусловлено тем, что в работе авторы использовали бинарные ***1-ОС*** с индексами соседства ***$X_1=\{-1,1\}$*** и ***$X_2=\{-1,0,1\}$***, определяющими соответственно *несвязный* и *связный* ***ШС*** одного и того же размера ***$n=3$***. Тогда как на основе довольно несложного анализа класса бинарных ***1-ОС*** с *простейшим* индексом соседства ***$X=\{0,1\}\equiv\{-1,0\}$***, определяющим ***ШС*** размера ***$n = 2$***, можно просто убедиться, что ***ОС***-модели данного простейшего класса обладают ***НКФ*** минимальных размеров ***$N\in\{0,1,2,3,4\}$***, что полностью согласуется с нашей *оценкой* ***$N \leq (2^2-1)^1+1=4$ ($a=n=2$)***. Таким образом, авторы рассматривают не два *различных* подкласса бинарных ***1-ОС*** с индексами соседства ***$X=\{0,1\}$*** и ***$X_2=\{-1,0,1\}$ (ШС** *соответственно* **$n=2$** *и* **$n=3$)**, а класс ***1-ОС*** с индексом соседства ***$X_2=\{-1,0,1\}$*** и его подкласс с индексом соседства ***$X`_1=\{-1,1\}$***, определяющими ***ШС*** одного и того же размера ***$n = 3$***. А именно это отождествление и привело к такому некорректному замечанию. В свете сказанного было бы весьма интересно установить для класса хотя бы бинарных ***1-ОС*** с индексом соседства ***$X=\{0,1,2,3, ..., n-1\}$*** распределение величин минимальных блоков ***НКФ***, точнее: ***Могут ли данные величины составлять подмножество множества натуральных чисел $N^+=\{0,1, ..., G\}$ ($G=3^{n-1}+1$)?*** Проведенный нами [90] компьютерный анализ целого ряда интересных структур ***d-ОС (d=1,2)*** позволил сформироваться мнению о том, что данное предположение достаточно веско. Если это действительно так, то мы будем иметь весьма интересную ситуацию, а именно: неразрешимость проблемы существования в классических ***d*-ОС ($d \geq 2$) НКФ**, полученная на основе современной теории вычислимости, совсем не исключает возможности положительного решения проблемы существования ***НКФ*** в классических ***ОС***-моделях в каждом конкретном случае, свидетельством чему служит целый ряд положительных результатов для довольно широкого класса однородных структур ***d-ОС*** размерности ***d*=2**.

Попытаемся теперь оценить снизу размер минимальных ***НКФ*** в ***1-ОС***. С этой целью рассмотрим классическую ***1-ОС***, ***ЛФП*** которой определяется системой параллельных подстановок довольно простого вида, а именно:

$$000 \ldots 00 \Rightarrow 0 \qquad 000 \ldots 01 \Rightarrow 0 \qquad x_1x_2x_3 \ldots x_n \Rightarrow x_n; \;\; x_j \in A \; (j=1 \,..\, n) \tag{29}$$

Попытаемся определить ***c`***-предшественника для ***блочной c_b-КФ*** следующего вида:

$$\begin{array}{lll}
c` = 0\ \ 0\ \ 0\ldots\ldots\ldots0 \quad 0\,|\,0\ldots\ \ldots0 \quad 0- & & \\
c` = 0\ \ 0\ \ 0\ldots\ldots\ldots0 \quad 1\,|\,0\ldots\ \ldots0 \quad 0- & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
c` = y_1y_2y_3\ldots\ldots y_{n-1}\,0\,|\,0\ldots\ \ldots0 \quad y- & & y,\, y_j \in A\ \{j=1 \,..\, (n-1)\} \\
\quad\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ldots\ \ldots\ldots n-1\ n\,|\,n+1\ldots 2n-1 \quad 2n & \Leftarrow & \textit{автоматы структуры} \\
c_b = 0\ \ 0\ \ 0\ldots\ldots\ldots0 \quad 0\,|\,1 & &
\end{array}$$

Исходя из параллельных подстановок ***(29)***, нетрудно убедиться, для возможности существования ***0***-значения для ***j***-автоматов ***(j=2 .. n)*** ***c_b-КФ*** все ее ***c`***-предшественники в позициях ***k=(n+1) .. (2n-1)*** должны также иметь ***0***-значения. Следовательно, в исходной блочной ***c_b-КФ*** для автомата ***(n+1)*** недостижимым является ***1***-состояние, ибо в подстановках ***(29)*** не существует подстановки вида ***0000 ... 000x*** $\Rightarrow$ ***1***, $x \in A$. Таким образом, в определенной ***ЛФП (29)*** классической ***1-ОС*** существует блочная ***НКФ*** уже вида $c_b = 0^n1$ длины ***(n+1)*** и содержащая в качестве подконфигурации кортеж **<00...01>**, на котором ***ЛФП*** структуры имеет ***0***-значение. С другой стороны, нетрудно убедиться, что для данной структуры ***1-ОС*** будут отсутствовать ***НКФ*** меньшего размера. Вышесказанное и резюмирует следующая теорема.

<u>***Теорема 22***</u>. ***Минимальный размер (L) конфигурации НКФ в классической 1-ОС удовлетворяет следующему определяющему соотношению, а именно:*** $(n+1) \leq L < 2^{a(n-1)}$.

Компьютерный анализ (*с использованием специальных симуляционных программ в среде* ***Mathematica*** *и* ***Maple*** [9,15,93,116,545,]) целого ряда классических ***1-ОС*** показывает, что верхняя граница для ***L*** в теореме **22**, вероятно, существенно завышена. В этой связи весьма интересным представляется также вопрос получения более точных (*возможно и асимптотических*) оценок. К данному вопросу непосредственно примыкает и проблема существования в классических ***ОС***-моделях *исчезающих* конфигураций, играющих очень существенную роль в исследованиях целого ряда *динамических* свойств такого класса структур.

<u>***Определение 8***</u>. ***Конечная КФ $c \in C(A,d,\phi)$ называется для классической d-ОС исчезающей (ИсКФ) тогда и только тогда, когда $(\exists p>0)(c\tau^{(n)p}=\square)$, где $\square$ и $\tau^{(n)}$ – соответственно полностью нулевая конфигурация и ГФП классической однородной структуры.***

Ниже будет представлен ряд результатов по *исчезающим* ***КФ***; здесь же мы рассмотрим их в связи с понятием ***ВСКФ***. Нетрудно заметить, что **2** конфигурации {$\square$; ***ИсКФ***|***p=1***} представляет собой пару ***ВСКФ***, ***ВБ*** которой по длине равен длине исчезающей ***КФ***; очевидно, множество ***ИсКФ*** в классической ***ОС***-модели пусто либо бесконечно. Из вышесказанного очевидно, что наличие в классической ***ОС***-модели ***ИсКФ*** является достаточным условием для существования в ней ***НКФ***, тогда как обратное, в общем случае, неверно. Действительно, несложно убедиться, что в ***1-ОС***, чья *ЛФП* определяется параллельными подстановками вида $0x_2 \Rightarrow x_2$, $1x_2 \Rightarrow 1$ и $2x_2 \Rightarrow 2$ $(x_2 \in A = \{0,1,2\})$ отсутствуют ***ИсКФ*** при наличии в ней ***НКФ*** уже вида $c_b=012x_4x_5 \ldots x_m$ $(x_k \in A;\ k=4 \,..\, m)$.

В классической ***1-ОС*** (*не нарушая общности*) ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками вида $x_1x_2x_3 \ldots x_n \Rightarrow x^*_1$ $(x_j, x^*_1 \in A=\{0,1, \ldots, a-1\};\ j=1..n)$. Тогда на основе несложных комбинаторных рассуждений несложно показать, что максимальная длина кортежа $<y_1y_2y_3 \ldots y_m>$, содержащего строго по одному вхождению *левой* части каждой из параллельных подстановок ***ЛФП*** составляет величину $N = a^n+n-1$. Следовательно, минимальный размер (L) для ***ИсКФ*** в классической ***1-ОС*** удовлетворяет соотношению $L < a^n+n-1$. При этом, верхнее значение для L недостижимо, ибо в противном случае имел бы место весьма тривиальный случай ***1-ОС***, ***ЛФП*** которой определяется параллельными подстановками вида $x_1x_2 \ldots x_n \Rightarrow 0$ $(x_j \in A;\ j=1..n)$; для данной структуры каждая ***КФ*** $c \in C(A)$ является ***ИсКФ*** и $L=1$. Более того, полученная выше оценка для *минимального* размера ***ИсКФ*** не только недостижима, но и представляется существенно завышенной. Действительно, более детальный анализ ***ЛФП*** классических ***1-ОС***, обладающих такого типа ***КФ***, показывает, что минимальный размер ***ИсКФ*** в ***1-ОС*** зависит как от мощности ***A***-алфавита, также и от ***X***-индекса соседства. Определив теперь ***ЛФП*** классической бинарной ***1-ОС*** параллельными подстановками следующего достаточно простого вида, а именно:

$$\boxed{\begin{array}{l} 0^k1^{n-k} \Rightarrow 0 \qquad (k=0 \,..\, n); \qquad 1^p0^{n-p} \Rightarrow 0 \quad (p=1 \,..\, n-1) \\ b_1b_2 \ldots b_n \Rightarrow 1 \text{ – на остальных } <b_1b_2 \ldots b_n>\text{-кортежах}; \\ b_j \in A=\{0,1\};\quad c^k \text{ – конкатенация из } k \text{ } c\text{-символов} \end{array}} \tag{30}$$

нетрудно убедиться, что в данной структуре существуют ***ИсКФ*** уже вида c=□1^{n-1}□ минимальной длины $L=n-1$. Итак, существуют классические ***1-ОС*** с произвольным ***A***-алфавитом, обладающие ***ИсКФ*** минимальной длины $L=n-1$. Данное утверждение весьма легко доказывается обобщением ***ЛФП*** рассмотренной бинарной ***1-ОС*** на случай общего ***A***-алфафавита посредством дополнения системы параллельных подстановок ***(30)*** подстановками, в частности, следующего чрезвычайно простого вида, а именно:

$$x_1x_2 \ldots x_n \Rightarrow x_1 \qquad\qquad (x_j \in A=\{0,1,2,3, \ldots, a-1\};\ j = 1 \,..\, n)$$
$$<x_1x_2 \ldots x_n> \text{ – кортеж не является чисто бинарным}$$

С другой стороны, величина L минимальной длины ***ИсКФ*** в классических ***ОС***-моделях зависит и от мощности ***A***-алфавита. Например, определив ***ЛФП*** в классической ***1-ОС*** с простейшим (Xn) индексом соседства $Xn=\{0,1\} \equiv \{-1,0\}$ параллельными подстановками следующего вида:

$$\boxed{\begin{array}{l} 00 \Rightarrow 0 \qquad x_1x_2 \Rightarrow 0, \quad \text{если } x_2 = x_1+1 \ (mod\ a+1) \\ x_1x_2 \Rightarrow A\backslash\{0\} \text{ – на остальных } <x_1x_2>\text{-кортежах}; \ x_1, x_2 \in A=\{0,1,2, \ldots, a-1\} \end{array}}$$

несложно убедиться, что в данной структуре ***ИсКФ*** минимального размера $L = a-1$ является ***КФ*** вида c=□$12 \ldots (a-3)(a-2)(a-1)$□. Таким образом, в общем случае *классической* ***1-ОС*** величина $L=L(a,n)$ минимальной длины ***ИсКФ*** является функцией *двух* аргументов: мощности ***A***-алфавита, а также ***X***-индекса соседства структуры. Представляется довольно интересным вычисление точного или асимптотического значений $L(a,n)$ для класса ***1***-мерных ***ОС***-моделей. Вышесказанное позволяет сформулировать следующий достаточно полезный результат.

<u>Теорема 23</u>. При наличии в классической d-ОС (d≥1) исчезающих КФ структура обладает НКФ. Минимальная длина L(a,n) ИсКФ в классической 1-ОС удовлетворяет отношению следующего вида $n-1 \le L(a,n) < a^n+n-1$. ***Существуют классические 1-ОС с простейшим индексом соседства*** $Xn=\{0,1\} \equiv \{-1,0\}$, ***обладающие ИсКФ минимального размера*** $L(a,2) = a - 1$.

Рассмотрим пример бинарной ***1-ОС*** с индексом соседства ***X={0,1,2}***, чья ***ЛФП*** имеет вид

$$\sigma^{(3)}(x_0, x_1, x_2) = \begin{cases} 0, \ if \ <x_0x_1x_2> = <000> \\ 1, \ if \ <x_0x_1x_2> = <111> \\ x_0 + x_1 + x_2 + 1 \quad (mod\ 2), \ otherwise \end{cases} ; \quad x_0, x_1, x_2 \in A = \{0,1\}$$

Исходя из параллельных подстановок, определяемых такой ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$, нетрудно убедиться, что имеет место соотношение $c\tau^{(3)}$=□, где ***c=1001***, □ и $\tau^{(3)}$ – соответственно конечная ***КФ***, полностью нулевая ***КФ*** и ***ГФП***, соответствующая вышеопределенной ***ЛФП***. Таким образом, ***КФ c=1001*** есть одновременно и ***ВСКФ***, и ***ИсКФ***. Более того, весьма легко убедиться, что она же является и ***НКФ***. Действительно, нижеприведенная попытка получить для нее предшественников в предыдущий момент времени ***t=0*** доказывает это, а именно:

	-	-	0	0	0	1	1	.....
t=0	-	-	0	0	1	0	1	.....
	-	-	-	-	1	1	0	.....
	-	-	-	-	1	1	1	.....
t=1	.....	1	0	0	1	.....	.....	.....

Естественно, любая ***КФ***, содержащая такую блочную конфигурацию, сама будет ***НКФ***. С учетом сказанного можно показать, что доля таких ***НКФ*** относительно всех конечных ***КФ*** из множества $C(B,1,\phi) = \{1, 11, 1x_1x_2 \dots x_n1 \mid x_j \in B;\ j = 1..n;\ n = 1..\infty\}$ будет не менее, чем ***1/8***.

Между тем, детальные исследования проблемы неконструируемости в *классических* ***ОС***-моделях привели нас не только к пониманию недостаточной эффективности подходов на *основе* понятия ***ВСКФ***, но и позволили ввести понятие γ-*конфигураций* (***γ-КФ***) [37], которое оказалось достаточно плодотворным. Наше понятие ***γ-КФ*** слегка отлично от введенного независимо от нас в ***1976*** г. ***А. Маруока*** и ***М. Кимура*** [271] понятия ***k***-*сбалансированных* ***ГФП***, но полностью ему эквивалентно. Оба данных понятия были введены нами с целью исследования проблемы неконструируемости в классических ***ОС***-моделях, а ***Маруока*** и ***Кимура*** для исследования параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)}$: ***C(A,d)*** → ***C(A,d)***, определяемых ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в классических ***d-ОС***. Введем теперь собственно само понятие ***блочной γ-КФ***.

<u>Определение 9</u>. Дополнительно к предположениям и обозначениям определения 7 и рис. 16 пусть P(W) будет числом единичных автоматов в произвольном W-блоке классической 1-ОС. Будем говорить, что в 1-ОС существуют γ-КФ на W-блоке тогда и только тогда, когда по крайней мере для одной КФ(W) существует $G(\gamma) \neq a^{n-1}$ ***конфигураций-предшественников таких, что*** $[КФ(W) \cup КФ(B)]\tau^{(n)}$ ***= КФ(W), где B – блок автоматов структуры, соседних всем автоматам W-блока согласно индекса соседства X структуры.***

На основе понятия ***γ-КФ*** можно получить новый критерий существования ***НКФ*** в классических ***ОС***-моделях [3,5,37,45,53-56], представляющий значительный интерес для исследований по ***ТОС***-проблематике в целом, особенно ее динамических аспектов.

<u>Теорема 24</u>. Классическая d-ОС ($d \geq 1$) ***обладает неконструируемостью типа НКФ (возможно и НКФ-3) тогда и только тогда, когда для нее существуют γ-КФ.***

Доказательство теоремы достаточно прозрачно и сводится к следующему. Пусть ***SV(a,n)*** будет множеством всех кортежей вида $<x_1x_2 \dots x_n>$ ($x_j \in A = \{0,1,2,3, \dots, a\text{-}1\}$; $j=1..n$). Нетрудно убедиться, что в качестве различных вхождений в элементы множества ***SV(a,n)*** существует ровно $N(a,n,k) = (n-k+1)a^{n-k}$ каждого из подкортежей вида $<y_1y_2 \dots y_k>$ ($y_p \in A$; $p = 1..k$; $1 \leq k \leq n$). Например, каждый бинарный кортеж вида $<x_1x_2>$ ($x_1, x_2 \in A = \{0,1\}$) имеет ровно $N(2,4,2)=(4-2+1)2^{4-2}=12$ вхождений во все элементы ***SV(2,4)***-множества; более того, $N(a,n,1) = na^{n-1}$ и $N(a,n,n) = 1$. Таким образом, набор числовых величин $N(a,n,k)$ $(1 \le k \le n)$ полностью характеризует полноту представления множества всевозможных $<x_1x_2 \ldots x_n>$-кортежей в произвольном конечном ***А***-алфавите структуры; в случае существования целого $1 \le k \le n$ такого, что $N(a,n,k) \ne (n-k+1)a^{n-k}$ имеет место неполнота множества ***SV(a,n)***, т.е. в нем отсутствует по крайней мере один обязательный кортеж $<x_1x_2x_3 \ldots x_n>$ $(x_j \in A; j=1 \,..\, n)$. Завершение доказательства теоремы можно найти в нашей работе [37], которое, однако, не является единственно возможным, однако достаточно хорошо иллюстрирующим некоторые достаточно часто используемые элементы исследований по проблематике ***ТОС***.

Теорема ***24*** дает другой критерий существования ***НКФ*** в классических ***ОС***-моделях, который в целом ряде случаев более удобен для теоретических исследований и позволяет получать более приемлемые оценки ряда количественных характеристик структур. При этом следует отметить, что несмотря на полную эквивалентность обоих критериев существования ***НКФ*** в классических ***ОС***-моделях (***Мура-Майхилла и Аладьева-Маруока-Кимура***), при их использовании имеется ряд весьма существенных различий [3,5,37,53-56]. В частности, оценки минимального размера ***НКФ*** в классических ***1-ОС*** на основе понятия ***ВСКФ*** являются довольно грубыми, тогда как подход на основе ***γ-КФ*** позволяет получать целый ряд весьма интересных количественных результатов для основных характеристик классических ***ОС***-моделей. Приведем оценку минимального размера ***НКФ*** в классических ***d-ОС (d=1,2)***, используя критерий неконструируемости конфигураций на основе введенного выше понятия ***γ-КФ*** [3,5,37,88,90].

<u>Теорема 25</u>. Если в классической 2-ОС с индексом соседства Мура существуют γ-КФ с размером BxB, то для такой структуры существуют и НКФ размера LxL, а именно:

$$L = 2(B+2)\left]\frac{2\ln a}{4(B+1)*\ln a - \ln G(\gamma)}*\left(B+3+\sqrt{B^2+\frac{\ln G(\gamma)}{\ln a}}\right)\right[-2$$

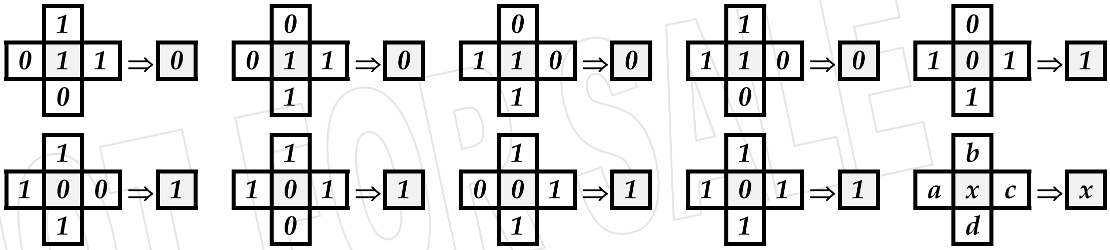
Для случая классической 1-ОС аналогичная оценка принимает следующий простой вид:

$$L = \left]\frac{(n-1)*\ln a}{(n-1)*\ln a - \ln G(\gamma)}\right[*(B+n-1)-n+1$$

где n – размер шаблона соседства структуры, G(γ) – величина, соответствующая определению 9, и а – мощность алфавита А, тогда как]M[обозначает целое число, не меньшее, чем М.

Используя результаты теоремы **25**, можно получить весьма существенный контраст результатов по применению понятий ***ВСКФ*** и ***γ-КФ***. Интересный пример применения данного подхода для оценки минимальных размеров ***НКФ*** проиллюстрируем на введенной ***Дж. Конуэем*** и отлично ныне известной игре «***Жизнь***» [5,172,239,409]. Целью этой игры была попытка смоделировать на формальном уровне некоторые основные аспекты развития некоего биологического сообщества (*зарождение организмов, их гибель, выживание и др.*). Несложно убедиться, что данная игра довольно легко погружаема в соответствующую бинарную классическую ***2-ОС*** с индексом соседства Мура [3,5,37]. Исследования данной игры проводятся многими математиками, программистами, да и просто любителями, как правило, с использованием метода компьютерного моделирования. На сегодня здесь получено весьма много интересных и просто занимательных результатов, которые опубликованны в различных изданиях, включая основанный специально для этих целей в США журнал [536]; синонимом игры «*Жизнь*» является «*Экология*», уже рассматриваемая выше.

А. Смит в рамках исследования соответствующей игре «*Жизнь*» бинарной ***2-ОС*** показал, что она обладает ***НКФ*** минимального размера ***LxL*** $(L = 10^{10})$. Для получения данной оценки ***А. Смитом*** был использован подход на основе понятия ***ВСКФ***, между тем, как на основе понятия ***γ-КФ*** нам удалось принципиально улучшить данную оценку, доведя ее до вполне обозримой величины, а именно: ***LxL (L = 49)***. Это делает весьма реальным получение уже самого вида ***НКФ*** в такого типа бинарных ***2-ОС***, используя возможности современных персональных компьютеров [96,114]. При этом, аналогичным образом вполне можно исследовать также и минимальную по сложности на сегодня универсальную бинарную класссическую ***2-ОС Э. Бэнкса*** [9,132], которая имеет индекс соседства Неймана и ***ЛФП***, определяемую параллельными подстановками следующего вида:



a,b,c,d,x $\in$ ***{0,1}; в остальных случаях***

Можно показать, что данная классическая бинарная ***2-ОС*** вполне подходит в качестве среды для реализации вычислительных схем произвольной сложности. С другой стороны, из определения ее ***ЛФП*** нетрудно убедиться, что в ней существуют ***γ-КФ*** уже на *шаблоне соседства* ***(ШС)***, а значит и ***НКФ*** (теорема ***24***). Действительно, если число конфигураций ***ШС***, отображаемых ***ЛФП*** $\sigma^{(5)}$ в ***1***-состояние центрального автомата шаблона равно $2^4 + 1 = 17$, то отображаемых в ***0***-состояние – только $2^4 - 1 = 15$. Тогда на основе теоремы ***25*** легко получаем и оценку размера ***14x14*** таких ***НКФ***, т.е. в универсальной ***ОС***-модели ***Э. Бэнкса*** существуют ***НКФ*** уже на квадратных блоках размера ***(14x14)***. В этой связи возникает следующая интересная гипотеза: ***Минимальные по сложности (в смысле значения произведения размерности структуры, размера ШС и мощности алфавита А) универсальные классические ОС-модели обладают неконструируемостью типов НКФ и/либо НКФ-1.*** Все на сегодня полученные *минимальные* универсальные ***ОС***-модели согласуются с этой достаточно интересной гипотезой [5,8,9,54,88,90,131,132,158,536,567].

Таким образом, понятие ***γ-КФ*** и базирующийся на нем *критерий неконструируемости* ***Аладьева-Кимура-Маруока*** позволяют довольно эффективно исследовать ряд количественных аспектов динамики классических ***ОС***-моделей, тогда как понятие ***ВСКФ*** в ряде случаев более приемлемо для их качественного исследования. При этом, во многом оба понятия хорошо дополняют друг друга. В целом ряде случаев вместо оптимальных или асимптотических оценок размеров ***НКФ*** в классических ***ОС***-моделях оказываются вполне достаточными простые формулы, как функции основных параметров структуры. В таком контексте эти формулы неоднократно использовались при исследованиях ***ОС***. В таком плане результат теоремы ***25*** принимает следующий достаточно простой вид, который довольно удобен при необходимости получать определенные численные оценки в задачах, связанных с исследованиями неконструируемости типа ***НКФ*** [5,37,88,90].

<u>Теорема 26</u>. Если в классической 2-ОС с индексом соседства Мура существуют γ-КФ с размером BxB, то для данной структуры существуют и НКФ на блоках минимального размера LxL, где величина L удовлетворяет следующим соотношениям, а именно:

$$\left]\frac{2B^2+5B+4}{B+1}\right[\le L \le 8*(2B^2+9B+10)*\left]\ln a\right[*a^{4B+4}-2$$

Если в классической 1-ОС с шаблоном соседства размера n существуют γ-КФ длины B, то для такой структуры существуют и НКФ минимальной длины L, а именно:

$$B \le L \le 2*(B+n-1)(n-1)*a^{n-1}*\left]\ln a\right[$$

где]M[обозначает целое число, не меньшее, чем M.

Результат данной теоремы ***26*** дает оценку для размера минимального блока, содержащего ***НКФ***, как функцию основных параметров структуры, а именно: размеров ***γ-КФ*** и шаблона соседства, а также мощности ***A***-алфавита структуры. Теоремы ***25-26*** могут быть обобщены также и на случай высших размерностей с произвольным индексом соседства и оказываются очень полезными при исследованиях ряда аспектов *динамики* классических ***ОС***-моделей [3,5]. Как для более глубокого осмысления понятия неконструируемости, так и для создания по ее результатам эффективного аппарата исследований динамики ***ОС***-моделей крайне желательно определение разнообразных *взаимосвязей* между различными характеристиками ***ВСКФ***, ***γ-КФ***, ***НКФ***, ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3*** как количественными, так и качественными. В настоящее время полная картина в этом вопросе отсутствует, исключая ряд отдельных результатов [3-5,9], представляемых ниже. В частности, из данных результатов следует, что критерий ***Мура-Майхилла*** (теорема ***18***) существования ***НКФ*** в классических ***ОС***-моделях и базирующийся на понятии ***ВСКФ***, во многих отношениях довольно существенно уступает вышерассмотренному критерию ***Аладьева-Кимура-Маруока*** (*теорема* ***24***), в целом эквивалентному первому и базирующемуся на введенном выше понятии ***γ-КФ***.

<u>Теорема 27</u>. Пусть $\tau^{(n)}=\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ есть декомпозиция ГФП $\tau^{(n)}$ на две глобальные функции $\tau^{(m)}$, $\tau^{(p)}$ той же 1-размерности и определенных в том же A-алфавите. Если ГФП $\tau^{(m)}$ не имеет ВСКФ, а $\tau^{(p)}$ имеет D-множество γ-КФ, то ГФП $\tau^{(n)}$ имеет то же D-множество γ-КФ. Если ГФП $\tau^{(m)}$ не имеет ВСКФ, а $\tau^{(p)}$ имеет ВСКФ, то ГФП $\tau^{(n)}$ имеет то же множество НКФ, что и функция $\tau^{(n)}$. Существуют ГФП, имеющие ВСКФ с ограниченным размером минимального простого ВБ и НКФ любого наперед заданного минимального размера. Существуют ГФП $\tau^{(n)}$, для которых любая пара ВСКФ содержит НКФ. Пусть ГФП $\tau^{(n)}$ имеет множество M пар ВСКФ. Тогда ГФП $\tau^{(n)m}$ (m>1) имеют тождественное с функцией $\tau^{(n)}$ M-множество ВСКФ тогда и только тогда, когда по меньшей мере лишь одна КФ из каждой пары ВСКФ из M является НКФ для ГФП $\tau^{(n)}$. В противном случае $(\forall k\geq 1)(M_k \subset M_{k+1})$, где M_k есть множество всех пар ВСКФ для глобальных функций перехода $\tau^{(n)k}$ (k≥1). ГФП $\tau^{(n)}$ обладает НКФ тогда и только тогда, когда по меньшей мере одна из ГФП $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ обладает НКФ. Если по крайней мере одна ГФП из пары $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ обладает НКФ-1, то их композиция $\tau^{(n)}=\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ (n=m+p-1) будет обладать НКФ и/или НКФ-1. Последние два утверждения сохраняют силу и для случая d-размерности (d≥1) и произвольного конечного A-алфавита внутренних состояний однородных структур.

Приведем доказательство лишь последних утверждений. Пусть $\tau^{(m)}$ обладает ***НКФ***, что согласно одному из критериев наличия для ***ГФП*** неконструируемости ***НКФ***-типа обусловлено наличием для нее ***ВСКФ***, а значит и существованием пар конфигураций $c_1 \neq c_2$ $\{c_1, c_2 \in C(A,d,\phi)\}$ таких, что $c_1\tau^{(m)}=c_2\tau^{(m)}=c^* \in C(A,d,\phi)$. Несложно убедиться, что эти же пары ***КФ*** $\{c_1,c_2\}$ будут являться ***ВСКФ*** и для композиции функций $\tau^{(m)}\tau^{(p)}$, т.е. ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ также будет обладать ***НКФ***. Пусть теперь ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ также обладает ***НКФ***. Следовательно, для нее существуют такие конфигурации $c^* \in C(A,d,\phi)$, для которых отсутствуют предшественники $c^{*-1} \in C(A,d,\phi)$. Поэтому, вне зависимости от ***ГФП*** $\tau^{(m)}$ композиция $\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ также (*как минимум*) будет иметь такими же неконструируемыми ***НКФ***-типа конфигурации c^*, что и завершает доказательство предпоследнего утверждения теоремы ***27***.

Рассмотрим теперь и вопрос относительно неконструируемости типа ***НКФ-1***. Пусть ***ГФП*** $\tau^{(m)}$ в композиции $\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ обладает ***НКФ-1***. Но тогда для нее существует ***КФ*** $c^* \in C(A,d,\phi)$, для которой c^{*-1}-предшественники существуют только лишь во множестве $C(A,d,\infty)$. Положим на входе ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ конфигурацию c^*. Тогда для ***КФ*** $c_1=c^*\tau^{(p)} \in C(A,d,\phi)$ возможен только один из ***4*** вариантов, а именно: КФ c_1 относительно ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ имеет ***(1)*** единственного предшественника $c^* \in C(A,d,\phi)$, ***(2)*** дополнительно предшественника $c_3 \in C(A,d,\infty)$, ***(3)*** дополнительно предшественника $c_2 \in C(A,d,\phi)$ $(c^* \neq c_2)$ или ***(4)*** дополнительно предшественников $c_2 \in C(A,d,\phi)$ и $c_3 \in C(A,d,\infty)$. Но тогда несложно убедиться, что в первых двух случаях ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ будет иметь ***КФ*** $c_1 \in C(A,d,\phi)$ в качестве ***НКФ-1*** (*по* *определению* ***НКФ-1).*** В третьем же случае ***ГФП*** $\tau^{(p)}$, а следовательно и $\tau^{(n)}$, будет обладать ***ВСКФ (НКФ);*** и, наконец, в четвертом случае ***ГФП*** $\tau^{(p)}$, а значит $\tau^{(n)}$, будет обладать как *минимум* ***НКФ.*** Пусть теперь ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ обладает ***КФ*** $c^* \in C(A,d,\phi)$ в качестве ***НКФ-1,*** но тогда для нее существуют предшественники c^{*-1} лишь из множества $C(A,d,\infty)$. Поэтому, ввиду *определяющего* соотношения $\sigma^{(n)}(0,0,0,0, \ldots, 0) = 0$ они могут быть сгенерированы ***ГФП*** $\tau^{(m)}$ только из начальных ***КФ*** из того же множества $C(A,d,\infty)$. Таким образом, и ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ будет обладать ***КФ*** c^* в качестве ***НКФ-1.*** Таким образом, если по крайней мере одна ***ГФП*** из пары $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ обладает ***НКФ-1,*** то их композиция ***ГФП*** $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\tau^{(p)}$ будет обладать неконструируемостью типов ***НКФ-1*** и/или ***НКФ.***

В свете приведенных результатов, например, следует, что в *классических* ***ОС***-моделях существуют ***ГФП,*** имеющие различные множества ***ВСКФ*** и идентичные множества ***НКФ.*** С теоретической точки зрения существенный интерес представляет установление зависимости между размерами ***(Б)*** минимальных блоков, содержащих ***ВСКФ, γ-КФ*** и ***НКФ*** в классических ***d-ОС.*** Так, например, для ***γ-КФ*** и ***НКФ*** имеет место следующее соотношение: ***Б(γ-КФ) ≤ Б(НКФ)*** [3,5,37], тогда как для случая ***ВСКФ*** и ***НКФ*** картина существенно сложнее, а именно, имеет место следующий важный довольно результат [5,88,90].

<u>Теорема 28</u>. Для каждого целого n ≥ 2 существуют классические структуры 1-ОС, для которых минимальные блоки ВСКФ, НКФ удовлетворяют соотношениям вида Б(ВСКФ)/Б(НКФ)=n или Б(ВСКФ)/Б(НКФ) = 1/(n+1) соответственно при минимальных Б(γ-КФ) = 1. Для каждого целого n ≥ 2 существует ГФП $\tau^{(n)}$ ***классической 1-ОС, не обладающая НКФ, НКФ-3, но имеющая НКФ-1 минимального размера L ≥ n-1. Для каждого целого n ≥ 3 существует глобальная функция*** $\tau^{(n)}$ ***классической бинарной 1-ОС, обладающая γ-КФ минимального размера L=n, а также ВБ ВСКФ минимального единичного размера.***

В качестве иллюстрационного примера, подтверждающего справедливость *первого* соотношения, можно привести классическую ***1-ОС, ЛФП*** которой определяется *параллельными* подстановками следующего достаточно простого вида, а именно:

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n \Rightarrow \Sigma x_j \pmod a, \quad \text{если } x_n \neq 2; \; x_j \in A=\{0,1,2, \ldots, a-1\}; \; j=1 \,..\, n$$
$$x_1x_2x_3 \ldots x_n \Rightarrow \Sigma x_j + 1 \pmod a, \quad \text{в противном случае}$$

Нетрудно убедиться, что определенная таким образом классическая структура обладает *блочной* ***НКФ*** вида $c_b = a$, тогда как для нее существуют ***ВСКФ*** с простыми ***ВБ*** минимального размера в ***n*** автоматов. Для установления *второго* соотношения вполне достаточно рассмотреть *классическую* ***1-ОС,*** чья ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками ***(29),*** раньше использованную при доказательстве теоремы ***21.*** Определеная таким образом структура обладает ***ВСКФ*** с простыми ***ВБ*** минимального единичного размера, располагая при этом и блочными ***НКФ*** минимального размера ***(n+1)*** и вида $c_b = 0^n1$. Более того, в обоих случаях для структур имеют место единичные размеры минимальных блоков ***γ-КФ.*** Полное доказательство *второй* части теоремы можно найти в наших монографиях [3,5,55,88,90].

Достаточно интересным представляется вопрос выявления соотношений между минимальными размерами ***НКФ, ВБ ВСКФ*** и ***γ–КФ.*** Рассмотрение, не нарушая общности, проведем для случая структур ***1–ОС*** как классических *(стабильных)*, так и *нестабильных*, т.е которые не удовлетворяют определяющему условию стабильности, а именно, условию $\sigma^{(n)}(x,x, \ldots, x)=x; \; x \in A$. Предположим, что структура ***1–ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2, \ldots, a-1\}$ и индексом соседства $X=\{0,1,2, \ldots, n-1\}$ обладает неконструируемостью ***НКФ–***типа. Но тогда она будет обладать и ***НКФ*** минимального размера, скажем, ***m.*** Следовательно, согласно критериям существования для структур *неконструируемости* типа ***НКФ*** для них должны существовать как ***γ–КФ,*** так и пары ***ВСКФ*** (*теоремы* ***18*** *и* ***24***). Но тогда согласно определению ***9*** блочная ***КФ*** c_b размера m будет являться для структуры ***γ–КФ*** только в том случае, если для нее число блочных предшественников размера $m+n-1$ не будет равно $a^{(n-1)}$. В этой связи при условии, что структура обладает ***НКФ*** минимального размера m, очевидно, что минимальный размер ***γ–КФ*** будет не больше m, т.е. ***Б(γ–КФ) ≤ Б(НКФ).*** С другой стороны, более громоздкий анализ показывает [79,88,90], что для этого типа структур справедливо и следующее определяющее соотношение, а именно: ***Б(ВБ ВСКФ) ≤ Б(НКФ).***

Рассмотрим теперь вопрос соотношения между минимальными размерами ***γ–КФ*** и ***ВБ ВСКФ.*** В качестве простого примера, иллюстрирующего случай, когда размеры *минимальных* ***НКФ, γ–КФ*** и ***ВБ ВСКФ*** совпадают, можно привести *классическую* ***1-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2\}$ и простейшим индексом соседства $X_n=\{0,1\}$, ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ которой определяется параллельными подстановками:

$$00 \to 0 \qquad 01 \to 1 \qquad 02 \to 1 \qquad 10 \to 1 \qquad 11 \to 0 \qquad 12 \to 1 \qquad 20 \to 1 \qquad 21 \to 1 \qquad 22 \to 0$$

Очевидно, в качестве ***НКФ*** выступает блочная ***КФ*** $c=<2>$, пару ***ВСКФ*** $\{<0|1|0>, <0|2|0>\}$ и ***γ–КФ*** $b=<2>$. Размеры ***НКФ, γ–КФ*** и ***ВБ ВСКФ*** имеют единичный размер. Между тем, данный случай в определенной мере можно отнести к типу *исключительных* и для более сложных структур размер минимальной блочной ***НКФ,*** вообще говоря, больше и значительно *минимальных* размеров ***γ–КФ*** и ***ВБ ВСКФ.*** Рассмотрим классическую бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, чья ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ определяется параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$\begin{array}{llll} 000 \to 0 & 010 \to 1 & 100 \to 0 & 110 \to 1 \\ 001 \to 1 & 011 \to 1 & 101 \to 1 & 111 \to 0 \end{array}$$

Очевидно, что данная структура обладает ***γ–КФ*** минимального размера $m=1$. С другой стороны, несложно убедиться, что структура обладает парами ***ВСКФ*** с ***ВБ*** минимального размера $m=2$, в частности, $\tau^{(3)}: <01|01|10> = \tau^{(3)}: <01|10|10> = <1011>$. В этом случае справедливо соотношение: ***Б(γ–КФ) < Б(ВБ ВСКФ).*** Рассмотрим теперь классическую бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$ и чья ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ определяется параллельными подстановками следующего вида:

$$\begin{array}{llll} 000 \to 0 & 010 \to 0 & 100 \to 1 & 110 \to 1 \\ 001 \to 1 & 011 \to 0 & 101 \to 1 & 111 \to 0 \end{array}$$

Очевидно, что данная структура обладает ***γ–КФ*** минимального размера $m \ge 1$. С другой стороны, несложно убедиться, что структура обладает парами ***ВСКФ*** с ***ВБ*** минимального размера $m=1$, в частности, $\tau^{(3)}: <10|0|01> = \tau^{(3)}: <10|1|01> = <101>$. И в этом случае справедливо соотношение, а именно: ***Б(γ–КФ) > Б(ВБ ВСКФ).*** Итак, можно сформулировать довольно полезное предложение.

Если структура d–ОС (d ≥ 1) обладает неконструируемостью НКФ–типа, то для минимальных размеров конфигураций НКФ (NCF), γ–КФ (γ) и ВБ ВСКФ(IB MEC) имеет место соотношение:

$$L_{min}^{ncf} \ge L_{min}^{ibmec} \,\{\le|\ge\}\, L_{min}^{\gamma}; \quad \textit{where} \quad L_{min}^{ncf}, L_{min}^{ibmec}, \textit{and } L_{min}^{\gamma} \textit{ are minimal}$$
$$\textit{sizes of the block configurations NCF, IB MEC, and } \gamma\textit{-CF accordingly}$$

Число d–ОС (d ≥ 1) с алфавитом A={0,1,...,a–1} и индексом соседства X={0,1,2,..., n–1}, обладающих конфигурациями НКФ и γ–КФ размера 1, задается формулой $N(a,n)=\sum_{j=1}^{a-1}(-1)^{a+j+1}C_a^j\, j^{a^n}$.

Результат имеет ряд приложений в исследовании вопросов неконструируемости в ***d–ОС (d ≥ 1).***

Доказательство второй части предложения основывается на достаточно простых комбинаторных соображениях наряду с определениями неконструируемых конфигураций ***НКФ***–типа и ***γ–КФ,*** а именно, производится подсчет числа ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}(x_1,x_2,...,x_n)$, т.е. структур ***d–ОС (d ≥ 1),*** для которых имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\exists b \in A)(\forall <x_1 x_2 x_3 \ldots x_n>)(\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \neq b); \quad x_j \in A; \quad j=1..n$$

При таком подходе решение сводится к задаче подсчета числа всевозможных распределений a^n различных шаров по a различным урнам при условии, что по меньшей мере одна из урн будет пустой, т.е. сводится к хорошо известной комбинаторной задаче. Данные результаты имеют ряд приложений при исследованиях вопросов неконструируемости в классических ***d–ОС*** $(d \geq 1)$.

Так, следующее предложение представляет определенный интерес для случая структур ***1–ОС.***

Доля $\Delta(a,n)$ классических 1-ОС относительно всех классических 1-ОС с алфавитом $A=\{0,1,\ldots,a-1\}$ и индексом соседства $X=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, обладающих парами ВСКФ с ВБ минимального размера 1, удовлетворяет соотношению $\Delta(a,n) \geq 1/a^n$. В то время как число $T(a,n)$ всех классических 1–ОС с алфавитом $A=\{0,1,\ldots,a-1\}$ и индексом соседства $X=\{0,1,\ldots,n-1\}$, одновременно обладающих γ–КФ и НКФ минимальных размеров 1, а также парами ВСКФ с ВБ простейшего типа (не содержат других пар ВСКФ) вида: $\{<0^{n-1}|1|0^{n-1}>, <0^{n-1}|0|0^{n-1}>\}$ и $\{<0^{n-1}|10^p|0^{n-1}>, <0^{n-1}|0^p1|0^{n-1}>\}$ ($p = 1..n$; h^p – конкатенация p символов «h»), удовлетворяет следующему соотношению, а именно:

$$T(a,n) \geq \begin{cases} 1 & , \text{ if } a=2 \\ \sum_{j=1}^{a-2} (-1)^{a+j} C_{a-1}^{j} j^{a^n-n-1} & , \text{ if } a \geq 3 \end{cases}$$

Число $G(a,n)$ классических 1–ОС с алфавитом $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ и индексом соседства $X=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, обладающих только парами ВСКФ с ВБ простого типа (не содержащих других пар ВСКФ), а именно вида $\{<0^{n-1}|1|0^{n-1}>, <0^{n-1}|0|0^{n-1}>\}$ и $\{<0^{n-1}|10^p|0^{n-1}>, <0^{n-1}|0^p1|0^{n-1}>\}$ (где $p=1..n$; h^p – конкатенация p символов «h»), не менее величины $G(a,n) = (a!)^{a^{n-1}}/a^{n+1}$; более того, доля данного типа классических структур 1–ОС относительно всех классических структур 1–ОС такого же самого типа не меньше величины $\left(a!/a^a\right)^{a^{n-1}}/a^n$.

В основу доказательства данного предложения положен один специальный подкласс структур ***1-ОС, ЛФП*** $\sigma^{(n)}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ которых подчиняются следующим ограничениям, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : \begin{cases} 0^n & \to 0 \\ 0^m 10^p & \to 0 \end{cases}; \quad p = n - m - 1, m = 0..n-1$$

где h^m – кратность вхождения символа «h», $h^0 \equiv \Lambda$ – пустой символ. Несложно убедиться, данного типа классические ***1–ОС*** обладают парами ***ВСКФ*** простого вида $\{<0^{n-1}|1|0^{n-1}>, <0^{n-1}|0|0^{n-1}>\}$ и $\{<0^{n-1}|10^p|0^{n-1}>, <0^{n-1}|0^p1|0^{n-1}>\}$ (*где* $p=1..n$; h^p – *конкатенация* p *символов* «h»). Между тем как на остальных кортежах $<x_1x_2 \ldots x_n>$ $\{x_j \in A; j=1..n\}$ ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется в зависимости от исследуемых свойств классических структур ***1–ОС.*** Более того, следует отметить, результаты в обоих представленных предложениях естественным образом обобщаются и на размерность $d > 1$.

Доказательство первой части предложения довольно прозрачно и особых пояснений не требует. Доказательство *второй* части предложения дополнительно использует вышеупомянутый подход, сводящийся к задаче подсчета числа *всевозможных* распределений a^n-n-1 различных шаров по a-1 различным урнам при условии, что по крайней мере одна из урн будет пустой. В доказательство остальных частей предложения положены достаточно очевидные соображения, не требующие с учетом вышесказанного особых пояснений. Представленные выше результаты не только глубже проясняют саму проблему неконструируемости в классических структурах, в частности, в ***1–ОС,*** но и в определенной мере расширяют возможности ***аппарата*** исследования динамики данного типа структур, базирующегося на понятии неконструируемости конечных конфигураций.

Результаты теоремы *28* и приведенных *2* предложений представляют не только самостоятельный интерес, но на их основе можно делать достаточно определенные выводы, глубже проясняющие саму сущность понятия неконструируемости в классических ***ОС***-моделях. В частности, на основе предложения вытекает, что достаточно сложно говорить о предпочтительности того либо иного критерия в целом (*даже при условии эквивалентности обоих критериев*), хотя *критерий* на базе ***γ-КФ*** оказывается в целом ряде более предпочтительным. При этом, именно критерий на основе ***γ–КФ*** определяет наличие неконструируемости ***НКФ***-типа для конечных ***ОС***-моделей. Более того, эти и некоторые другие соображения вполне убедительно объясняет тот факт, что именно на основе понятия ***ВСКФ*** невозможно получать удовлетворительные оценки минимальных размеров ***НКФ*** и ряд других весьма важных численных характеристик для ***d–ОС*** $(d \geq 1)$. В целом же сам феномен неконструируемости обусловлен определенным типом асимметричности ***ЛФП (ГФП)*** структур.

В связи с вышесказанным мы можем теперь с полным основанием констатировать, что критерий ***Мура-Майхилла*** (теорема *18*) существования ***НКФ*** в *классических* ***ОС***-моделях в довольно многих отношениях существенно уступает эквивалентному ему критерию ***Аладьева-Маруока-Кимура*** (теорема *24*), базирующемуся на понятии ***γ-КФ***. Из самого же понятия ***γ-КФ*** и целого ряда иных соображений следует, что в его основе лежит определенная асимметричность ***ЛФП*** в ***ОС***-модели [54], ибо само понятие ***γ-КФ*** есть не что иное, как асимметричность в отображениях локальной функцией $\sigma^{(n)}$ конфигураций на конечных блоках единичных автоматов структуры. В случае наличия детальной картины такой асимметрии можно было бы существенно продвинуться и в исследованиях как самой проблемы *неконструируемости* (*по сравнению с ее нынешним состоянием*), так и в сопутствующих ей весьма многочисленных интересных вопросах, связанных с *динамикой* как классических, так и нестабильных ***ОС***-моделей.

Переходим теперь к обсуждению остальных трех типов неконструируемости (***НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3***) в классических ***ОС***-моделях, которые согласно теоремы *9* могут сочетаться в достаточно широких пределах. Рассмотрев критерии существования типа ***НКФ***, охарактеризуем состояние аналогичного вопроса для остальных *3* типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях. Из определений *1, 3, 4* и теоремы *9* несложно убедиться, что никакая конечная ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ не может быть одновременно неконструируемой ***КФ*** типа более одного. Следовательно, попарные пересечения множеств ***НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3*** для любой ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ классической ***d-ОС*** являются *пустыми* множествами. Нижеследующая теорема представляет критерий существования ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** в классической ***d-ОС***, не обладающей неконструируемостью ***НКФ***, а значит и ***НКФ-3***.

<u>Теорема 29</u>. Будем говорить, что множество $C(A,d,\infty)$ ***замкнуто относительно функции*** $\tau^{(n)}$ ***в классической d-0С, если выполняется соотношение*** $(\forall c` \in C(A,d,\infty))(c`\tau^{(n)} \in C(A,d,\infty))$; ***в противном случае имеет место незамкнутость*** $C(A,d,\infty)$***-множества. Классическая d-ОС, не имеющая НКФ (НКФ-3), обладает НКФ-1*** {***НКФ-2***} ***тогда и только тогда, когда множество*** $C(A,d,\infty)$ ***является незамкнутым*** {***замкнутымо***} ***относительно ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***структуры.***

Доказательство теоремы *29* сводится к следующему (*при этом, для простоты не нарушая общности оно проводится для случая* ***1-ОС***). Рассмотрим произвольную классическую ***1-ОС***, не обладающую ***НКФ***, а значит ***НКФ-3*** и парами ***ВСКФ***. Из определения *4* с очевидностью следует, что наличие в структуре ***НКФ-1*** с необходимостью требует и незамкнутости множества $C(A,\infty)$ относительно ее ***ГФП***. Предположим теперь, что при отсутствии в структуре ***НКФ*** в ней будут отсутствовать и ***НКФ-1*** при условии незамкнутости $C(A,\infty)$-множества. Однко тогда каждая ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ должна иметь не более одного $c`$-предшественника из множества $C(A,\phi)$. Наряду с этим, каждая блочная ***КФ*** вида $c_b=0^p x_1 x_2 \ldots x_m 0^k$ $(x_j \in A;\ j=1..m)$ является в структуре конструируемой при любых целых значениях $p,k \geq 0$. С другой стороны, согласно нашего предположения должна существовать по меньшей мере одна бесконечная ***КФ*** $c^* \in C(A,\infty)$ такая, что $c^*\tau^{(n)}=c'' \in C(A,\infty)$. Очевидно, на основе такой c^*-***КФ*** можно указать ненулевую блочную ***КФ*** c_b'' сколько угодно большой длины такую, что будет справедливо c_b''=□$_b$, где □$_b$ – нулевая блочная ***КФ*** длины $|c_b|$***-n+1.*** Рассмотрим теперь конечную ***КФ*** вида ***c^=***□c_b□, а также результат ***(c#-КФ)*** применения к ней глобальной функции $\tau^{(n)}$ определенной выше классической структуры, а именно:

$$\tau^{(n)} \;:\; c\hat{} = \square y_1y_2y_3..........y_m\square$$
$$\downarrow \;:\; c^{\#} = ...\square c`_1 \;.....\; 0^p \;...\; c`_2\square$$

В связи с вышесказанным, длину ***c^-КФ*** можно выбирать так, что ***p***-длина нулевой блочной ***КФ,*** разделяющей подконфигурации {$c`_1$, $c`_2$} в ***c#-КФ,*** может быть сделана сколько угодно большой. Очевидно, по крайней мере одна из подконфигураций {$c`_1$, $c`_2$} должна быть ненулевой, ибо в противном случае имело бы место соотношение $c\hat{}\tau^{(n)}$ = □, говоря о наличии в структуре ***ИсКФ*** (*значит* ***ВСКФ, НКФ,*** *возможно* ***НКФ-3)***, что противоречит условию. Не нарушая общности, для определенности полагаем вначале, что $c`_1$≠□ и $c`_2$=□. Но так как длину ***c^-КФ*** можно выбирать сколько угодно большой, то несложно убедиться, что в данном случае для ***КФ*** $c^{\#}$=□$c`_1$□□ будет существовать бесконечное множество ***c^***-предшественников любой наперед заданной длины (*а значит* ***ВСКФ*** *и* ***НКФ)***, что противоречит условию. Рассмотрим, наконец, случай при $c`_1$, $c`_2$ ≠ □; по крайней мере одна из подконфигураций {$c`_1$,$c`_2$} должна быть ***НКФ-1*** (*по очевидным причинам эти подконфигурации не могут быть* ***НКФ-3*** *и одновременно* ***НКФ-2)***, ибо в противном случае ***КФ*** {$c`_1$,$c`_2$} имели бы по одному предшественнику соответственно {c''_1,c''_2} из ***C(A,ϕ)***-множества. Но тогда можно было бы определить пару ***ВСКФ*** {***c^***, $c^{@}$=□$c''_1 0^k c''_2$□} ($c\hat{}\tau^{(n)}$=$c^{@}\tau^{(n)}$=$c^{\#}$) для ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ исходной структуры, что противоречит условию, завершая доказательство введенного критерия существования ***НКФ-1*** в классических структурах ***1-ОС,*** не обладающих ***НКФ*** и ***НКФ-3.***

Достаточность же условия очевидна – замкнутость ***C(A,∞)***-множества влечет за собой наличие в ***1-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ-2*** согласно его определения ***4.*** Итак, еще раз отметим, что множество ***C(A,ϕ)*** по определению содержит нулевую (*по составляющим ее* ***0****-состояниям)* □***-КФ,*** имеющую нулевую длину. Предположим, что классическая ***1-ОС*** обладает ***НКФ-2*** при условии отсутствия для нее ***НКФ***-неконструируемости. Но тогда согласно вышесказанного и теоремы ***9*** множество ***C(A,∞)*** должно быть замкнутым, в противном случае структура обладала бы ***НКФ-1,*** что противоречило бы теореме ***9*** (*табл.* ***3;*** *сочетания* ***13*** *и* ***14).*** Следовательно, если ***замкнутость*** множества ***C(A,∞)*** относительно ***ГФП*** классической ***1-ОС*** достаточна для наличия в ней ***НКФ-2,*** то при отсутствии в ней ***НКФ*** и ***НКФ-3*** данное условие является и необходимым, и достаточным для существования в ней ***НКФ-2.*** Что и завершает доказательство теоремы ***29.*** Результат теоремы ***29*** обобщается также и на случай высших размерностей классических структур ***d-ОС (d≥1).***

В предположении, что *полностью нулевая* □***-КФ*** принадлежит ***C(A,d,ϕ)***-множеству (*здесь мы в своем роде используем методику нестандартного анализа* [278], *предполагая существование такой «идеальной»* ***КФ)***, можно дать и другую формулировку теоремы ***29,*** которая представляет существенно более удобный критерий существования неконструируемостей типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** в классических ***d-ОС,*** не обладающих типами неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-3*** [3,5,8,9,54-56,88,90,536].

<u>Теорема 30</u>. В классической d-ОС, не обладающей НКФ и НКФ-3, существуют НКФ-1 {***НКФ-2***} ***только тогда, когда для ее ГФП*** $\tau^{(n)}$***, существуют*** {***отсутствуют***} ***КФ c∈C(A,d,∞) такие, что имеет место соотношение*** $c\tau^{(n)}$ = □***. В классической d-ОС, не обладающей НКФ, существуют и НКФ-1 тогда и только тогда, когда для ее ГФП*** $\tau^{(n)}$***, существуют КФ*** c^{∞}***∈C(A,d,∞) такие, что имеет место следующее соотношение, а именно:*** $c^{\infty}\tau^{(n)}$ = □***.***

Не нарушая общности, представим набросок доказательства второй части теоремы ***30*** на основе классических ***1-ОС.*** Согласно определения ***НКФ-1*** очевидно, что при наличии в структуре ***1-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ-1*** для ее ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ существуют ***КФ*** c^{∞}***∈C(A,1,∞)*** такие, что $c^{\infty}\tau^{(n)}$=

□. Пусть теперь для **1-ОС** без **НКФ** существуют **КФ** $c^\infty \in C(A,1,\infty)$ такие, что имеет место $c\tau^{(n)}$ = □. Но тогда ввиду отсутствия для структуры **НКФ** предположим также, что каждая **КФ** $c \in C(A,1,\phi)$ имеет строго по одному предшественнику c^{-1} из того же множества $C(A,1,\phi)$, т.е. отсутствуют и **НКФ-1.** С другой стороны, учитывая наличие и **КФ** $c^\infty \in C(A,1,\infty)$ такой, что $c^\infty\tau^{(n)}$=□, определяем на ее основе конечную **КФ** c_o вида c_o=□$x_1x_2 \ldots x_q$□, где кортеж $<x_1x_2 \ldots x_q>$ $(x_1, x_q \in A\backslash\{0\})$ – часть **КФ** c^∞ достаточно большой длины. Но тогда получаем $c_o\tau^{(n)}$ = □$c_1 0 \ldots 0 c_2$□, где по меньшей мере одна из **КФ** $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой. В противном случае в этой структуре существовали бы пары **ВСКФ,** а значит и **НКФ,** что противоречит условию. Пусть лишь одна из $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой (*для определенности* c_1). Но тогда она будет иметь бесконечно много предшественников вида c = □$x_1x_2 \ldots x_q$ □, что также противоречит отсутствию для структуры **НКФ.** Следовательно, ввиду отсутствия **НКФ** она должна иметь *предшественников* из множества $C(A,1,\infty)$, а не из множества $C(A,1,\phi)$, т.е. быть **НКФ-1.** Пусть теперь обе **КФ** $\{c_1, c_2\}$ будут конечными, отличными от *нулевых* и обе имеют по одному предшественнику $\{c^{-1}{}_1, c^{-1}{}_2\}$ из множества $C(A,1,\phi)$. Рассмотрим **КФ** c^*=□ $c^{-1}{}_1 0 \ldots 00 c^{-1}{}_2$□, для которой по определению получаем $c^*\tau^{(n)}$=□$c_1 0 \ldots 00 c_2$□. Но тогда для соответствующим образом определенной **КФ** $c^\#$=□$x_1x_2x_3 \ldots x_q$□ получаем, что $c^*\tau^{(n)} = c^\#\tau^{(n)}$ = □$c_1 000 \ldots 00 c_2$□ $(c^* \neq c^\#)$, что вновь приводит нас к противоречию с отсутствием для данной структуры неконструируемости типа **НКФ.** Следовательно, по крайней мере хоть одна из **КФ** $\{c_1, c_2\}$ должна быть **НКФ-1,** что и завершает доказательство теоремы.

Данная теорема дает ответ на целый ряд вопросов, поставленных в монографиях [1,3] и в других работах. При этом, она может быть использована для обобщения ряда результатов по проблеме неконструируемости в классическихструктурах ***d*-ОС** $(d \geq 1)$. Дальнейшее исследование данной проблематики позволило нам ввести новое понятие **ВСКФ** как основу для *обобщенного* критерия неконструируемости в классических структурах ***d*-ОС** $(d \geq 1)$ [5,8,9,54-56,88,90], а именно.

<u>Определение 10</u>. Две конфигурации $c_1, c_2 \in C(A,d)$ $(c_1 \neq c_2)$ образуют для функции $\tau^{(n)}$ классической d-ОС $(d \geq 1)$ пару ВСКФ-1 тогда и только тогда, когда для данных конфигураций имеет место следующее определяющее соотношение, а именно: $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A,d,\phi)$.

Введенное нами понятие **ВСКФ-1** *взаимной стираемости* пары произвольных **КФ** в классических ***d*-ОС** самым тесным образом связано с общей проблемой неконструируемости в структурах, о чем свидетельствует следующий довольно важный результат [56,88].

<u>Теорема 31</u>. Классическая d-ОС $(d \geq 1)$ обладает типами неконструируемости НКФ (возможно, и НКФ-3) и/либо НКФ-1 тогда и только тогда, когда в структуре существуют пары ВСКФ-1. Если для данной структуры отсутствуют ВСКФ-1, то данная структура обладает НКФ-1; обратное же в общем случае неверно.

Идея доказательства теоремы иллюстрируется (*не нарушая общности*) для случая **1-ОС,** довольно прозрачна и сводится к следующему. Предположим, что некоторая классическая **1-ОС** обладает **НКФ** (*возможно также* **НКФ-3**) и/или **НКФ-1.** Если же в структуре существуют **НКФ** и, возможно, **НКФ-3** и **НКФ-1,** тогда согласно теоремы ***18*** и вышесказанного для подобной структуры должны существовать и пары **ВСКФ-1** $\{c_1, c_2\}$ вида $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A,1,\phi)$ $\{c_1 \neq c_2;\ c_1,c_2 \in C(A,\phi)\}$. Пусть в структуре существуют **НКФ-1** без **НКФ** и **НКФ-3.** Но тогда множество $C(A,1,\infty)$ будет незамкнуто относительно **ГФП** структуры, т.е. в ней существует **КФ** $c^\wedge \in C(A,\infty)$ такая, что $c^\wedge\tau^{(n)} = c` \in C(A,\phi)$. Если для **$c`$-КФ** существует *предшественник* также из $C(A,\phi)$-множества, то согласно определения ***10*** в такой структуре существуют пары **ВСКФ-1.** Предположим, что для каждой конфигурации $c \in C(A,\phi)$, отличной от **НКФ-1,** существует предшественник только из множества конфигураций

C(A,ϕ), что в соответствии с определением **4** влечет за собой наличие ***НКФ-2*** в структуре ***1-ОС***, противоречащее условию. Следовательно, в данной структуре должны существовать и пары ***КФ*** вида $c_1 \in C(A,\phi)$ и $c_2 \in C(A,\infty)$ такие, что $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A,\phi)$, т.е. пары ***ВСКФ-1***. Таким образом, необходимость условия полностью доказана. Пусть теперь классическая ***1-ОС*** обладает парами ***ВСКФ-1***. Если такие пары включают и классические ***ВСКФ*** (*определение* **6**), то согласно теоремам 9 и **18** структура будет обладать ***НКФ***, а также, возможно, и ***НКФ-3***, и ***НКФ-1***. Предположим, что каждая пара ***ВСКФ-1*** включает по крайней мере *одну* ***КФ*** из множества ***C(A,∞)***, что говорит о его незамкнутости. Но тогда нетрудно показать, что ***1-ОС*** будет обладать ***НКФ*** (*возможно, и* ***НКФ-3***) и/или ***НКФ-1***. Сказанное и завершает доказательство достаточности условия. Пусть теперь для *классической* ***1-ОС*** отсутствуют пары ***ВСКФ-1***. Таким образом, для нее согласно вышесказанному отсутствуют ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1***, тогда как каждая ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ является в структуре ***НКФ-2***. С другой стороны, согласно теоремы **9** наличие для *классической* ***1-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ-2*** не влечет за собой отсутствия для нее пар ***ВСКФ-1***. Сказанное завершает доказательство теоремы **31** в целом.

Результат теоремы **31** является существенным обобщением хорошо известного критерия ***Мура-Майхилла*** (теорема **9**) существования ***НКФ*** в классических ***ОС***-моделях, а также эквивалентного ему критерия ***Аладьева-Кимура-Маруока*** (теорема **24**), распространяя их также на другие типы неконструируемости. Так как понятие ***НКФ-3*** является прямым следствием дифференцировки ***НКФ***-неконструируемости на основе различий *блочной* и *конфигурационной неконструируемостей*, то представляется весьма интересным установить критерий того, чтобы конечная ***КФ*** являлась в структуре ***НКФ-3***. Данный критерий представляет следующая основная теорема [5,8,9].

<u>Теорема 32</u>. Конфигурация c=□c_b□ является для классической 1-ОС неконструируемой КФ типа НКФ-3 тогда и только тогда, когда блочная конфигурация c_b в структуре конструируема, но блочная КФ $c`_b=0^m c_b 0^m$ ($m \geq a^n+n-1$) является в этой структуре неконструируемой НКФ-типа.

Доказательство данной теоремы сводится к следующему. Пусть некоторая ***КФ*** c=□c_b□ является в классической ***1-ОС*** *неконструируемой* типа ***НКФ-3***. Тогда согласно определения **3** блочная c_b-***КФ*** является в такой структуре конструируемой при отсутствии для ***КФ*** c = □c_b□ предшественников из множества ***C(A)***. В свете данного условия предположим, что при некотором $m > a^n+n$ блочная ***КФ*** $c_b^* = 0^m c_b 0^m$ является конструируемой, а именно:

$$c`_b = \underbrace{\ldots y_1 \ldots y_n \ldots\ldots y_1 \ldots y_n}_{S}\,|\ldots G\ldots|\,\underbrace{\ldots z_1 \ldots z_n \ldots\ldots\ldots z_1 \ldots\ldots z_n}_{B}\,|\,x_1 \ldots x_{n-1}$$

$$c^*_b = \underbrace{000\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0000}_{m}\,|\ldots c_b\ldots|\,\underbrace{000\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0000}_{m}\,|$$

т.е. для нее существует по крайней мере одна *блочная* ***КФ***-предшественник $c`_b$ такая, что $c`_b\tau^{(n)} = c^*_b$. Но так как имеет место соотношение $m > a^n+n$, то *слева* и *справа* от ***G***-подконфигурации в ***КФ*** $c`_b$-***КФ*** существует по меньшей мере по одной паре идентичных кортежей $<y_1 \ldots y_n>$ и $<z_1 \ldots z_n>$ соответственно. Следовательно, можно определить ***КФ*** вида $c'' = \ldots SSSGBBB \ldots$ такую, что имеет место $c''\tau^{(n)}$ = □c_b□ = c {$c'' \in C(A)$}, противореча тому предположению, что c-***КФ*** является в данной структуре ***НКФ-3***. Полученное противоречие доказывает необходимость условия. Предположим теперь, что для ***КФ*** c=□c_b□ блочная c_b-***КФ*** является конструируемой, а блочная ***КФ*** $c^*_b = 0^m c_b 0^m$ при $m > a^n+n$ является ***НКФ***. В этом случае исходная c-***КФ*** не может иметь предшественников из множества ***C(A)*** конфигураций, что доказывает достаточность условия и теоремы **32** в целом.

Результат теоремы **32** представляет собой своего рода конструктивный тест на принадлежность произвольной ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ к типу ***НКФ-3***, являясь при этом довольно эффективным средством в целом ряде теоретических исследований по динамике классических ***ОС***-моделей. Поэтому, из приведенных в разделе результатов возможно сделать вывод, что понятие неконструируемости в *классических* ***d-ОС (d≥1)*** изучено достаточно детально, поэтому на сегодня данный раздел теории ***ОС***-моделей представляется нам одним из наиболее развитых. Однако остается и ряд открытых вопросов и довольно перспективных направлений исследования. Прежде всего, это относится к отсутствию удовлетворительных критериев существования для *классических* структур сочетаний типов неконструируемости согласно табл. **2** в ее полном объеме. Итак, представленные в данном разделе результаты закрывают только часть (*хотя и очень существенную*) данного вопроса. Более детальную информацию по проблеме неконструируемости можно также найти в цитированной в настоящем разделе литературе и в обширной библиографии [536]. Между тем, имея в виду всю актуальность данной проблематики, в ***ТТГ*** продолжаются исследования в этом направлении.

В основном, до сих пор нами рассматривались три базовых типа неконструируемости, а именно типы ***НКФ***, ***НКФ-1*** и ***НКФ-2***. Между тем, классическая ***ОС***-модель может обладать также типом неконструируемости ***НКФ-3***. Этот тип неконструируемости определяет наличие для структуры конечной ***КФ*** вида c=□$x_1x_2x_3$ ... x_p□; x_1, $x_p \in A\backslash\{0\}$, не имеющей предшественников из множества $C(A,1,\infty)\cup C(A,1,\phi)$, тогда как блочная ***КФ*** x_1x_2 ... x_p не является в структуре ***НКФ***. Наличие такого типа неконструируемости демонстрировалось выше. В целом ряде случаев использование этого типа неконструируемости оказывается достаточно полезным средством при исследованиях ряда динамических свойств классических ***ОС***-моделей. Здесь мы лишь еще раз дополнительно к уже сказанному приведем мотивацию, почему данный тип неконструируемости не отнесен нами к *базовому*. Рассмотрим пример *бинарной* ***1-ОС***, ***ЛФП*** которой определяется системой *параллельных* подстановок следующего простого вида:

$$000 \to 0 \qquad 010 \to 1 \qquad 100 \to 0 \qquad 110 \to 1$$
$$001 \to 1 \qquad 011 \to 0 \qquad 101 \to 1 \qquad 111 \to 1$$

Пытаясь на основе данной ***ЛФП*** определить для ***КФ*** c=□1□ предшественников, убеждаемся, что их для нее не существует ни во множестве $C(A,d,\phi)$, ни во множестве $C(A,d,\infty)$:

t - 1	.....	–	1	0	1	0	0	0	.....
	.....	–	0	1	1	0	0	0	.....
	.....	–	–	–	0	1	1	–	.....
	.....	–	–	–	0	0	0	0	.....
t	.....	0	0	1	0	0	0	.....	.....

С другой стороны, блочная ***КФ*** $c_b=1$ не является ***НКФ***, ибо ее конструируемость обеспечивается уже за счет **5** параллельных подстановок, определяющих ***ЛФП*** структуры. Однако, определив на базе ***КФ*** $c_b=1$ блочную ***КФ*** $c^*_b=0010$, несложно убедиться, что она является ***НКФ***. Следовательно, обобщая сказанное, каждая ***КФ*** типа ***НКФ-3*** легко доопределяется до ***НКФ***, т.е. наличие в ***d-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ-3*** влечет за собой наличие для нее и ***НКФ***-неконструируемости. Тогда как обратное в общем случае неверно, т.е. ***d-ОС*** может обладать *неконструируемостью* типа ***НКФ*** при отсутствии для нее ***НКФ-3***. В качестве очень простого примера приведем *классическую* бинарную ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$ и ***ЛФП*** следующего вида, а именно:

$$00 \to 0 \qquad 01 \to 0 \qquad 10 \to 0 \qquad 11 \to 1$$

Очевидно, согласно критерия существования ***НКФ*** на основе понятия ***γ-КФ*** (теорема ***24***) можно удостовериться, что определенная таким образом ***1-ОС*** обладает ***НКФ***, в частности, уже блочная ***КФ*** вида $c_b = 101$. С другой стороны, для данной структуры отсутствуют ***НКФ-3***. Действительно, рассмотрим произвольную конструируемую в структуре блочную конфигурацию c^*:

c^{-1} =	.....	y_o	y_1	y_2	.....	y_p	y_{p+1}	.....
c^* =	.....	0	x_1	x_2	.....	x_p	0	.....

Исходя из ***ЛФП*** структуры, несложно убедиться, что для такой *блочной* ***КФ c**** можно определить ее предшественник c^{-1}, принадлежащий ко множеству ***C(A,d,ϕ)***, что и говорит об отсутствии для структуры неконструируемости типа ***НКФ-3***. Таким образом, ***наличие в классической d-ОС (d≥1) неконструируемости типа НКФ-3 обусловливает наличие в ней и НКФ-неконструируемости, тогда как обратное в общем случае неверно.*** Вместе с тем, можно показать, что: ***В классической d-ОС (d≥1) существуют НКФ (НКФ-3) только тогда, когда для нее существуют конечные КФ c, не имеющие предшественников из множества C(A,d,∞)∪C(A,d,ϕ)*** [80]. Между тем, в целом ряде случаев нам будет достаточно удобно группировать оба типа неконструируемости под единым понятием ***«НКФ»***, отдельно не выделяя при этом специфического типа ***НКФ-3***, который в целом ряде случаях оказывается достаточно полезным.

Наряду с классическими ***ОС***-моделями большой прикладной интерес представляют также и так называемые конечные ***ОС***-модели, состоящие из сколько угодно большого, но конечного числа единичных автоматов. Этот класс структур с теоретической точки зрения наиболее интенсивно исследуется японскими математиками [135,185,230], а также рядом и других исследователей [1,3, 9,138,147,148,158,159,161,166,170,171,173,175-179,205,267]. Наши результаты в данном направлении представлены в монографиях [1,3-5,9,55]. Работы в этом направлении достаточно перспективны, имея в виду многочисленные прикладные аспекты класса конечных ***ОС***-моделей, прежде всего в качестве использования их как *параллельных дискретных* моделей различных объектов. При этом, в отношении проблемы неконструируемости ряд наших результатов по конечным ***ОС***-моделям представляется в последнем разделе главы, здесь же представим только один результат, который непосредственно связан с общей проблемой неконструируемости в классических ***ОС***-моделях.

<u>Теорема 33</u>. Если ГФП $\tau^{(n)}$ обладает НКФ, НКФ-3 и/либо НКФ-1, то существует достаточно широкий класс конечных замкнутых d-ОС с ГФП $\tau^{(n)}$, обладающими $НКФ_f$, и наоборот. Среди множества всех $НКФ_f$ непосредственно устанавливаются прямые и косвенные аналоги типов неконструируемости НКФ, НКФ-3 и НКФ-1.

Результат теоремы *33* является распространением ранее полученных нами результатов [55,56,90] на случай неконструируемости типа ***НКФ-3***. Однако в общем случае конечных ***ОС***-моделей эта теорема не имеет места. Весьма интересным представляется исследование неконструируемости для важного с точки зрения физического моделирования класса ***ОСнР***-моделей (*раздел* ***1.2)***. При этом, довольно интересным представляется вопрос относительно проблемы *неконструируемости* для одного специального расширения классических ***d-ОС (d ≥ 1)***.

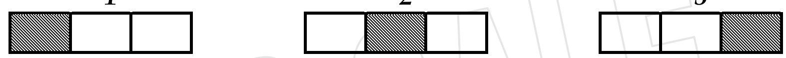
Каждая классическая ***d-ОС (d≥1)*** характеризуется единым индексом соседства ***X***, определяющим соответствующий ему шаблон соседства. Между тем, достаточно интересным представляется и класс структур, базирующихся на концепции классических структур, у которых в рамках *общего* постоянного размера ***ШС*** индекс соседства определяется конфигурацией ***ШС***. В данном случае ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ такой структуры будет иметь следующий вид, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = x_j^*; \quad j = j(x_1, x_2, ..., x_n); \quad x_j^*, x_k \in A; \quad k = 1..n; \quad j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$$

т.е., на основе ***КФ*** $<x_1,x_2,...,x_n>$ вычисляется состояние ***j***-автомата ***ШС*** согласно индекса соседства $X_j=\{-(j-1),...,-2,-1,0,1,2,...,n-j\}$; ***1≤j≤n***. Однако при таком определении структуры вполне возможно возникновение неоднозначности при вычислениях состояний единичных автоматов с течением времени ***t***. В качестве примера рассмотрим одномерную *бинарную* структуру, ***ШС*** которой имеет размер ***3***, в рамках которого применяются ***3*** индекса соседства , а именно: $X_1=\{0,1,2\}$, $X_2=\{-1,0,1\}$ и

X_3={*-2,-1,0*}. Система параллельных подстановок, определяющая *ЛФП* структуры, с привязкой ее к индексам соседства имеют следующий вид (*заштрихованными отмечены центральные автоматы* ***ШС****, соответствующие указанным индексам соседства*), а именно:

X_1 X_2 X_3



X_1	X_2	X_3
000 → 0	***110 → 1***	***011 → 0***
001 → 1	***111 → 0***	***100 → 1***
010 → 1		***101 → 1***

Таким образом, в рамках геометрически единого ***ШС*** составляющие его элементарные автоматы наделены несколько более сложной функцией коммутации (*по отношению к постоянной функции классических структур*) по выбору центрального автомата, т.е. автомата, чье состояние меняется в следующий момент времени в зависимости от конфигурации его ***ШС***. В отличие от *классических* структур применение к текущей конфигурации глобальной функции перехода таким образом определенной структуры наиболее удобно запрограммировать следующим образом. На первом этапе к произвольной начальной конфигурации ***c^^^*** применяются параллельные подстановки, соответствующие индексу соседства X_1, затем соответствующие индексу X_2 и, наконец, индексу X_3. Тогда состояние единичного ***j***-автомата в ***КФ*** c^^^$\tau^{(3)}$ вычисляется посредством наложения полученных состояний в результате применения к исходной конфигурации ***c^^^*** параллельных подстановок, соответствующих индексам соседства X_1, X_2 и X_3 на базе весьма простого правила, а именно: ***(1)*** если соответствующий ему столбец после применения правил подстановок пуст, то ***j***-автомат получает состояние ***j***-автомата *исходной* ***КФ c^^^***, **(2)** если столбец содержит состояния и все они идентичны или различны, для определения состояния ***j***-автомата в ***КФ*** c^^^$\tau^{(3)}$ нужно определить некоторую функцию *выбора*, однозначно определяющую состояние. В приведенном выше примере, в частности, использована логическая функция *выбора* ***XOR***. Данная *необратимая* функция представляет собой хорошо известную операцию сложения по ***(mod 2)***.

automata	...	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
c =	...	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	...
X_1	...	*0*	*1*	*1*					*1*					*1*					*0*		...
X_2	...							*1*				*0*	*1*					*1*			...
X_3	...						*1*	*0*		*1*		*0*			*1*		*1*	*0*		*1*	...
$c\tau^{(3)}$=	...	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	...

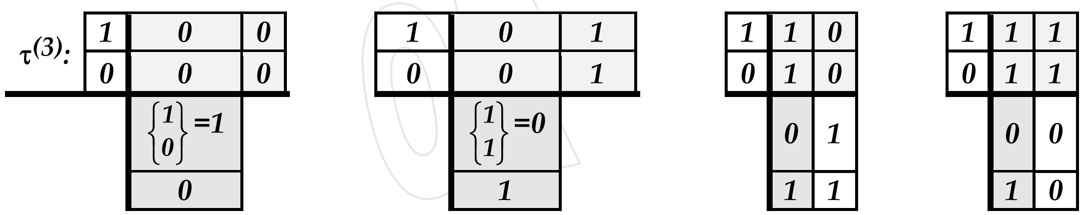
Несложно убедиться [88,90], что определенный нами такой класс структур (***ℜ****-класс*) расширяет классические структуры уже на уровне генерационных возможностей относительно некоторого фиксированного индекса соседства в рамках одного и того же ***ШС***. В этом можно уже несложно убедиться на вышеприведенном примере ***1***-мерной бинарной структуры, обеспечивающей, в частности, генерацию последовательностей ***КФ*** $c_t = c_o\tau^{(3)t}$, длины ***L*** которых растут по закону $L(c_t) = 4*t + |c_o|$, $t=0,1,2,\ldots$. Данная скорость роста недоступна для классических бинарных ***1-ОС*** с фиксированными индексами соседства X_1, X_2 и X_3. Так как размер и геометрия ***ШС*** (*без учета его центрального автомата*) при таком определении структур не зависят от переменных индексов соседства, то относительно данного класса структур вполне может врассматривалась и проблема неконструируемости. В данном контексте было показано, что *критерий* существования наиболее общего типа неконструируемости ***НКФ***, базирующегося в классических ***d-ОС*** на таком понятии, как *взаимно-стираемые конфигурации* (***ВСКФ***), сохраняет силу и для структур ℜ-класса, а именно имеет место следующий достаточно интересный и полезный результат [88,90].

Предложение 9. Однородная структура d-ОС (d≥1) определенного выше ℜ-класса с переменным индексом соседства в рамках общего ШС обладает неконструируемостью НКФ-типа тогда и только тогда, когда для данной структуры существуют пары ВСКФ.

Данный результат можно распространять и на подобный тип структур с переменным индексом соседства без ограничения фиксированностью ***ШС***. Для иллюстрации приведем весьма простой пример ***1***-мерной бинарной структуры, чья ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками, ассоциируемыми с двумя индексами соседства, а именно: $X_1 = \{0,1\}$ и $X_2 = \{-1,0\}$

X_1	X_2
$00 \to 0$	$10 \to 1$
$01 \to 1$	$11 \to 0$

Известно, что классическая ***1-ОС*** с ***ЛФП***, определенной такими параллельными подстановками, и индексом соседства X_1 либо X_2 обладает неконструируемостью типа ***НКФ-1*** при отсутствии в ней неконструируемости типа ***НКФ (НКФ-3)***. Между тем, исходя из определения пар ***ВСКФ***, из нижеследующего фрагмента уже несложно усмотреть, что определенная нами структура также не обладает парами ***ВСКФ*** при условии наличия для нее двух индексов соседства X_1 и X_1:



Несложно уже показать, что определенная данным образом структура не будет обладать блочно неконструируемыми ***КФ*** (*т.е.* ***НКФ*** и ***НКФ-3***). При этом, данная структура обладает ***НКФ-1*** уже простейшего вида ***c=□1□***, что следует из наличия для нее *лишь одного* предшественника $c^{-1}=1^\infty 0^\infty$, а именно: $c = c^{-1}\tau^{(2)} = 1^\infty 0^\infty \tau^{(2)} = \ldots 00000\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1\right\}00000\ldots$. Таким образом, наличие в структурах ℜ-класса неконструируемости ***НКФ***-типа также обусловлено наличием пары ***ВСКФ***. Структуры ℜ-класса естественным образом обобщаются на структуры с переменными индексами соседства вне рамок постоянного ***ШС***. В данном случае понятие пар ***ВСКФ*** вполне естественным образом модифицируется в плане увеличения рамки ***B*** (*определение* ***7***) в зависимости от ***ШС*** *максимального* индекса соседства. Детальнее с вопросами приложений структур ℜ-класса, а также целого ряда их обобщений на структуры без ограничения фиксированностью ***ШС*** наряду с целым рядом их интересных свойств можно ознакомиться в [77,88,90,567]. Некоторым интересным особенностям проблемы неконструируемости для случая конечных ***ОС***-моделей посвящен последний раздел настоящей главы. Завершив на этом обсуждение критериев существования трех основных типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях, переходим к алгоритмическим аспектам этой проблематики, т.е. к вопросам *алгоритмической* разрешимости тех или иных ее проблем. Данная тема представляется достаточно важной для ***ТОС***-проблематики со многих точек зрения.

2.4. Алгоритмические аспекты проблемы неконструируемости и связанные с нею вопросы динамики классических ОС-моделей

Алгоритмическая разрешимость проблемы неконструируемости является одним из ключевых вопросов математической теории ***ОС***-моделей и целого ряда важных ее приложений, особенно в плане использования *классических* структур в качестве как концептуальных, так и практических моделей *пространственно-распределенных* динамических систем, из которых наибольший интерес представляют реальные физические системы [3,5]. В общей постановке проблема разрешимости проблемы неконструируемости сводится к вопросу: ***Существует ли алгоритм для определения того, будет ли произвольная классическая ОС-модель обладать типами неконструируемости НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3?*** В такой общей постановке проблема остается пока открытой, но имеются ответы на некоторые более частные, но не менее важные вопросы, которые представят и значительный самостоятельный интерес [1,3,5,8,9,88,536]. Наиболее полное решение получено для случая классических ***1-ОС***, обсуждение с которого и начинается в настоящем разделе книги. Прежде всего, относительно произвольных блочной или конечной ***КФ*** имеет место следующий основной результат, имеющий целый ряд важных приложений в ***ТОС***-проблематике, а именно.

Теорема 34. Относительно произвольной блочной либо конечной КФ проблема определения ее типа (конструируемая, НКФ, НКФ-1, НКФ-2 или НКФ-3) для произвольной классической 1-ОС алгоритмически разрешима.

Доказательство теоремы ***34*** достаточно прозрачно и сводится к следующему. Разрешимость для случая блочной c_b-***КФ*** очевидна и в виду того, что для такой конфигурации непосредственные предшественники могут находиться только во множестве блочных ***КФ*** длиной $|c_b| + n - 1$. Для случая же конечной ***КФ*** $c = □c_b□$ ее тип также определяется конструктивно на основе подхода, реализованного при доказательстве теоремы ***32***. Для этих же целей можно использовать также и результат теоремы ***35*** [5]. Данные подходы позволяют не только конструктивно определять тип произвольных *блочной* либо *конечной* ***КФ***, но и устанавливать собственно структуру множества их непосредственных предшественников, что в целом ряде случаев весьма важно. Для общего же ***d***-мерного случая алгоритмически разрешимой является задача определения для произвольной блочной или конечной ***КФ*** ее типа (*конструируемая*, ***НКФ*** *либо* ***НКФ-3***), однако это не говорит о разрешимости проблемы в целом.

Одним из известных подходов к решению проблемы *разрешимости* существования в *классических* ***ОС***-моделях того или иного типа неконструируемости является установление оценки *сверху* для минимальных размеров внутреннего блока пары ***ВСКФ***, размеров ***γ-КФ*** или неконструируемой ***КФ*** искомого типа ***(НКФ, НКФ-1, НКФ-2*** и ***НКФ-3)***. В случае классических ***1-ОС*** мы поступали именно таким образом и в этом направлении был получен ряд результатов, представляющих и определенный самостоятельный интерес [1,3,5,8,9,37,53-57,73,88,90,536].

Теорема 35. Для любого целого $n \geq 2$ существуют ГФП $\tau^{(n)}$ классической ОС-модели, которая не обладает неконструируемостью НКФ, однако обладает НКФ-1 минимальной длины $L \geq n - 1$.

Подобный вопрос играет весьма важную роль для оценки минимального размера ***γ-КФ*** как при исследовании проблемы неконструируемости в общем случае, так и при изучении целого ряда других динамических свойств классических ***ОС***-моделей. В частности, для случая классических ***1-ОС*** ответ дает следующая достаточно полезная теорема [3,5,88].

Теорема 36. Для любого целого $n \geq 2$ существует ГФП $\tau^{(n)}$ классической бинарной 1-ОС, которая обладает следующими свойствами одновременно, а именно:

- ***ГФП $\tau^{(n)}$ структуры обладает γ-КФ минимальной длины $L = n$;***
- ***разность минимальных размеров γ-КФ и ВБ ВСКФ равна $n - 1$;***
- ***ГФП $\tau^{(n)}$ структуры не обладает неконструируемостью типа НКФ-1;***
- ***для любого целого $k \geq 1$ ГФП $\tau^{(n)k}$ обладает γ-КФ минимальной длины n;***
- ***существуют целые $m_1 = m_1(n)$ и $m_2 = m_2(n)$ такие, что блочные КФ вида $c = 0^{p_1 \geq m_1} 1 0^{p_2 \geq m_2}$ являются в структуре НКФ, где $m_1 < m_2$ – возрастающие функции от n-переменной;***
- ***КФ вида $c_p = □1^p□$ $(p \geq n-1)$ являются для ГФП пассивными, т.е. $c_p\tau^{(n)} = c_p$.***

Теорема ***36*** относительно легко обобщается на случаи высших размерностей путем *специального* погружения ***1-ОС***, удовлетворяющей условиям теоремы, в классическую ***d-ОС*** ***(d≥2)***. Из данной теоремы и ряда других результатов в данном направлении следует [3], что невозможно получать удовлетворительные количественные соотношения между *минимальными* размерами ***γ-КФ*** и ***ВБ ВСКФ*** в общем случае классических ***ОС***-моделей. Данная ситуация служит одной из основных причин затруднений в количественных исследованиях проблемы неконструируемости в общего типа классических ***ОС***-моделях. Более того, из теоремы ***36*** и того факта, что *минимальный* размер для ***γ-КФ*** не больше минимального размера ***НКФ***, легко вытекает, что существуют классические ***ОС***-модели с любым наперед заданным минимальным размером ***НКФ***.

В контексте исследования разрешимости проблемы неконструируемости нами и рядом других авторов [5,54-56,88,131] изучался вопрос взаимосвязи минимальных размеров ***НКФ*** и ***ВБ ВСКФ*** в классических ***ОС***-моделях. Между тем, несмотря на предпринятые усилия в этом направлении, удовлетворительного решения так и не было получено. Однако, целый ряд полученных в этом направлении результатов позволил сформироваться следующему утверждению: ***В общем случае классических d-ОС (d ≥ 2) невозможно получить какую либо достаточно удовлетворительную количественную оценку минимального размера для НКФ как функцию минимального размера у ВБ ВСКФ, и наоборот.*** Данное утверждение позволило прояснить целый ряд существовавших до него принципиальных вопросов [5,53-57,88].

На основе целого ряда результатов по проблеме *декомпозиции* ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях, рассматриваемых несколько ниже, в некоторых случаях возможно сводить решение проблемы о существовании неконструируемостей ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1*** к решению аналогичных проблем для существенно более простых ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ той же размерности. Иногда такой подход значительно упрощает решение этой проблемы, однако в общем случае его *прямое* применение результата не дает. Между тем, именно основываясь на этом подходе, первоначально был получен следующий достаточно интересный результат [5,55,88].

<u>Определение 11</u>. Алгоритм, устанавливающий наличие пар ВСКФ для классических ОС-моделей, назовем «существенно конструктивным», если он для произвольной глобальной функции $\tau^{(n)}$ не только дает ответ «да/нет» на вопрос о существовании ВСКФ, но и в случае положительного ответа определяет все типы существующих для ОС-модели пар ВСКФ.

Конструктивные алгоритмы представляют особый интерес прежде всего там, где исследователь сталкивается с необходимостью реальной реализации модели того либо иного характера. А так как *однородные структуры* представляют наибольший интерес именно в плане их возможностей в конструктивном отношении, то данное определение представляется нам вполне уместным.

В свете определения ***11*** и на основе результатов исследования проблемы декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в классических ***d-ОС (d ≥ 2)***, удалось пролить свет и на данный интересный вопрос [37].

<u>Теорема 37</u>. В общем случае структур d-ОС (d≥2) отсутствует существенно конструктивный алгоритм, решающий для них проблему существования пар ВСКФ.

Дальнейшее развитие методики доказательства данной теоремы позволило [90] доказать также и алгоритмическую неразрешимость проблемы существования для классических ***d-ОС (d ≥ 2)*** типа неконструируемости ***НКФ-3***, а именно был доказан следующий результат, имеющий целый ряд достаточно важных приложений в качестве аппарата исследований в ***ТОС***-проблематике.

<u>Теорема 38</u>. Проблема существования в произвольной классической структуре d-ОС (d≥2) типа неконструируемости НКФ-3 алгоритмически неразрешима. Алгоритмически неразрешима, при этом, также проблема существования для произвольной классической d-ОС (d ≥ 2) пар ВСКФ-1.

А так как согласно вышесказанному (теорема ***10***) для каждой ***ОС***-модели множество всех ***НКФ-3*** составляет строгое подмножество множества ***НКФ***, то уже достаточно несложная модификация позволяет доказать и алгоритмическую *неразрешимость* проблемы существования ***НКФ*** в любой классической ***d-ОС*** $(d \geq 2)$, что было ранее доказано и ***Ю. Карри*** [277] на основе другого подхода. Таким образом, в общем случае для классических ***d-ОС*** $(d \geq 2)$ алгоритмически неразрешимыми являются проблемы существования неконструируемостей как типов ***НКФ-3*** и ***НКФ***, так и ***γ-КФ***, и пар ***ВСКФ*** и ***ВСКФ-1***. Таким образом, неразрешимость общей проблемы неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-3*** для классических ***d-ОС*** $(d \geq 2)$ предполагает развитие ряда частных методов решения указанных проблем для ***ОС***-моделей определенных типов и классов. Это может иметь целый ряд довольно важных теоретических и прикладных выходов. Совершенно иная картина имеет место для случая ***1-ОС***, а также неконструируемостей типов ***НКФ-1***, ***НКФ-2***. Опыт работы с ***ОС***-моделями размерности $d=2$ показывает, что невзирая на алгоритмическую *неразрешимость* для класса таких структур, проблемы определения наличия для них неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-3*** в случае конкретных ***2-ОС*** всегда получали разрешение в виде конструктивных алгоритмов. Поэтому здесь имеет смысл говорить только об отсутствии единого для класса всех ***d-ОС*** $(d \geq 2)$ разрешающего алгоритма, тогда как в каждом конкретном случае данная проблема, по нашему мнению, как правило, имеет той или иной эффективности *конструктивное* решение, определяемое конкретной спецификой ***ЛФП*** структуры.

В частности, одним из подходов к решению такой проблемы является метод (*в целом ряде случаев инвариантный относительно свойства неконструируемости*) моделирования одной классической ***d-ОС*** $(d \geq 2)$ другой структурой того же класса и той же размерности, но с простейшим индексом соседства (раздел ***1.1***), например, для случая ***2-ОС*** данный индекс имеет вид $X = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$. Увеличение мощности ***А***-алфавита *моделирующей* структуры в целом ряде случаев существенно компенсируется значительным упрощением процедур анализа ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ на предмет наличия в моделируемой ***d-ОС*** феномена неконструируемости. Между тем, ввиду нижесказанного такой подход следует применять достаточно осмотрительно.

Согласно теоремам ***18*** и ***21*** проблема существования для классической ***d-ОС*** $(d = 1)$ пар ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, алгоритмически разрешима. Следующий результат доказывает разрешимость проблемы для обобщенного случая ***ВСКФ-1*** при размерности $d = 1$ и неразрешимость при $d \geq 1$.

<u>Теорема 39</u>. Проблема существования пар ВСКФ-1 для произвольной классической структуры d-ОС (d ≥ 1) алгоритмически разрешима при d = 1 и алгоритмически неразрешима при d ≥ 2.

Доказательство теоремы ***39*** сводится к следующему. Согласно определения ***10*** две *различные* ***КФ*** $c_1, c_2 \in C(A)$ образуют для ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ классической ***1-ОС*** пару ***ВСКФ-1*** тогда и только тогда, когда имеет место соотношение $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A,\phi)$. Предположим, что для *классической* структуры ***1-ОС*** существует такая пара $\{c_1, c_2\}$ ***ВСКФ-1***, тогда как конечная конфигурация $c \in C(A,\phi)$ имеет минимальную ***m***-длину среди всех конечных ***КФ***, имеющих из множества ***C(A)*** конфигураций более одного непосредственного предшественника, а именно:

$$
\Big(\frac{c_1}{c_2}\Big)\Big(\frac{=}{=}\Big)\ldots\Big(\frac{y_0}{z_0}\Big)\Big(\frac{y_1}{z_1}\Big)\Big(\frac{y_2}{z_2}\Big)\ldots\overbrace{\Big(\frac{y_j}{z_j}\Big)\ldots\Big(\frac{y_{j+n-1}}{z_{j+n-1}}\Big)}\ldots\overset{\Leftarrow\,\Leftarrow\,\Leftarrow}{\Big(\frac{y_{j+k}}{z_{j+k}}\Big)}\ldots\overbrace{\Big(\frac{y_j}{z_j}\Big)\ldots\Big(\frac{y_{j+n-1}}{z_{j+n-1}}\Big)}\Big(\frac{y_{j+k}}{z_{j+k}}\Big)\ldots
$$

$$
|\!\leftarrow \qquad B - block \qquad \rightarrow\!|
$$

$$
c \quad = \quad \ldots\ldots 0000\; x_1 \quad x_2 \ldots\ldots\ldots x_j \ldots\ldots\ldots x_{j+n-1} \ldots\ldots\ldots x_{j+k} \ldots\ldots x_{m-1}\, x_m\, 0000 \ldots\ldots\ldots\ldots
$$

$$
(y_p, z_p, x_u \in A;\; x_1, x_m \neq 0;\; p = -\infty \,..\, +\infty;\; u = 1 \,..\, m)
$$

Но тогда нетрудно убедиться, что при общем количестве $P_1 = 2^a$ всевозможных различных пар $\{y_p \mid z_p\}$, образованных состояниями соответствующих им автоматов в ***КФ*** $\{c_1 \mid c_2\}$, имеется ровно

$P_2=2^{an}$ различных кортежей $<\{y_j | z_j\}$ .... $\{y_{j+n-1} | z_{j+n-1}\}>$ из них длиной n. Таким образом, если длина *c-КФ* удовлетворяет соотношению $m \geq 2^{an}+n$, то для пары конфигураций $\{c_1 | c_2\}$ на блоке, соответствующем шаблону *c-КФ*, будет существовать по меньшей мере одна пара идентичных вышеуказанных кортежей, что противоречит предположению о *минимальной* длине *c-КФ* среди всех конечных *КФ*, имеющих более одного предшественника из множества *C(A)*. Действительно, модифицировав пару *КФ* $\{c_1 | c_2\}$ путем удаления общего для них *B*-блока (*процедура уплотнения конфигураций*), получаем пару конфигураций $\{c`_1 | c`_2\}$ таких, что $c`_1\tau^{(n)} = c`_2\tau^{(n)} = c`$ при $|c`| < m$. Таким образом, если в классической *1-ОС* существует множество пар $\{c_1 | c_2\}$ *ВСКФ-1*, то должно выполняться следующее условие, а именно: $min_k \{|c^k{}_1\tau^{(n)}| = |c^k{}_2\tau^{(n)}|\} \leq 2^{an}+n-1$. Следовательно, для определения наличия пар *ВСКФ-1* в классической *1-ОС* вполне достаточно протестировать на предмет количества различных предшественников для *КФ* $c \in C(A,\phi)$ длины $L \leq 2^{an}+n-1$. Уже при относительно небольших значениях *a* и *n* данный тест является чрезвычайно громоздким, хотя и дает конструктивное доказательство теоремы. Вместе с тем, данный тест допускает весьма несложные программные реализации, позволяя использовать для решения проблемы в каждом конкретном случае развитые компьютерные средства [5,54-56,88,90,536,567].

На основе теоремы **39** и подхода к ее доказательству возможно получить целый ряд интересных результатов по разрешимости тех или иных аспектов проблемы неконструируемости для *1-ОС*, часть из которых рассматривается несколько ниже. Из представленных здесь, а также и из работ [1,2,3,5,7-9,27,30,43,53-56,277] по *разрешимости* основных аспектов проблемы неконструируемости в классических *ОС*-моделях нетрудно убедиться, что их решение весьма существенно зависит от *размерности* структур. Если в случае *классических 1-ОС*, в основном, имеет место *алгоритмическая* разрешимость, то уже для **2**-мерного случая очень многие важные вопросы в этом направлении остаются алгоритмически неразрешимыми, не взирая на относительную простоту данного типа классических *ОС*-моделей [536,567].

Остроту алгоритмической *неразрешимости* проблемы неконструируемости типов *НКФ* и *НКФ-3* для общего случая *ОС*-моделей снижает и тот факт, что с ростом мощности *A*-алфавита и/либо размера шаблона соседства *доля* структур, обладающих *НКФ* и, возможно, *НКФ-3*, очень быстро стремиться к единице (теорема *11*), т.е. ***«почти все»*** достаточно сложные *ОС*-модели обладают *неконструируемостью* *НКФ*-типа. В данной связи было бы чрезвычайно интересным попытаться определить, пусть даже эмпирически, размер минимального блока *НКФ*, *НКФ-3* для *d*-мерного $(d \geq 2)$ случая *классических ОС*-моделей как функцию параметров *#A(a)* и *#X(n)*, например, лишь *a*-значения для случая *2-ОС* с простейшим индексом соседства $X=\{(0,0), (0,1), (1,0)\}$. В некоторой мере аналогичная картина имеет место для случая неконструируемостей типов *НКФ-1* и *НКФ-2* относительно проблемы *разрешимости* их существования в общем случае классических структур *d-ОС* $(d \geq 2)$ [5,8,9,53-56,88,90,536,567].

<u>Теорема 40</u>. Проблема незамкнутости множества КФ C(A,d,∞) (d≥2) относительно глобального отображения, определяемого паралельным $\tau^{(n)}$-преобразованием, алгоритмически неразрешима. Классическая структура d-ОС, не обладающая как НКФ (а, возможно, и НКФ-3), так и НКФ-1, обладает неконструируемостью типа НКФ-2 (d ≥1). Классическая d-ОС (d ≥ 1), не обладающая неконструируемостью типа НКФ-2, обладает типами неконструируемости НКФ или НКФ-1.

Рассмотрим вопрос влияние незамкнутости множества *КФ C(A,d,∞)* относительно отображения, определяемого глобальной функцией перехода $\tau^{(n)}$. Не нарушая общности, обратимся к случаю классических *1-ОС*. Предположим, что для структуры данного класса множество *C(A,1,∞)* будет *незамкнутым* относительно отображения, определяемого *ГФП* $\tau^{(n)}$. Предположим также, что для данной структуры отсутствует неконструируемость типа *НКФ-1*. Поэтому, с учетом сделанных предположений для каждой ***КФ*** $c_0 \in C(A,1,\phi)$ в такой структуре относительно предшественников c^{-1} целесообразно рассматривать только следующие два случая, а именно:

(1) не имеет предшественников c^{-1} из множества $C(A,1,\phi) \cup C(A,1,\infty)$; в этом случае согласно ранее сказанному структура должна обладать неконструируемостью ***НКФ***-типа;

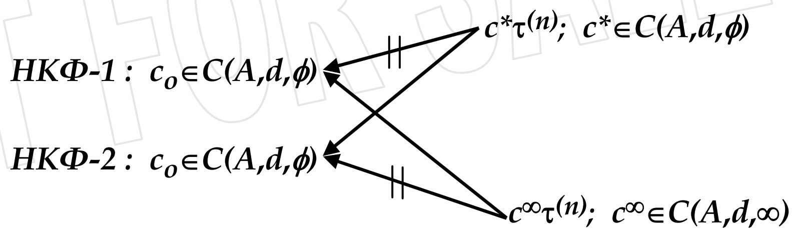
(2) имеет предшественников как из множества $C(A,d,\phi)$ (*единственного, в противном случае данная структура должна будет обладать* ***НКФ***), так и из множества $C(A,1,\infty)$ бесконечных ***КФ***.

Случай существования для структуры ***КФ*** $c_0 \in C(A,1,\phi)$, имеющей предшественников c^{-1} лишь из множества $C(A,1,\infty)$, исключается ввиду предположения об отсутствии *неконструируемости* типа ***НКФ-1***. Исключается из рассмотрения и случай наличия для каждой конфигурации $c_0 \in C(A,1,\phi)$ предшественника c^{-1} только из множества $C(A,1,\phi)$, как не соответствующий предположению о незамкнутости множества $C(A,1,\infty)$. Рассмотрим оставшийся случай **(2)**. Предположим, что для данной структуры будет отсутствовать и неконструируемость ***НКФ***-типа. Но тогда для каждой конфигурации $c_0 \in C(A,1,\phi)$ должны быть один предшественник c^{-1} из множества $C(A,1,\phi)$ и один предшественник c^{∞} из множества $C(A,1,\infty)$. С другой стороны, учитывая наличие конфигурации $c^{\infty} \in C(A,1,\infty)$ такой, что $c^{\infty}\tau^{(n)} = □$, определяем на ее основе конечную ***КФ*** c_0 вида $c_0=□x_1x_2 \ldots x_q□$, где кортеж $<x_1x_2 \ldots x_q>$ $(x_1, x_q \in A\backslash\{0\})$ – часть ***КФ*** c^{∞} достаточно большой длины. Тогда получаем конфигурацию $c_0\tau^{(n)} = □c_1 00 \ldots 00c_2□$, где по меньшей мере одна из ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой. В противном случае в структуре существовали бы пары ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. Пусть лишь одна из $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой (*для определенности* c_1). Но тогда она будет иметь более одного предшественника c^{-1} вида $c=□x_1x_2 \ldots x_q□$, что также будет обусловливать для данной структуры наличие неконструируемости ***НКФ***-типа. Пусть обе $\{c_1,c_2\}$ будут конечными, отличными от *нулевых* и обе имеют по одному предшественнику $\{c^{-1}{}_1, c^{-1}{}_2\}$ из множества $C(A,1,\phi)$. Рассмотрим ***КФ*** $c^*=□\, c^{-1}{}_1 00 \ldots 0c^{-1}{}_2□$, для которой по определению получаем $c^*\tau^{(n)} = □c_1 00 \ldots 00c_2□$. Но тогда для соответствующим образом определенной ***КФ*** $c^{\#}=□x_1x_2 \ldots x_q□$ получаем, что $c^*\tau^{(n)}=c^{\#}\tau^{(n)}=□c_1 0 \ldots 0c_2□$ $(c^* \neq c^{\#})$, что вновь обусловливает для структуры наличие неконструируемости ***НКФ***-типа. Итак, в случае *незамкнутости* множества $C(A,1,\infty)$ относительно отображения, определяемого *глобальной* функцией перехода $\tau^{(n)}$, при отсутствии для структуры неконструируемости типа ***НКФ-1*** она будет обладать неконструируемостью ***НКФ***-типа.

Предположим теперь, что *классическая* модель ***1-ОС***, для которой множество $C(A,1,\infty)$ незамкнуто относительно отображения $\tau^{(n)}$, не обладает неконструируемостью ***НКФ***-типа. Но в этом случае соответствующим образом модифицируя вышеприведенные рассуждения несложно придти к заключению, что данная структура должна обладать неконструируемостью типа ***НКФ-1***. Таким образом, приведенные выше соображения позволяют сформулировать следующий достаточно интересный с теоретической точки зрения результат, а именно.

<u>Теорема 41</u>. Если для классической d-ОС ($d \geq 1$) множество $C(A,d,\infty)$ незамкнуто относительно отображения, индуцируемого глобальной функцией $\tau^{(n)}$, и отсутствует неконструируемость типа НКФ-1 (НКФ), структура будет обладать неконструируемостью типа НКФ (НКФ-1).

Нами показано [88]: ***Проблема замкнутости множества бесконечных конфигураций $C(A,d,\infty)$ относительно отображения, индуцируемого глобальной функцией перехода $\tau^{(n)}$ классической структуры d-ОС ($d \geq 1$), алгоритмически разрешима для $d = 1$ и алгоритмически неразрешима для $d \geq 2$.*** Доказательство базируется на неразрешимости известной игры «*домино*», чей краткий набросок приводится в разделе *2.8* главы. Более того, показано, что: ***Если для классической d-OC множество C(A,d,∞) незамкнуто относительно глобального отображения, определяемого ГФП $\tau^{(n)}$, то структура обладает неконструируемостью типов НКФ, НКФ-1 либо обоими типами одновременно (d ≥ 1)*** [54-56]. Следовательно, для решения проблемы разрешимости наличия для классической ***d-OC*** неконструируемости типов ***НКФ/НКФ-1*** вопрос незамкнутости множества ***C(A,d,∞)*** относительно глобального отображения $\tau^{(n)}$ играет довольно существенную роль. Для лучшей иллюстрации определений неконструируемых конечных конфигураций типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** обратимся к их графическим интерпретациям, а именно:



Исходя из довольно прозрачных определений неконструируемости типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2***, уже достаточно несложно заключить, что при отсутствии неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-1*** для *классической* ***d-OC (d ≥ 1)*** для нее должна существовать неконструируемость типа ***НКФ-2***. Не нарушая общности, рассмотрим случай *классической* структуры ***1-OC***, не обладающей как типом ***НКФ***, так и типом ***НКФ-1*** неконструируемости. Предположим, что для данной структуры будет отсутствовать и *неконструируемость* типа ***НКФ-2***. Но тогда для любой конфигурации $c\in C(A,1,\phi)$ должны быть один предшественник c^{-1} из множества $C(A,1,\phi)$, а также один предшественник c^∞ из множества $C(A,1,\infty)$. Действительно, наличие для ***КФ c*** предшественника только из множества одного типа ведет к наличию для структуры соответственно неконструируемости типов ***НКФ-2*** или ***НКФ-1***, что противоречит предположению. С другой стороны, учитывая также наличие ***КФ*** $c^\infty\in C(A,1,\infty)$ такой, что $c^\infty\tau^{(n)}=$□, определяем на ее основе конечную ***КФ*** c_o вида $c_o =$ □$x_1x_2 \ldots x_q$□, где кортеж $<x_1x_2 \ldots x_q>$ $(x_1, x_q\in A\backslash\{0\})$ – часть ***КФ*** c^∞ достаточно большой длины. Тогда получаем конфигурацию $c_o\tau^{(n)} =$ □$c_1 00 \ldots 00 c_2$□, где по меньшей мере одна из ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой. В противном случае в структуре существовали бы пары ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что противоречит условию. Пусть лишь одна из ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой (*для определенности* c_1). Но тогда она будет иметь бесконечно много предшественников вида $c =$ □$x_1x_2x_3 \ldots x_q$□, что также противоречит отсутствию для структуры ***НКФ***. Следовательно, ввиду отсутствия ***НКФ*** она должна иметь предшественников *лишь* из множества $C(A,1,\infty)$, а не из $C(A,1,\phi)$, т.е. быть ***НКФ-1***, но это также противоречит условию. Пусть теперь обе ***КФ*** $\{c_1,c_2\}$ будут конечными, отличными от нулевых и обе имеют точно *по одному* предшественнику $\{c^{-1}_1, c^{-1}_2\}$ из множества $C(A,1,\phi)$. Рассмотрим ***КФ*** $c^*=$□$c^{-1}_1 00 \ldots 00 c^{-1}_2$□, для которой по определению получаем $c^*\tau^{(n)} =$ □$c_1 00 \ldots 00 c_2$□. Но тогда для соответствующим образом определенной ***КФ*** $c^\#=$□$x_1x_2 \ldots x_q$□ получаем, что $c^*\tau^{(n)} = c^\#\tau^{(n)} =$ □$c_1 0 \ldots 0 c_2$□ $(c^* \neq c^\#)$, что вновь противоречит отсутствию ***НКФ*** для данной структуры. Теперь довольно несложно аналогичным приемом завершить доказательство остальной части теоремы ***41*** [88,90].

Этот результат еще раз подтверждает *принципиальные* различия между рассмотренными типами неконструируемости в классических ***OC***-моделях и сильное влияние размерности ***OC***-моделей на связанные с ними результаты. Между тем, он является одним из немногих результатов такого типа для общего случая классических ***OC***-моделей ***(d ≥ 1)***. В наиболее общей постановке в плане исследования аналогий между *формальными* моделями на основе классических ***d-OC*** и *реальными* погружаемыми в них физическими процессами и явлениями было бы чрезвычайно интересным прояснить более детально не только проблему *неконструируемости*, непосредственно связанную с *обратимостью* динамики ***ОС***-моделей, но и влияние размерности структуры на ее глобальные свойства. В работах [5,8,9,53-56,88,90,536] влияние основных параметров *классических* ***ОС***-моделей на исследование их динамических свойств рассматривается с достаточной степенью полноты.

Следующая теорема устанавливает полную разрешимость проблемы существования всех типов неконструируемости для случая классических ***1***-мерных ***ОС***-моделей [5,8,9,88,90].

<u>Теорема 42</u>. Проблема существования для классической 1-ОС неконструируемости типов НКФ, НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3 алгоритмически разрешима. Проблема существования для классической 1-ОС сочетаний типов неконструируемости согласно таблицы 3 алгоритмически разрешима; тогда как для случая d-ОС (d ≥ 2) полное решение данного вопроса остается открытым.

Доказательство данной теоремы в общих чертах сводится к следующему. Прежде всего, согласно теоремы ***21*** существует конструктивный *критерий* существования в *классической* ***1-ОС*** пар ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. При этом, в случае наличия для структуры неконструируемости ***НКФ***-типа для нее могут существовать также ***НКФ-3*** наряду с другими типами неконструируемости. С другой стороны, наличие в структуре ***НКФ-3*** влечет за собой и существование для нее ***НКФ***. Нетрудно убедиться, что проблема замкнутости множества конфигураций $C(A,\infty)$ относительно ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ произвольной классической ***1-ОС*** алгоритмически разрешима. Действительно, существование для ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ классической структуры ***1-ОС КФ*** $c \in C(A,\infty)$ такой, что $c\tau^{(n)}=c` \in C(A,\phi)$ *эквивалентно* существованию для ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***КФ*** $c^* \in C(A,\infty)$ такой, что $c^*\tau^{(n)}=\square$. А ввиду конечности ***А***-алфавита состояний любая бесконечная ***КФ*** должна содержать блоки минимальной длины $p \le a^n+n-1$ (*что было отмечено выше*), включающие *не более одного* вхождения кортежа $<x_1x_2...x_{n-1}>$ ($x_j \in A$; $j=1..n-1$). Анализ подобных блоков в сочетании с ***ЛФП*** структуры позволяет конструктивно относительно несложно выявлять замкнутость (*незамкнутость*) $C(A,\infty)$-множества. Исходя из определений ***2-4*** несложно убедиться, что тип неконструируемости произвольных блочной либо конечной ***КФ с*** зависит от наличия и/либо вида ее предшественников. Рассмотрим произвольную ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ на предмет типа существующих для нее в классической ***1-ОС c`***-предшественников. Для этого предположим, что ***с-КФ*** имеет *минимальную* длину среди всех конечных ***КФ*** структуры, которые обладают определенным типом неконструируемости. Если длина ***с-КФ*** удовлетворяет условию $|c| \ge a^n+n$, то в ней вполне возможно выделить по крайней мере одну пару идентичных *блочных* подконфигураций (*возможно пересекающихся*) вида $c_b=y_1y_2\ ...\ y_{n-1}$ ($y_k \in A$; $k=1..n-1$). Но так как тип ***с-КФ*** определяется путем установления для нее типа ***c`***-предшественника в области ее левого и правого концов, используя модифицированный подход, примененный нами при доказательстве теоремы ***32***, минимальный размер исследуемых ***КФ*** (*как блочных*, *так и конечных*) вполне можно определять величиной $L = a^n + n$. Следовательно, для определения типов неконструируемости в произвольной классической ***1-ОС*** достаточно для всех блочных и конечных ***КФ*** длины $L \le a^n + n$ в ***А***-алфавите установить все *допустимые* для них виды ***c`***-предшественников на основе ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ структуры, что с учетом сказанного не должно вызывать особых затруднений, исключая только громоздкость вычислений уже при относительно небольших значениях ***a*** и ***n***. Для данных целей довольно несложно создание специальной тестирующей компьютерной программы, например, в среде пакетов ***Mathematica***, ***Maple*** или популярных систем программирования [5,11,93-104,563]. С учетом сказанного, относительно несложно доказывается и вторая часть настоящей теоремы.

Из представленных результатов по *разрешимости* проблемы неконструируемости в *классических* ***ОС***-моделях нетрудно убедиться, что ее решение существенно зависит от размерности моделей. Если в ***1***-мерном случае все основные аспекты неконструируемости алгоритмически разрешимы с наличием конструктивных разрешающих алгоритмов, то уже в ***2***-мерном случае ряд вопросов существования основных аспектов неконструируемости алгоритмически *неразрешимы.* Поэтому проблема влияния значений основных параметров ***ОС***-моделей (*размерность, индекс соседства **X**, **A**-алфавит и др.*) на исследование их динамических свойств представляет несомненный интерес. Ряд проблем разрешимости более тонких свойств динамики классических ***ОС***-моделей на базе теории креативных и продуктивных множеств конечных ***КФ*** рассматривается в [5,88,90,536].

Представленные в разделе результаты решают в целом проблему разрешимости существования для классических ***ОС***-моделей неконструируемых ***КФ*** различных типов, тогда как с отдельными вопросами данной проблематики можно более основательно ознакомиться в целом ряде работ, содержащих дополнительные первоисточники [1,3,5,8,20,22,30,37,53-57,70,72,88,90,135,158,160,166, 184-187,190,232,269,277,307,310,314,322,536]. В последние десятилетия особое внимание уделяется вопросам, связанным с обратимостью ***ОС***-моделей в качестве некоей основы представления [273] пространственно-распределенных динамических систем, которая, в свою очередь, тесно увязана с проблемой неконструируемости ***НКФ***-типа. Несколько более детально вопросы обратимости динамики классических ***ОС***-моделей обсуждаются ниже в главе ***6*** настоящей монографии.

2.5. Суръективность и инъективность глобальных параллельных отображений в ОС-моделях

Свойства параллельных отображений, определяемых глобальными функциями перехода $\tau^{(n)}$ у ***ОС***-моделей такие, как ***суръективность*** и ***инъективность***, имеют самое прямое отношение к проблеме неконструируемости и играют фундаментальную роль при изучении динамических свойств ***ОС***-моделей. Целый ряд исследователей работали в этом направлении и был получен ряд весьма интересных результатов [1,3,5,19,20,25,28-30,53,54-56,68,131,268-277,279,311,317,396]. В частности, в рамках данных исследований ***Г.А. Хэдлунд*** [127] изучил данную тему для ***1***-мерного случая динамических систем сдвига как в комбинаторных, так и в топологических аспектах. Для ***1***-размерного случая [127] представляет важные комбинаторные свойства объектов, являющиеся специфическими для такого случая, наряду с глубокими топологическими свойствами. ***М. Насу*** [311] исследовал дальнейшие комбинаторные аспекты локальных отображений, определяемых суръективными глобальными отображениями и локальными отображениями, определяемыми инъективными глобальными отображениями в ***1-ОС.*** Для этого использовался как графический, так и конечно-автоматный подход для исследования вопросов данной проблематики.

А. Маруока и ***М. Кимура*** определили четыре новых свойства параллельных отображений в ***ОС***-моделях, а именно: ***сильную R-суръективность, слабую R-суръективность***, а также ***сильную R-инъективность*** и ***слабую R-инъективность*** [522]. Из них первые два понятия не эквивалентны известным раньше понятиям, заполняя промежуток между биективностью и суръективность. С другой стороны, доказано, что другие два понятия эквивалентны суръективности. При этом, эти понятия характеризуются усиленными *сбалансированными* условиями, введенными в работе [271] и эквивалентными нашему понятию ***γ-КФ*** [5,37].

С этой целью ***А. Маруока*** и ***М. Кимура*** ввели отношение *эквивалентности* ***R*** на множестве ***C(A)***, а именно: c_1Rc_2 имеет место тогда и только тогда, когда для всех (*кроме конечного числа*) *единичных* автоматов ***ОС***-модели, конфигурации c_1 и c_2 совпадают. Пусть $R[c^*]$ обозначает множество всех конфигураций, эквивалентных конфигурации c^*, и пусть имеет место $C(A)/R = \{R[c^*] \mid c^* \in C(A)\}$. Тогда из *глобального* параллельного отображения τ: $C(A) \rightarrow C(A)$ мы можем получить множество отображений таких, что τ: $R[c_1] \rightarrow R[c_2]$ и τ: $C(A)/R \rightarrow C(A)/R$, где $c_1\tau=c_2$. Используя отображения типа $R[c_1] \rightarrow R[c_2]$, определим понятия «*строгой **R**-суръективности*», «*строгой **R**-инъективности*» и «*слабой **R**-инъективности*». Определение ***Маруока-Кимура*** гласит следующее, а именно:

Глобальное параллельное отображение $\tau^{(n)}$ слабо R-сюръективно (слабо R-инъективно) тогда и только тогда, если существуют КФ c^* и c такие, что $c^*\tau^{(n)}=c$ и $\tau^{(n)}$: $R[c^*] \to R[c]$ – сюръективно (инъективно). Глобальное параллельное отображение $\tau^{(n)}$ строго R-сюръективно (либо строго R-инъективно) тогда и только тогда, когда $\tau^{(n)}$: $R[c^*] \to R[c]$ – сюръективно (инъективно) для любых двух конфигураций c^* и c таких, что имеет место соотношение $c^*\tau^{(n)} = c$.

С точки зрения известных результатов по проблеме неконструируемости результаты ***М. Кимура*** и ***А. Маруока***, позволяют определить диаграмму, отражающую *взаимосвязь* между упомянутыми свойствами глобальных параллельных отображений $\tau^{(n)}$ в классических ***ОС***-моделях, в которой $G_1 \to G_2$ означает, что G_1 влечет за собой G_2 в структуре ***1-ОС***. При этом, отметим, что стрелки «***к***» либо «***из***» «***С(А,ϕ)***-*сюръективность*» справедливы только лишь для глобальных параллельных $\tau^{(n)}$-отображений, обладающих состоянием «*покоя*», т.е. для классических структур. Следующая диаграмма довольно наглядно отражает взаимосвязь между вышеуказанными двумя понятиями сюръективности и инъективности, а именно:

Основные результаты ***Маруока-Кимура*** в данном направлении могут быть легко обобщены на классические ***ОС***-модели как с произвольной размерностью, так и с индексами соседства более общих типов [41]. С рядом других интересных результатов по сюръективности и инъективности *глобальных* параллельных отображений в ***ОС***-моделях можно ознакомиться в работах, указанных в расширенной библиографии по ***ОС***-проблематике [536].

2.6. Некоторые специальные вопросы проблемы неконструируемости в классических ОС-моделях

Наряду с рассмотренными, существует целый ряд других намного более специальных вопросов глобальной динамики классических ***ОС***-моделей, связанных с проблемой неконструируемости. Так, например, интересным представляется вопрос о влиянии типов ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ на существование неконструируемых ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях. Исследования классических структур ***1-ОС***, определяемых симметрическими ***ЛФП***, показали [1,3,37], что ***ГФП***, определяемые такими ***ЛФП***, обладают ***c∈C(A,ϕ)*** типа ***НКФ (НКФ-1)*** тогда и только тогда, когда они обладают в качестве ***НКФ (НКФ-1)*** также и симметричными ей ***c^R-КФ***. Следовательно, симметричность ***ГФП*** в *классической* ***1-ОС***, вообще говоря, расширяет как множества ***НКФ***, так и ***НКФ-1*** неконструируемости, тогда как для асимметричных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ обе конфигурации ***c∈C(A, ϕ)*** и ***c^R*** могут быть ***НКФ*** или ***НКФ-1*** независимо каждая по отдельности. Более того, при более общей постановке «***симметричность***» ***ЛФП*** в классических ***ОС***-моделях может рассматриваться и относительно отдельных подклассов. Ряд других интересных вопросов динамики классических ***ОС***-моделей, связанных с проблемой неконструируемости, будут рассмотрены нами несколько ниже. Вопросы влияния на динамику *классических* ***ОС***–моделей определенных выше ***четырех*** типов неконструируемости инициируют из-за своей актуальности постоянный интерес к данному направлению исследований. В рамках данного направления в ***ТТГ*** проводится целый ряд различных исследований как теоретического, так и экспериментального характера с использованием компьютерного симулирования.

1. Исследование глубоких свойств параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$, индуцируемых ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ классических ***ОС***-моделей, имеет самое непосредственное отношение к проблеме неконструируемости и играет фундаментальную роль в исследованиях динамических свойств ***ОС***-моделей. Свойства подобных параллельных отображений такие, как инъективность и сюръективность имеют самую прямую связь с проблемой неконструируемости в структурах и изучались целым рядом исследователей, тогда как обзор их результатов можно найти в наших монографиях [1,3,5], а также в работах [9,90,183-187,270,272,310,311]. Работая в этом направлении, ***М. Кимура*** и ***А. Маруока*** дополнительно определили четыре новых свойства параллельных $\tau^{(n)}$-отображений, а именно: *сильная (слабая)* ***R-сюръективность*** и *сильная (слабая)* ***R-инъективность*** [270]. Из этих понятий первые два не эквивалентны предыдущим хорошо известным свойствам и являются промежуточными между биективностью и сюръективностью. Тогда как два других эквивалентны понятию сюръективности [270,272,311]. Более того, эти понятия характеризуются усилением *сбалансированных* условий ***Маруока-Кимура***, эквивалентных нашему понятию ***γ-КФ***. Детальный обзор исследований других авторов в данном направлении можно найти в работах [1,3-5], а также в приведенных в них оригинальных источниках и в библиографии [536].

Согласно теоремы ***29*** для существования неконструируемости типа ***НКФ-1*** в классической ***d-ОС*** $(d \geq 1)$, не обладающей ***НКФ***, необходимо и достаточно, чтобы множество всех бесконечных ***КФ*** $C(A,d,\infty)$ было незамкнутым относительно параллельного отображения $\tau^{(n)} : C(A,d,\infty) \to C(A,d)$. Тогда как существование ***НКФ*** и ***НКФ-3*** в классической ***ОС***-модели непосредственно связано с неоднозначностью отображения $\tau^{(n)}: C(A,d,\phi) \to C(A,d,\phi)$. В общем случае неконструируемости интересно исследовать взаимосвязь между наличием в классической ***ОС***-модели ***НКФ, НКФ-3*** и/либо ***НКФ-1*** и свойствами глобального отображения $\tau^{(n)} : C(A,d) \to C(A,d)$. С данной целью определим влияние на взаимную однозначность $\tau^{(n)}$-отображения наличия в классической ***ОС***-модели ***НКФ, НКФ-3*** и/либо ***НКФ-1***, и наоборот. Для случая классических структур ***1-ОС*** имеет место следующий результат, а именно.

<u>Теорема 43</u>. Если множество всех бесконечных конфигураций $C(A,1,\infty)$ структуры незамкнуто относительно одномерного параллельного $\tau^{(n)}$-преобразования, тогда соответствующее ему отображение $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ не будет взаимно однозначным; $C(A) = C(A,1,\infty) \cup C(A,1,\phi)$.

На основе теорем ***29*** и ***43*** можно показать, что при наличии в классической ***1-ОС НКФ*** и ***НКФ-3***, и/либо ***НКФ-1*** глобальное параллельное отображение $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ не взаимно однозначно, тогда как *обратное* утверждение в общем случае неверно. Следовательно, факт неоднозначности отображения $\tau^{(n)}: C(A) \to C(A)$ не влечет за собой наличия в структуре ***1-ОС*** неконструируемости типа ***НКФ, НКФ-3*** и ***НКФ-1***. Более того, если неоднозначность отображения $\tau^{(n)}: C(A,\phi) \to C(A,\phi)$ приводит к появлению неконструируемостей ***НКФ***-типа и, возможно, ***НКФ-3***, неоднозначность отображения $\tau^{(n)} : C(A,\infty) \to C(A,\infty)$ непосредственно не связана с неконструируемостью в ***1-ОС***. Базируясь на теореме ***43*** и ряде других результатов [54], можно подойти к решению и проблемы алгоритмической разрешимости о наличия для произвольной классической ***1-ОС*** однозначных глобальных отображений $\tau^{(n)}: C(A) \to C(A)$. В этом направлении нами получен ряд интересных результатов [1,3-5,7,15,47,54-56,68,75], выражаемых следующей основной теоремой, имеющей ряд достаточно интересных приложений [536].

<u>Теорема 44</u>. Проблемы установления взаимной однозначности параллельных отображений для случая классических 1-ОС, а именно $\tau^{(n)}: C(A,\phi) \to C(A,\phi)$, $\tau^{(n)}: C(A,\infty) \to C(A,\infty)$ и $\tau^{(n)}: C(A) \to C(A)$ разрешимы. Алгоритмически разрешимой для классических структур 1-ОС является также и проблема существования для параллельного глобального отображения типа $\tau^{(n)} : C(A) \to C(A)$ обратного ему параллельного τ_n^{-1}-отображения.

При этом, вторая часть теоремы представляет неконструктивное доказательство разрешимости проблемы существования для ***ГФП*** классической ***1-ОС*** обратной ей ***ГФП*** τ_n^{-1}. В этой связи было бы весьма интересным попытаться получить также конструктивное решение данной проблемы, позволяющее на основе конкретного вида ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ структуры получать *обратную* ей локальную функцию при условии ее существования. С другой стороны, проблему разрешимости взаимной однозначности глобального отображения $\tau^{(n)}: C(A,d) \rightarrow C(A,d)$ $(d \geq 2)$ для наиболее общего случая классических ***ОС***-моделей решает следующая основная теорема [5,54-56,88,90].

<u>Теорема 45</u>. Проблемы определения взаимной однозначности данных параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)}: C(A,d,\phi) \rightarrow C(A,d,\phi)$ ***и*** $\tau^{(n)}: C(A,d) \rightarrow C(A,d)$ ***для случая классических d-ОС*** $(d \geq 2)$ ***алгоритмически неразрешимы.***

Доказательство данного утверждения непосредственно вытекает из самого результата теоремы ***38***, определяющего алгоритмическую *неразрешимость* проблемы существования в произвольной классической ***d-ОС*** $(d \geq 2)$ неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-3***; иными словами взаимной однозначности отображения $\tau^{(n)}: C(A,d,\phi) \rightarrow C(A,d,\phi)$. А этот результат, в свою очередь, вызывает алгоритмичесую *неразрешимость* определения взаимной однозначности *глобального* отображения $\tau^{(n)}: C(A,d) \rightarrow C(A,d)$. Действительно, так как имеет место строгое включение $C(A,d,\phi) \subset C(A,d)$, то *неразрешимость* проблемы относительно части влечет за собой и *неразрешимость* ее относительно общего.

2. Из результата теоремы **45** следует: ***алгоритмически неразрешимой для классических d-ОС*** $(d \geq 2)$ ***есть проблема определения существования для параллельного отображения*** $\tau^{(n)}: C(A,d) \rightarrow C(A,d)$ ***обратного ему параллельного*** τ_n^{-1}***-отображения также.*** Используя теперь результаты по ***НКФ***-неконструируемости и свойство компактности топологического произведения, ***Дж. Ричардсон*** [305] доказал, что глобальное отображение $\tau^{(n)}: C(A,d) \rightarrow C(A,d)$ является взаимно однозначным только тогда, когда обратное ему отображение $\tau^{-1}: C(A,d) \rightarrow C(A,d)$ определяется некоторой ***ГФП ОС***-модели. В этом отношении данный результат играет довольно важную роль в теоретических исследованиях динамических свойств ***ОС***-моделей; на основании его и теоремы ***45***, в частности, легко вытекает и вышеприведенное утверждение.

В контексте результата решения данной проблемы следует отметить важный результат ***Т. Уаку*** [224,317], состоящий в том, что задача определения предшественников c^{-1} для произвольной ***КФ*** $c \in C(A,d)$ при $d \geq 2$ алгоритмически неразрешима. Данный результат является довольно веским аргументом в пользу того, что проблема определения взаимной однозначности глобального отображения $\tau^{(n)}: C(A,d) \rightarrow C(A,d)$ для общего случая классических ***d***-мерных $(d \geq 2)$ ***ОС***-моделей должна быть алгоритмически неразрешимой. В одномерном же случае проблема определения *непосредственных* предшественников c^{-1} для произвольных ***ГФП*** и конечной ***КФ*** в классической ***ОС***-модели алгоритмически разрешима и конструктивное доказательство этого базируется на следующем важном результате, представляющем и самостоятельный интерес. Данный вопрос имеет вполне определенное значение для построения *обратимых* вычислительных и физических ***ОС***-моделей различного назначения [536].

<u>Теорема 46</u>. Проблема определения для произвольной конфигурации $c \in C(A,\phi)$ ***в структуре 1-ОС*** c^{-1}***-предшественников и их типов алгоритмически разрешима, тогда как в случае размерности*** $d \geq 2$ ***классической структуры данная проблема алгоритмически неразрешима.***

Доказательство первой части теоремы ***46*** с учетом ранее рассмотренного достаточно прозрачно и сводится к следующему. Рассмотрим произвольную конечную конфигурацию $c \in C(A,1,\phi)$, чья длина m, и попытаемся определить для нее типы существующих $c`$-предшественников либо сам факт их отсутствия в условиях данной ***ОС***-модели, а именно:

$$c'' = \ldots \underbrace{\overbrace{B_l \ldots\ldots\ldots B_l} \ldots\ldots y_{-1}y_o}_{L} | y_1y_2y_3 \ldots y_m | \underbrace{y_{m+1} \ldots \overbrace{B_r \ldots\ldots B_r}}_{R} \ldots$$

$$c \;\; = \qquad \ldots\Box | x_1x_2x_3 \ldots\ldots x_m | \Box\ldots$$

$$y_k, x_j \in A;\;\; x_1, x_m \neq 0 \;\; (k = -\infty, +\infty;\; j = 1 \,..\, m)$$

С этой целью на основе системы параллельных подстановок $z_1z_2z_3 \ldots z_n \Rightarrow z^*_1$ $(z^*_1, z_k \in A;\ k=1..n)$, определяющих ***ЛФП*** классической ***1-ОС***, формируем для ***c-КФ*** множество допустимых для нее блочных ***c″-КФ*** с постоянно наращиваемыми в процессе построения $\{L, R\}$-концами. При этом, допустимой ***p***-уровня полагается такая блочная ***c″-КФ*** длины $h=m+2p+2(n-1)$, для которой имеет место соотношение $c''\tau^{(n)}=0^pc0^p$ $(p \geq 1)$. С учетом ранее сказанного нетрудно убедиться, что при ***p***-длине отрезков $\{L, R\}$, удовлетворяющей соотношению $p \geq a^n + n - 1$, они должны включать по крайней мере пару идентичных кортежей соответственно $B_l=\langle y`_1y`_2 \ldots y`_n\rangle$ и $B_r=\langle y''_1y''_2 \ldots y''_n\rangle$ $(y`_k, y''_k \in A;\ k=1..n)$, допускающих в общем случае пересечения. Но тогда на основе двух отрезков $\langle B_l, B_l\rangle$ и $\langle B_r, B_r\rangle$ можно составить ***КФ*** $c` \in C(A)$ такую, что имеет место соотношение $c`\tau^{(n)} = c$; при этом, легко усматриваются тип таких ***c`***-предшественников или сам факт их отсутствия для исходной ***c-КФ***. Итак, для определения всех допустимых предшественников произвольной ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ достаточно описанным способом проанализировать допустимые для нее *блочные* ***c″-КФ*** длиной, не большей $|c|+2(a^n+n)$. Сказанное и завершает набросок доказательства первой части теоремы. С доказательством второй части можно ознакомиться в работах [55,90,224]. Однако уже для случая классических ***1-ОС*** неразрешимой оказывается проблема определения «*родственных*» отношений для двух произвольных конфигураций $\{c,c^*\}$, сводящаяся к вопросу: ***имеет ли место соотношение*** $(\forall c, c^* \in C(A,\phi))(c^* \in \langle c\rangle[\tau^{(n)}])$ ***для произвольной классической структуры 1-ОС?***

Хорошо известно [5,536], что проблемы разрешимости исследуются как конструктивными, так и неконструктивными методами. А с точки зрения прикладных аспектов ***ОС***-теории наибольший интерес представляют именно конструктивные методы. Поэтому, при получении большинства результатов по разрешимости проблемы неконструируемости в классических ***1-ОС*** нами были использованы именно такие методы. Вместе с тем, в целом ряде случаев степень *неразрешимости* для *индекс*-множеств некоторых подклассов ***ОС***-моделей оказывается намного больше единицы. Доказательство этого результата базируется на использовании перечислимостей, эквивалентных нумерациям ***Геделя***. И наши исследования по критериям и разрешимости целого ряда аспектов проблемы неконструируемости в общем случае классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ подтверждают весьма высокий уровень сложности данной проблематики. Целый ряд отдельных и более специальных результатов в данном направлении можно найти в работах [3,5,7,15,47,54-56,68,75,88,90,306,536].

3. Упоминаемое выше понятие обратимости в классических ***ОС***-моделях играет весьма важную роль как в теоретических, так и в прикладных их аспектах, особенно в случае использования ***ОС*** в качестве моделей пространственно-распределенных динамических систем, из которых именно физические системы представляют *особый* интерес. Мы можем представлять себе ***ОС***-модель как бесконечный автомат для преобразования некоторых входных слов [*конфигураций из множества* $C(A,d,\phi)$] в выходные слова из того же бесконечного множества. При этом, выход такого автомата становится очередным его входным словом. Таким образом, классические ***ОС***-модели мы можем рассматривать как бесконечные автономные автоматы, для описания и исследования динамики которых можно вполне успешно использовать язык диаграмм состояний или графический язык переходов. Наряду с этим, подход на основе графов *(диаграммы)* состояний является достаточно эффективным средством исследования динамики ***ОС***-моделей, о чем нами упоминалось выше. При этом, данный графический подход допускаетцелый ряд модификаций и интерпретаций, отвечающих специфике исследуемых проблем. Достаточно широко данный графовый подход к исследованию динамики классических ***ОС***-моделей используется, например, в работах [158,160, 177,178,268,281,314]. В данных терминах функционирование ***ОС***-модели может быть определено *графом состояний*, где под состоянием автомата понимается текущая ***КФ*** *классической* ***d-ОС (d≥1)***. В свою очередь, граф состояний бесконечного автомата состоит из *подграфов* ряда элементарных типов, а именно:

$$(a)\ \tau^{(n)}: c_o \to c_1 \to c_2 \to c_3 \to \dots c_j \to \dots\dots \to c_k \to \dots\dots \to c_p \to$$

$$(b)\ \tau^{(n)}: c_o \to c_1 \to c_2 \to c_3 \to \dots c_j \to \dots\dots \to c_k \to \dots\dots \to c_p \dots\dots \to$$

$$(c)\ \tau^{(n)}: \dots \to c_{-3} \to c_{-2} \to c_{-1} \to c_o \to c_1 \to c_2 \to \dots \to c_k \to \dots \to c_p \to \dots$$

$$c_k \in C(A,d,\phi)\ (k = -\infty\ ..\ +\infty)$$

В результате работы по проблематике вопросов, поставленных ***А.В. Берксом*** [128,314] и в связи с исследованием проблемы *обратимости* в ***ОС***-моделях, нами были исследованы *графы* состояний *классических* ***ОС***-моделей в их связи с проблемой неконструируемости. Основным здесь является следующий результат, а именно.

<u>Теорема 47</u>. Если классическая d-ОС (d≥1) не обладает НКФ (НКФ-3), а также и НКФ-1, то уже относительно входного/выходного алфавита C(A,d,ϕ) граф состояний ОС может содержать только подграфы типов (a; при j=p=0) и/или (c); в остальных случаях допускается** и **сочетание подграфов типов (a .. c) в достаточно широких диапазонах.

Ряд результатов исследований по графам состояний классических ***ОС***-моделей представляют и специальный интерес в случае рассмотрения такого класса параллельных динамических систем в качестве *бесконечных* автоматов в их традиционном понимании [158,281,389,390,536]. Детальнее данный вопрос обсуждался выше в разделе **2.2** настоящей главы.

4. Для класса ***ОСнР***-структур, определенных в разделе ***1.2*** книги и весьма важных с точки зрения физического моделирования, проблема неконструируемости ассоциируется, в первую очередь, с проблемой обратимости их динамики, актуальность которой вкратце обсуждается и в рамках настоящей книги, а детально рассматривается в целом ряде работ [90,150-152,157,160,204,268,273, 318,378,386-388,536]. Для классических ***ОС***-моделей понятие ***обратимости*** *динамики* определяем следующим образом, а именно.

<u>Определение 12</u>. Классическая ОС-модель, не обладающая неконструируемостью типов НКФ-1, НКФ и НКФ-3, называется обратимой структурой, в противном случае – необратимой.

Следует отметить, что *обратимость* рассматривается нами относительно множества ***С(А,d,ϕ)*** всех конечных конфигураций; следовательно, даже наличие предшестенников у конечной ***КФ*** лишь из множества ***С(А,d,∞)*** не делает классическую ***d-ОС*** обратимой. Данное предположение вполне обосновано, т.к. *бесконечные* ***КФ*** с точки зрения ряда прикладных аспектов не имеют достаточно удовлетворительной интерпретации, да и с *теоретической* точки зрения более интересен случай потенциальной бесконечности. Хотя в ряде случаев бесконечные ***КФ*** могут оказаться довольно полезными в исследовании некоторых теоретических аспектов (*например, в случае представления бесконечными* ***КФ*** *трансцендентных чисел*). Грубо говоря, ***обратимая*** классическая ***d-ОС*** никогда не забывает *историю* любой конечной ***КФ***. Такого типа классические ***d-ОС*** представляют особый интерес для моделирования целого ряда процессов, изучаемых современной физикой [536].

Точнее, как невозможен для классических ***ОС***-моделей мгновенный (*за один шаг* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ *модели*) *переход* от конечной к бесконечной конфигурации (*возможен лишь потенциально бесконечный рост конечной* ***КФ*** *с течением времени, скорость которого определяется размером* ***ШС***), так и мгновенный переход бесконечной ***КФ*** в конечную (*теоретически допустимый аксиоматикой классических* ***ОС****-моделей*) лишен, в определенной степени, естественного смысла. Современные космогонические концепции также подтверждают данную точку зрения на трактовку однородных структур, как *модели* пространственно-распределенных динамических систем, из которых именно физические системы представляют наибольший интерес. Таким образом, *динамика* именно конечных ***КФ*** из множества ***C(A,d,ϕ)*** в среде *классических* ***ОС***-моделей представляет основной интерес на предмет исследования как теоретических, так и прикладных аспектов теории однородных структур во всей их общности и обширности сфер применения [536].

Как следует из определения ***12***, в классических ***ОС***-моделях обратимость их динамики довольно тесно увязана с наличием либо отсутствием в моделях типов неконструируемости ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1***. Именно в этом контексте определение ***12*** полностью определяет условия обратимости динамики классических и целого ряда других типов ***ОС***-моделей.

При этом, если требование отсутствия типов неконструируемости ***НКФ***, ***НКФ-3*** в ***ОС*** довольно очевидно, то отсутствие неконструируемости типа ***НКФ-1*** полностью исключает возможность, когда для конечной ***КФ*** в качестве предшественников выступают только бесконечные ***КФ***, что не обеспечивается сколько-нибудь удовлетворительной интерпретацией. Тогда как для класса ***ОСнР***-моделей подобной проблемы не возникает совсем, ибо обратный мониторинг динамики произвольной конечной ***КФ*** производится только на основе параллельных локальных блочных подстановок ***(18)*** и обратного Ξ-правила переразметки Z^d-пространства модели (см. раздел ***1.2***). При данном подходе обратимая динамика для каждой конечной ***КФ c**** однозначно возвращает и конечного ее предшественника.

Вместе с тем, обратный мониторинг динамики произвольной ***c-КФ*** для классической структуры и ***ОСнР***-моделей также существенно отличны, требуя различных информационных отправных точек. Если для случае классической ***ОС***-модели нам вполне достаточно вида исследуемой ***c-КФ*** и ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ (*не привязывая себя жестко к временной шкале и* Z^d*-пространству*), тогда как в случае с ***ОСнР***-моделью дополнительно к виду исследуемой ***c-КФ*** и ***ЛБФ*** мы должны знать как Ξ-*правила* переразметки Z^d-пространства, так и его текущую *блочную* разметку, позволяющую однозначно восстанавливать обратный ход *блочной переразметки*, что в общем случае требует и организации координатной привязки исследуемой ***КФ***. Следовательно, как *прямая*, так и *обратная* динамики в ***ОСнР***-моделях требуют существенно больше информации, чем для случая классических ***ОС***-моделей, тем самым, порой, довольно существенно усложняя сам объект.

В настоящее время вопросы обратимости ***ОС***-моделей во всей их общности исследованы не до конца и здесь имеется ряд открытых проблем, решаемых по мере развития ***ТОС***-проблематики. Например, если для случая *классических* ***1-ОС***, как следует из представленных выше результатов, *проблема обратимости* произвольной структуры алгоритмически разрешима, то в общем случае классических ***d-ОС*** ($d \geq 2$) она становится уже алгоритмически неразрешимой, что дает ответ на один из вопросов, поставленных в работе [150].

При этом, в отличие от *классических*, ***ОСнР***-модели (раздел ***1.2***) характеризуются *алгоритмической* разрешимостью проблемы обратимости. Действительно, любая ***ОСнР***-модель считается вполне определенной, если она задана набором параллельных блочных подстановок ***(18)*** ее ***ЛБФ*** $\Psi^{(m)}$ и Ξ-правилом блочной *переразметки* однородного Z^d-пространства структуры. Но как отмечалось, обратимость динамики ***ОСнР***-модели и непосредственно вытекает из взаимной однозначности отображений $\Psi^{(m)}: A^m \Rightarrow A^m$ (*определяемых ее* ***ЛБФ***), которая алгоритмически разрешима. Таким образом, определив конкретную ***ОСнР***-модель, мы сразу же получаем четкий ответ на вопрос об обратимости ее динамики, тогда как для случая *классической* ***ОС***-модели данный вопрос в общем случае является алгоритмически неразрешимым. Нетрудно убедиться, что среди всевозможных структур на разбиении ***d-ОСнР*** $\equiv \langle Z^d, A, m, \Psi^{(m)}, \Xi\rangle$ существует ровно $R = (a^m - 1)!$ с обратимой динамикой, где m – число единичных автоматов, образующих блок разбиения Z^d-пространства.

При этом, их *доля* относительно множества всевозможных структур такого типа подобно случаю *классических* ***ОС***-моделей также чрезвычайно быстро стремится к нулю в соответствии с простой асимптотической формулой $\vartheta = \sqrt{2\pi\varpi} * \varpi / e^{\varpi}$ $(\varpi = a^m;\ a = \#A)$.

Таким образом, если ***ЛБФ*** $\Psi^{(m)}$ ***ОСнР***-модели *непосредственно* определяет свойство обратимости динамики модели, то ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ классической ***ОС***-модели имеет более косвенное влияние на ее обратимость – стираемость информации в первом случае непосредственно проявляется уже на уровне ***ЛБФ***, тогда как во втором случае она опосредствованно проявляется через ***γ-КФ***, а также взаимно-стираемые ***КФ***. Данное обстоятельство довольно существенно усложняет исследование проблемы обратимости для случая классических ***ОС***-моделей, что в значительной мере делает их менее предпочтительными для ряда задач физического моделирования, в первую очередь, на микроскопическом уровне [536].

5. Структуры с рефрактерностью ***d-ОСР(r,P)*** (раздел ***1.2***) играют достаточно важную роль в ряде прикладных аспектов ***ТОС***, определяя *собственный **R**-подкласс* класса *всех классических* ***d-ОС (d≥1)***. Структуры ***R***-подкласса обладают неконструируемостью ***НКФ***-типа, располагая, как нетрудно убедиться, блочными ***НКФ*** вида $c_b = 1^m$ $(m \geq n - P + 1)$, где ***n*** – размер шаблона соседства и ***P*** – порог *возбудимости* единичного автомата структуры. При этом, следует иметь в виду, что определение структуры ***ОСР(r,P)*** требует выполнения соотношения ***P≤n-1***, т.к. в противном случае в ***ОСР(r,P)*** невозможно существование *возбужденных (в **1**-состоянии)* автоматов, исключая *начальный* момент времени ***t=0***. Таким образом, в ***d-ОСР(r,P)*** не может существовать довольно больших сплошных блоков автоматов в возбужденном состоянии. При этом, с ростом значения ***P*** *порога возбудимости* допустимый размер *блоков* возбужденных автоматов в ***ОСР***-модели будет уменьшаться. Данный результат легко обобщается на случай высших размерностей структур, предполагая интересные прикладные интерпретации для такой формальной модели «*нервных тканей*». Целый ряд весьма интересных результатов на основе ряда как теоретического, так и компьютерного исследований ***R***-подкласса ***ОС***-моделей можно найти в работах [3,5-9,53-58,88,536]. Дальнейшие исследования по проблеме *неконструируемости* в классических ***ОС***-моделях представляются нам интересными по двум основным причинам, а именно:

(1) понятие *неконструируемости* является одним из фундаментальных в исследованиях *динамики* классических и ряда других типов ***ОС***-моделей;

(2) результаты, полученные по проблеме неконструируемости, не только детализируют данное фундаментальное понятие, но и формируют достаточно эффективный аппарат исследования динамики ***ОС***-моделей как классических, так и ряда других типов.

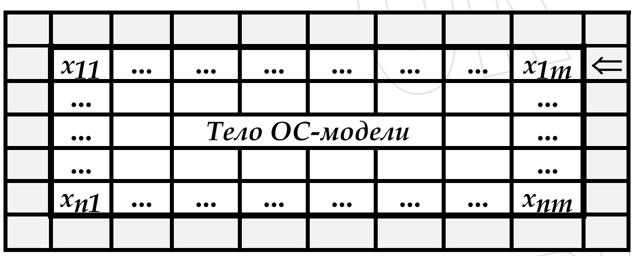
Завершая на этом обсуждение основных результатов по общей проблеме неконструируемости в *классических* ***ОС***-моделях, кратко остановимся на особенностях этой проблематики для *конечных* ***ОС***-моделей, представляющих достаточно большой прикладной интерес [54-56,536].

2.7. Особенности проблемы неконструируемости для конечных классических однородных структур

В предыдущих разделах главы проблема неконструируемости рассматривалась относительно бесконечных классических ***ОС***-моделей, однако она имеет место и для конечных ***ОС***-моделей, но с довольно существенными отличиями, акцент на которых и делается в настоящем разделе. Детальнее данная проблематика представлена прежде всего в работах японской школы [135,230] по конечным ***ОС***-моделям и в целом ряде других работ [156,171,175,184-187,240], но именно здесь мы впервые попытаемся провести сопоставление относительно проблемы неконструируемости бесконечных и конечных ***ОС***–моделей. Этот вопрос актуален, в первую очередь, с прикладной точки зрения, ибо конечные структуры ориентированы именно на практические реализации.

Прежде всего, конечная ***ОС***-модель представляет собой конечный автомат, наделенный некоей специфической внутренней организацией, делающей его весьма удобной моделью в целом ряде интересных приложений. *Конечная* ***ОС***-модель аналогична некоторому конечному автомату без входов, который перерабатывает свои внутренние состояния (*глобальные* ***КФ***) под воздействием глобальной функции перехода в дискретные моменты времени, а выход его в момент времени $t>0$ соответствует его внутреннему состоянию в тот же самый момент времени t. По сути дела, конечная ***ОС***-модель является одним из примеров упоминаемых выше автоматов Мура со своей специфической внутренней организацией.

Число N глобальных ***КФ*** такой ***ОС***-модели конечно и равно $N=a^m$, где: m – число составляющих ***ОС***-модель единичных автоматов Мура и a – мощность A-алфавита внутренних состояний этих автоматов. Следовательно, каждая глобальная ***КФ*** *конечной* ***ОС***-модели – некоторое отображение $CF: Z_m^d \Rightarrow A$, где Z_m^d является конечным *связным* блоком из m единичных автоматов однородного пространства Z^d, аналогичного случаю классических бесконечных ***ОС***-моделей. Однако, так как ограниченность такой ***ОС***-модели вызывает неопределенность в области ее ***граничных*** (*согласно индекса соседства*) единичных автоматов при применении к ним ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, то требуется задание граничных условий (*блок граничных автоматов и его конфигурацию*). Так, конечная прямоугольная размера ***mxn 2-ОС*** с индексом соседства Неймана/Мура потребует определения конфигурации единичных автоматов (*границы*) в один слой, окружающих собственно само тело ***2-ОС*** (рис. ***17***).



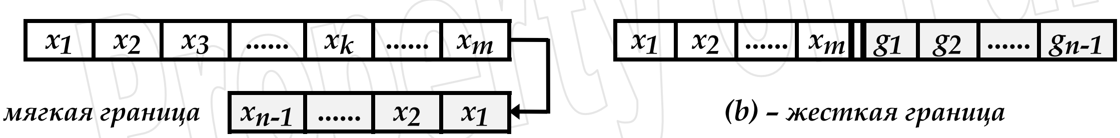
⇐ Собственно само ***тело*** конечной ***2-ОС*** размера ***nxm*** единичных автоматов

⇐ ***Граничные условия,*** соответствующие индексу соседства Неймана/Мура.

Рис. 17. Организация конечной 2-мерной ОС-модели с жесткой границей.

Конфигурация граничных автоматов может быть как постоянной, так и переменной, имитируя некое взаимодействие конечной ***ОС***-модели с внешней средой. В частности, одним из способов моделирования в однородных структурах является конструирование для них конечных блоков, имитирующих работу тех или иных устройств, включая каналы связи между ними. Именно по такому пути пошел ***Дж. фон Нейман*** и ряд его последователей при исследованиях своих первых *клеточных моделей* – прототипов современных ***ОС*** [124,125,128,132,536]. Описанный нами способ задания граничных условий назовем ***жестким.***

Вторым способом определения граничных условий является свертывание конечной однородной среды, достигаемое путем «*склеивания*» ее противоположных границ. Наглядно данный подход можно проиллюстрировать на примере конечной ***1-ОС***, чей левый край соединяется (*склеивается*) с правым, а именно:



(a) – мягкая граница ***(b) – жесткая граница***

Рис. 18. Задание мягких и жестких граничных условий для случая конечных 1-ОС.

При организации ***мягких*** граничных условий (рис. ***18,a***) связь единичных автоматов ***ОС***-модели не прерывается и за ее m-м автоматом сразу же следует ***1***-й, т.е. организована циклическая схема соединения единичных автоматов модели. Тогда как для случая ***жестких*** граничных условий ее граничные g_k-автоматы (*в количестве, определяемом индексом соседства* ***X***) присоединяются справа (*слева*) от крайних автоматов модели (рис. ***18,b***)**.** Если в случае *мягкой* ***G1***-границы конфигурация ее переменна, то в случае жесткой ***G2***-границы она может быть как постоянной (*фиксированной*)**,** так и переменной. С учетом сказанного, ***конечную ОС***-модель мы можем, не нарушая общности, определять как упорядоченную шестерку OC_G^m **= <Z^d,*A*,$\tau^{(n)}$,*X*,*m*,*G*>,** для которой первые четыре компоненты определяются аналогично случаю *классической* бесконечной ***ОС***-модели**;** ***m*** **-** размер ребра ***d***-мерного гиперкуба из единичных автоматов Z^d-пространства (*собственно тело модели*)**,** ***G*** **–** граничные условия (*способы указания граничных автоматов и их конфигурации*)**.** При этом**,** под глобальным состоянием OC_G^m *-модели* понимается ***КФ*** именно составляющих ее тело единичных автоматов**.** Множество ***C(A,d,m)*** глобальных (*внутренних*) состояний этой конечной OC_G^m -модели называется *полным***,** если данная модель в начальный момент времени ***t=0*** в качестве начального состояния допускает любую возможную глобальную ***КФ*** своего тела**,** определенную в алфавите ***A*,** независимо от граничных условий. Очевидно, что множество ***C(A,d,m)*** глобальных состояний OC_G^m -модели конечно и его мощность равна величине $N=a^m$**.** Если же OC_G^m -модель не обладает ***неконструируемыми КФ (НКФ)*,** то, используя в качестве начальной последовательно все ***КФ*** из ***C(A,d,m)***-множества, в следующий момент времени получаем полный набор конфигураций**,** т.е. $\tau^{(n)}$***: C(A,d,m)*** $\Rightarrow$ ***C(A,d,m)*** **–** глобальная функция модели отображает множество ***C(A,d,m)*** само на себя. Сказанное достаточно наглядно иллюстрирует (рис. ***19, a***)***:***

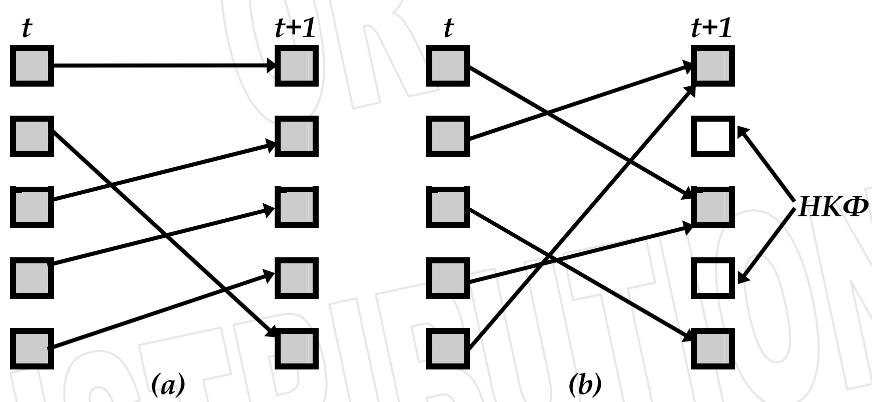


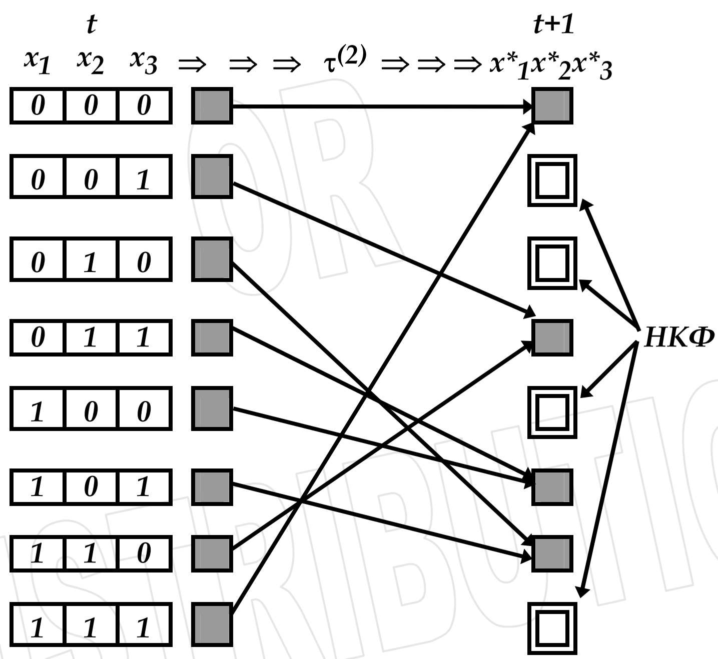
Рис. 19. Иллюстрация неконструируемости для конечных ОС-моделей.

Если же при сделанных предположениях остаются недостижимыми глобальные ***КФ*** (*состояния*) модели, то они называются ***неконструируемыми (НКФ)*** и имеет место следующее отображение $\tau^{(n)}$***: C(A,d,m)*** $\Rightarrow$ ***C****$\subset$***C(A,d,m)*** **–** глобальная функция модели отображает все множество ***C(A,d,m)*** в себя (рис. ***19, b***)**.** Как будет показано ниже, в общем случае именно данное условие и определяет критерий неконструируемости для конечных OC_G^m -моделей, а именно**:** ***Конечная*** OC_G^m ***-модель обладает некоиструируемыми конфигурациями только тогда, когда для модели имеет место следующее отображение*** $\tau^{(n)}$***: C(A,d,m)*** $\Rightarrow$ ***C****$\subset$***C(A,d,m)*,** т.е. сам критерий носит достаточно общий характер, ассоциируясь с понятием *взаимной стираемости* лишь на самом общем уровне.

При этом, существенное различие в динамике *бесконечных* и *конечных* классических ***ОС***-моделей проявляется уже на таком уровне их возможностей как существование для них универсальных ***КФ*,** рассматриваемых в разделе ***3.1*.** Если бесконечные ***ОС***-модели не допускают данных ***КФ*,** то конечные могут иметь как одну, так и все конфигурации универсальными**.** Одним из критериев существования для бесконечных классических ***ОС***-моделей *неконструируемости* ***НКФ***-типа есть наличие для них взаимно-стираемых ***КФ (ВСКФ)*,** рассмотренных в разделе ***2.1*.** Между тем, для случая ***конечных ОС***-моделей данный критерий в общем случае не имеет места, опираясь лишь на самое общее понятие *стираемости* ***КФ*.** И здесь необходимо использовать иные подходы для исследования проблемы *неконструируемости*. В целом же следует отметить, что данные вопросы неконструируемости наряду с вопросами обратимости *динамики конечных* ***ОС***-моделей являются не столь уж и простыми [88,536].

$$\begin{cases} x_k^{t+1} = \sum_{j=0}^{n-1} x_{k+j}^t \pmod a; \quad 1 \le k \le m-n+1 \\ x_k^{t+1} = \sum_{j=k}^{m} x_j^t + \sum_{j=1}^{n-m+k-1} x_j^t \pmod a; \quad m-n+1 < k \le m \end{cases} \quad (k = 1..m) \qquad (31)$$

$$\begin{cases} x_k^{t+1} = \sum_{j=0}^{n-1} x_{k+j}^t \pmod a; \quad 1 \le k \le m-n+1 \\ x_k^{t+1} = \sum_{j=k}^{m} x_j^t + \sum_{j=1}^{n-m+k-1} g_j^t \pmod a; \quad m-n+1 < k \le m \end{cases} \quad (k = 1..m) \qquad (32)$$



Рассмотрим два класса ***AG = <Z,A,*** $\tau^{(n)}$***,X,m,G1>*** и ***VS = <Z,A,*** $\tau^{(n)}$***,X,m,G2>*** конечных OC_G^m -моделей, где ***G1*** и ***G2*** представляют соответственно *мягкие* и *жесткие* граничные условия модели (рис. ***18***), ***A***={***0,1,2, ..., a-1***}, ***X***={***0,1,2,3, ..., n-1***} и ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ для моделей обоих классов определяется линейной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_n) = \sum_k x_k \pmod a$, $x_k \in A$ ***(k=1 .. n)***. Принимая во внимание определение мягких и жестких граничных условий для конечных классических ***1-ОС*** длины ***m***, а также и линейность ***ЛФП*** для моделей обоих классов, x_k^{t+1}-состояние x_k-автомата модели из ***AG=<Z,A,*** $\tau^{(n)}$***,X,m,G1>*** и ***VS=<Z,A,*** $\tau^{(n)}$***,X,m,G2>*** классов в момент времени ***t+1*** ($t \ge 0$; ***k=1..m***) вычисляется соответственно по вышеприведенным простым формулам ***(31-32)*** (см. рис. ***18***). Где формулы ***(31)*** и ***(32)*** относятся к OC_G^m -моделям соответственно из первого и второго класса, для удобства обозначаемым просто как ***AG=<a,n,m>*** и ***VS=<a,n,m>*** соответственно. Тогда непосредственная проверка (*справедливость которой может проверить читатель*) подтверждает наличии для ***AG(2,3,2)***-модели четырех ***НКФ***, что весьма нагляжно иллюстрирует выщеприведенная схема отображений.

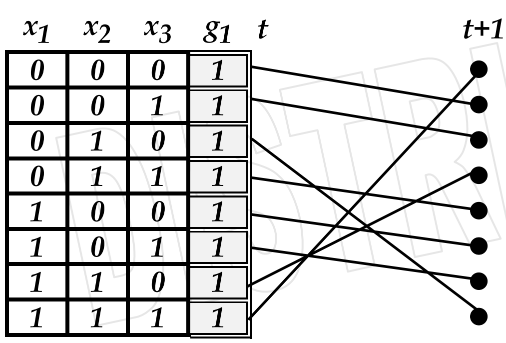
Более того, можно показать, что в общем случае для ***AG(2,m,2)***-модели существует ровно $N=2^{m-1}$ ($m \ge 2$) ***НКФ*** и при росте ***m***-значения доля ***НКФ*** для таких моделей стремится к величине $\rho = 1/2$.

Подобная ситуация сохраняет силу и для ***AG(2,m,2)***-модели, если в качестве ее мягкой границы ***G1*** использовать не единичный x_1-автомат, а x_{m-1}-автомат, т.е. производить их отсчет в порядке, обратном, принятому при свертке конечной ***ОС***-модели (рис. ***18.a***). Однако, уже для ***AG(3,m,n)***-моделей ситуация совершенно иная: если для модели ***AG(3,n,n)*** существует ***N=a^n-a НКФ***, то уже для ***AG(3,3,2)***-модели ***НКФ*** отсутствуют. Непосредственная проверка устанавливает отсутствие ***НКФ*** как для моделей ***AG(2,4,2)***, так и ***AG(2,5,3)***. Таким образом, в ***AG=<Z,A,τ^(n),X,m,G1>***-классе моделей, линейная ***ЛФП*** которых не допускает существования ***ВСКФ***, критерий *Мура-Майхилла* существования в моделях ***НКФ*** не имеет места: ***При отсутствии ВСКФ модели данного класса могут как обладать, так и не обладать неконструируемостью НКФ-типа.***

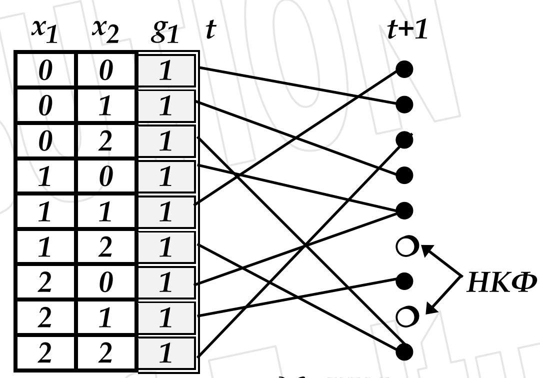
Рассмотрим теперь случай конечных OC_G^m-моделей с жесткими граничными ***G2***-условиями и линейной ***ЛФП*** рассмотренного выше вида, т.е. ***VS=<Z,A,τ^(n),X,m,G2>***-класс моделей. В качестве конкретных примеров такого типа моделей проанализируем динамику двух простых структур ***VS1=<3,2,2>*** и ***VS2=<2,3,2>*** с одними и теми же граничными ***G2***-условиями (*только один автомат в* ***1***-*состоянии*). Но если для первой структуры используется ***ЛФП*** $\sigma1^{(2)}(x,y) = x+y \pmod 2$, то для второй – локальная функция $\sigma2^{(2)}(x,y)$ (*состояния* ***x*** *и* ***y*** *принадлежат соответственно бинарному и тернарному алфавитам*), определяемая следующей довольно простой формулой, а именно:

$$\sigma 2^{(2)}(x,y) = \begin{cases} y, & if \quad x=0 \\ x+y \pmod 2, & if \quad xy \in \{10, 11, 22\} \quad x,y \in A = \{0,1,2\} \\ x+y \pmod 2 + 1, & otherwise \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что определенная данным образом локальная функция $\sigma2^{(2)}$ полностью исключает наличие для структуры ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***-неконструируемости. Следующие таблицы переходов глобальных состояний для обоих конечных структур достаточно прозрачны и особых пояснений не требуют, а именно:



НКФ отсутствуют



имеются две НКФ

Таким образом, также и для случая конечных OC_G^m-моделей с *жесткими* граничными условиями отсутствие пар ***ВСКФ*** не гарантирует отсутствия неконструируемости. Таким образом, в общем случае конечных OC_G^m-моделей наличие ***ВСКФ*** является достаточным, однако не необходимым условием существования для них ***НКФ***. Более того, проблема неконструируемости для *конечных* ***ОС***-моделей очень тесно связана с типом граничных условий. Например, если ***AG(2,m,2)***-модели с мягкими граничными ***G1***-условиями обладают ***НКФ***, то соответствующие им ***VS(2,m,2)***-модели с жесткими граничными ***G2***-условиями не обладают свойством *неконструируемости*. Более того, ***VS(2,m,2)***-модели с граничными условиями ***g1=1*** (рис. ***18.b***) имеют ***все*** глобальные ***КФ*** в качестве ***универсальных***, тогда как с граничными условиями ***g1=0*** они не обладают ни ***НКФ***, ни ***УКФ***.

При этом, как можно показать, справедливость утверждения о наличии ***N = 2^(m-1) НКФ*** у модели ***AG(2,m,2)*** остается в силе и для модели ***VS(2,m,2)***, если в качестве ее жестких граничных условий

G2 задаются некоторого типа периодические и ряда других типов условия. Оставляем эту тему читателю в качестве весьма полезной сферы экспериментирования с *конечными* OC_G^m -моделями.

Для данных целей рекомендуется использовать метод компьютерного моделирования, для чего достаточно разработать достаточно простую программу, например, в среде программирования ***Basic, Turbo-Pascal*** либо в среде математических пакетов ***MathCAD, Maple, Mathematica,*** многие фрагменты для которой можно почерпнуть и из наших программ компьютерного исследования ряда динамических аспектов классических ***ОС***-моделей [6,15,54-56,65,67,74,85,87,118], а также из интересных работ [166-168,236,243,280,536].

Для *обратимой* конечной ***ОС***-модели *инъективное* глобальное отображение должно быть также и *биективным*. Между тем, если глобальное отображение конечной ***ОС***-модели инъективно, то это не влечет за собой обязательной *обратимости* ее динамики. Следовательно, динамика конечной ***ОС***-модели *обратима*, если ее глобальное отображение является биективным. В общем же случае довольно затруднительно определять обратимость конечной ***ОС***-модели и детальнее с данными вопросами динамики конечных ***ОС***-моделей можно ознакомиться в ряде довольно интересных работ ***M. Harao*** и ***S. Noguchi*** [536]. При этом, в случае линейности глобального отображения $\tau^{(n)}$ проблема обратимости становится значительно доступнее. Обсуждение свойств линейных или аддитивных ***ОС***-моделей можно найти в работах ***O. Martin, K. Morita*** и других [536].

Таким образом, относительно проблемы неконструируемости *бесконечные* и *конечные* ***ОС***-модели определяют *существенно* различные классы параллельных динамических клеточных систем, что и стимулирует дальнейшие исследования в данном направлении, которые представляются нам достаточно интересными с целого ряда точек зрения. На данном месте завершается обсуждение проблематики, связанной со свойством неконструируемости классических ***ОС***-моделей, из чего непосредственно следует, что за исключением ряда принципиальных вопросов данная *проблема* к настоящему времени получила достаточно полное разрешение. Однако ее *фундаментальность* для математической ***ТОС***-проблематики и ряд связанных с ней открытых вопросов продолжают привлекать к ней многих исследователей [88,90,536].

2.8. Вопросы обратимости динамики классических однородных структур

Проблема *обратимости* вычислений и создания *обратимых* вычислительных устройств особенно актуальна в настоящее время, когда начались серьезные работы по созданию новых архитектур вычислительной техники с ориентацией на производства, использующие нанотехнологии. Так, вычисления, выполняемые на современных компьютерах, проводятся посредством необратимых операций, стирающих информацию. Так называемый вентиль ***И*** – устройство с двумя входными линиями, на каждой из которых может быть установлен сигнал, равный ***1*** или ***0***, и только одной выходной линией – значение ее сигнала определяется значениями входов. Если на обоих входах ***1***, то на выходе также будет ***1***; если на одном или на обоих входах будет ***0***, то и на выходе будет ***0***. Каждый раз, когда на выходе вентиля значение ***0***, теряется информация, т.к. неизвестно, в каком из трех возможных состояний находились входные линии (***0 – 1, 1 – 0, 0 – 0***). На самом же деле, в любом логическом вентиле, у которого количество входов превышает количество выходов, будет неизбежно происходить потеря информации, так как невозможно определить состояние входов по состоянию его выходов.

Между тем, еще в ***1973 C. Bennet*** показал, что при вычислениях можно обойтись как без *стирания* информации, так и без *необратимых* логических элементов. После чего справедливость данного положения была продемонстрирована на ряде вычислительных моделей. В частности, отметим здесь *вентиль* ***Э. Фредкина*** [536], имеющий три входные и три выходные линии. Сигнал на *одной* входной линии, называемой управляющим каналом, не изменяется при прохождении его через вентиль. Если сигнал на управляющем канале установлен равным ***0***, то входные сигналы на двух других линиях также проходят без изменения. Но если на управляющей линии будет сигнал ***1***, то на двух других выходных линиях происходит переключение, а именно: *входной* сигнал одной линии становится *выходным* другой, и наоборот. Вентиль ***Э. Фредкина*** не теряет информации, поскольку состояние входов можно всегда определить по состоянию выходов. ***Фредкин*** показал, что любое логическое устройство, необходимое для работы компьютера, может быть создано в виде соответствующей комбинации таким обратимых вентилей. Чтобы выполнить вычисление, на определенных *входных* линиях некоторых вентилей компьютера должны быть *предварительно* установлены определенные значения. Из ряда других интересных обратимых вычислительных моделей можно также отметить «*бильярдный*» компьютер ***Фредкина-Тоффоли.***

Вышеуказанные обратимые вычислительные модели базируются, в основном, на классической динамике и электронике, однако ряд исследователей предложили и другие модели обратимых вычислительных устройств, базирующихся на принципах квантовой механики. По своей сути, частицы в таких моделях должны быть расположены таким образом, чтобы правила квантовой механики, управляющие их взаимодействием, были в точности аналогичны правилам, которые предсказывают значения сигналов на выходах обратимых логических вентилей. Предположим, например, что спин частицы может иметь только два возможных значения: направление вверх (*соответствующее* ***1***) и вниз (*соответствующее* ***0***). Тогда *взаимодействие* между значениями *спинов* частиц должно происходить таким образом, чтобы значение спина данной частицы изменялось в зависимости от спина частиц, находящихся поблизости. При этом, спин данной частицы будет соответствовать одному из выходов логического вентиля. Эта идея весьма широко используется в моделях квантовых компьютеров. Между тем, уверенность, что квантовая механика позволяет выполнять вычисления со сколько угодно малой затратой энергии, находит подтверждение и в моделях *обратимых* квантовомеханических вычислителей. Эти модели не рассеивают энергию и подчиняются законам квантовой механики. Детальнее с *обратимыми* моделями подобного типа можно ознакомиться в списке оригинальных источников [536].

Вышесказанное относилось главным образом к обработке информации. Но компьютер должен не только обрабатывать информацию, но и запоминать ее. Так, взаимосвязь между хранением и обработкой информации лучше всего, пожалуй, можно описать на примере машины Тьюринга, которая в вычислительном отношении может моделировать любой современный компьютер и решать любую задачу. Вышеупомянутый ***C. Bennet*** доказал возможность построения обратимой машины Тьюринга, т.е. такой, которая не теряет информации и по данной причине в процессе работы может потреблять *любое* заранее заданное малое количество энергии. Но не все машины Тьюринга обратимы, однако вполне можно построить *обратимую* машину Тьюринга, способную выполнить любое заданное вычисление [88,90,536].

Для создания обратимых вычислительных моделей предложены подходы на биомолекулярной и химической основах. Известные в генетике ферментные реакции обратимы. Показано [88,536], что гипотетическая *ферментная* машина Тьюринга может производить вычисления с *произвольно* малой затратой энергии, так как реакции, подобные ***РНК***-синтезу, могут рассеивать *произвольно* малое количество энергии. С весьма интересной моделью такой обратимой машины Тьюринга, а также с интересными обсуждениями с физической точки зрения по *обратимым* вычислениям и *обратимым* компьютерам можно ознакомиться в [536]. Здесь, прежде всего, нами рекомендуется обратить особое внимание на во многом пионерские идеи и работы таких исследователей как ***C. Bennett, R. Landauer, E. Fredkin, T. Toffoli, M. Margolus*** и некоторых других исследователей.

Между тем, в связи с применение ***ОС***-моделей в качестве как формальных, так и перспективных прототипов вычислительных моделей вопросы обратимости динамики данных моделей также лежат в русле выше отмеченных исследований. Проблемы обратимости динамики ***ОС***-моделей играют чрезвычайно важную *роль*, прежде всего, с точки зрения использования их в качестве как симуляционной среды для погружаемых в нее разнообразных процессов, явлений и феноменов, прежде всего, *физического* характера, так и в качестве определенных прототипов перспективных вычислительных средств, предполагающих использование нанотехнологий и поддерживающих ***обратимые*** вычисления. И в данном отношении один из важнейших аспектов исследований в ***ТОС***-проблематике приходится именно на проблему обратимости динамики ***ОС***-моделей. При этом, в понятие ***обратимости*** вкладывается возможность восстановления обратной динамики ***ОС***-модели в любой момент времени. Мы же будем ниже использовать и более жесткое понятие *обратимости*, под которой понимается возможность *однозначного* восстановления всей динамики ***ОС***-модели в любой момент времени, т.е. такой обратимости, когда возможно точно определить в каждый момент времени ***t*** для каждой конечной конфигурации в классической ***ОС***-модели ее единственного предшественника в предыдущий момент времени ***t-1.***

В настоящее время предложен целый ряд интересных классов ***ОС***-моделей, обладающих общим свойством *обратимости*, среди которых можно отметить рассматриваемые также в данной книге ***ОС*** на разбиении ***(ОСнР)***, впервые введенные ***N. Margolus*** [388,536] и широко используемые им в соавторстве с ***T. Toffoli*** для моделирования ряда обратимых процессов [150-152,273,376,430,536], а также специально сконструированные ***T. Tofoli*** и исследованные с точки зрения вычислительно-конструкционной *универсальности обратимые* ***ОС***-модели [187,268,318,536]. Целый ряд работ был посвящен различным вопросам обратимости ***ОС***-моделей различных типов и классов [536]. Так, ***D. Richardson*** [305] доказал, что классическая ***ОС***-модель ***обратима*** тогда и только тогда, когда ее глобальное отображение, определяемое ***ГФП***, *инъективно*. Однако использованный для этого топологический подход не дает конструктивного алгоритма для обеспечения непосредственной инверсии. С теоретико-автоматной точки зрения подход к данной проблеме можно найти у ***K. Culik*** [536]. ***S. Amoroso***, ***Y. Patt*** [270] и ***В. Аладьев*** [19,20,88] доказали существование *эффективной* процедуры, решающей проблему обратимости классической ***1-ОС***. При этом, с другой стороны, ***J. Kari*** [277] и ***В.З. Аладьев*** [88] на базе различных подходов доказали неразрешимость проблемы обратимости классических ***d-ОС (d ≥ 2).***

Следует иметь ввиду, что получение конструктивного алгоритма определения обратимости для *классических* ***d-ОС (d ≥ 2)*** является достаточно трудной задачей даже при условии ее наличия [88]. Между тем, для ряда случаев и линейных классических, и некоторых специальных классов ***d-ОС (d ≥ 2)*** такие конструктивные алгоритмы существуют. Например, ***G. Manzini*** и ***L. Margara*** вывели формулу для обратимости *линейных* классических ***d-ОС; T. Sato*** получил пример алгоритма для определения обратимости в случае одного специального класса ***d-ОС; K. Sutner*** получил пример алгоритма, обеспечивающий определение наличия обратимости и сюръективности глобального отображения у линейных ***d-ОС (d ≥ 2)*** за квадратичное время [536].

K. Morita доказал существование *обратимой* ***1-ОС***, симулирующей произвольную ***1-ОС***, включая и необратимые, а ***J. Dubacq*** доказал возможность симулирования машин Тьюринга обратимыми ***1-ОС*** [536]. ***T. Toffoli*** доказал факт возможности моделирования произвольной ***d-ОС*** обратимой ***(d+1)-ОС (d≥1)***, доказав тем самым вычислительную *универсальность* обратимых ***d-ОС (d≥2)*** [268]. Тогда как ***K. Morita*** и другие доказали вычислительную универсальность обратимых ***1-ОС*** [321, 322]. Однако, вопрос моделирования произвольных классических ***d-ОС*** обратимыми ***d-ОС (d ≥ 2)*** все еще остается не до конца проработанным, так наши результаты по ***WM-*** и ***W***-*моделированию классических* ***d-ОС (d≥2)*** говорят в пользу весьма существенной сложности *(а то и невозможности)* доказательства самого факта такого моделирования при условии оперирования с ***ОС***-моделями на формальном уровне и на основе критерия неконструируемости Мура-Майхилла (теорема ***18***) [88,90]. ***T. Toffoli*** и ***N. Margolus*** дали весьма интересный обзор по *обратимым* ***ОС***-моделям [273].

В наиболее распространенном понимании под ***обратимой ОС***-моделью понимается структура, не теряющая со временем информацию, а именно: ***В каждый момент времени t она полностью обратима.*** Между тем, в общем случае определить такую обратимую ***ОС***-модель особого труда не составляет. С этой целью вполне достаточно задать локальную функцию перехода структуры следующим образом, а именно:

$$z(t+1) = \Phi(ШC_z(t)) \ \# \ z(t-1) \qquad (\Im)$$

Как уже отмечалось выше, в любом логическом вентиле, для которого число входов превышает количество выходов, неизбежно происходит ***потеря*** информации, т.е. невозможно определять состояние входов вентиля по состоянию его выходов. В предложенном же решении число входов логического *вентиля*, в качестве которого выступает единичный автомат однородной структуры, организованной таким образом, равно числу выходов, т.е. двум, как это отлично иллюстрирует следующая весьма простая схема, а именно:

$$\begin{matrix} \ldots \to \\ \ldots \to \end{matrix} \begin{bmatrix} \sigma_{t-1}(ШC_z) \\ z(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \begin{bmatrix} \sigma_{t}(ШC_z) \\ z(t+1) \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \begin{bmatrix} \sigma_{t+1}(ШC_z) \\ z(t+2) \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \ldots \\ \to \ldots \end{matrix}$$

Таким образом, появляется возможность *однозначно* восстанавливать состояние $z(t-1)$ единичного автомата z структуры в момент $t-1$ по его состоянию в текущий момент времени $t+1$ и значению $\sigma_t(ШC_z)$ – его состоянию в момент времени t, а именно:

$$z(t-1) = z(t+1) \ \#^{-1} \ \sigma(ШC_z(t))$$

где $\#^{-1}$ – функция, *обратная* к функции **#**; *ограничением* является лишь условие, что в результате применения обратной функции $\#^{-1}$ недопустимо получение значения $z(t-1)$ не из A-алфавита внутренних состояний единичного z-автомата. Вышепредложенный класс ***ОС***-моделей вполне можно определить как структуры с памятью, а их единичный автомат в определенной степени подобен вышеупомянутому вентилю ***Фредкина***, в котором роль управляющего канала успешно выполняют состояния *верхнего* уровня вышепредставленной схемы, т.е. $\sigma_p(ШC_z)$ $(p=t+k,\ k=\pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При этом, сама локальная функция перехода $\sigma^{(n)}$ может быть произвольной, обеспечивая возможность определения обратимых ***ОС***-моделей с достаточно широким набором локальных функций перехода для единичного автомата структуры. В качестве иллюстративного примера такого типа структур можно привести следующий. Ради простоты полагаем шаблон соседства в ***1-ОС*** типа Неймана-Мура $X=\{-1,0,1\}$, бинарный алфавит $B=\{0,1\}$, локальную функцию перехода $\sigma^{(3)}$, определяемую параллельными подстановками следующего вида:

$000 \to 0$	$000 \to 1$	$000 \to 1$	$000 \to 1$
$001 \to 1$	$000 \to 1$	$000 \to 0$	$000 \to 0$

Несложно убедиться, что определенная таким образом классическая ***1-ОС*** (*с классификационным номером* ***122***) *необратима*, ибо согласно критерия существования неконструируемости ***НКФ***-типа на основе ***γ-КФ*** (теорема ***24***) в ней существуют ***НКФ***. При этом, в такой структуре существуют и ***НКФ-1*** уже следующего простейшего вида ***c=□11□***. Определим теперь новую структуру, которая построенна на основе данной классической ***1-ОС*** и функционирование которой определяется в виде нижеследующих уравнений для правил перехода ее элементарных автоматов. Нам только останется затем показать, что определенная таким образом структура ***1–ОС*** не должна обладать неконструируемостью ***НКФ***–типа, т.е. в традиционной постановке является обратимой. Между тем, вопрос обратимости в *классических* ***ОС***–моделях несколько сложнее и рассматривается ниже.

$$z(t+1) = \sigma^{(3)}(ШC_z(t)) + z(t-1) \ (\mathrm{mod}\ 2) \qquad или \qquad z(t+1) = \sigma^{(3)}(ШC_z(t)) \ XOR \ z(t-1)$$

Во многих исследованиях в качестве алфавита внутренних состояний единичного автомата ***ОС***-модели рассматривается множество $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$, образующее конечное коммутативное *кольцо* относительно операций *сложения* и *умножения* по ***mod a***. Для наших целей представляет интерес также и обратная к сложению операция вычитания по ***mod a*** в данном кольце, которая для двух множеств $B = \{0,1\}$ и $A = \{0,1,2\}$ определяется таблицами следующего вида, а именно:

–	0	1
0	0	1
1	1	0

–	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Несложно выводится таблица операции *вычитания* по ***mod a*** также в общем случае ***A***-множества. Несложно убедиться, что определенная таким образом структура будет обратимой, что хорошо иллюстрирует следующая простая схема, а именно:

$$\begin{array}{l|c|c} z(t-1) & \leftarrow 0 \leftarrow & \leftarrow 1 \leftarrow \\ \sigma^{(3)}(ШС_z(t)) & \leftarrow 0/1 \rightarrow & \leftarrow 0/1 \rightarrow \\ z(t+1) & \rightarrow 0/1 \rightarrow & \rightarrow 1/0 \rightarrow \end{array}$$

из которой уже несложно заключить, что согласно уравнению функционирования единичного ***z***-автомата структуры на основе информации о состояниях ***z***-автомата в моменты времени ***t+1*** и ***t*** можно однозначно определять и его состояние в момент ***t-1***, т.е. в таком смысле определенная нами структура является обратимой. Приведем историю данной структуры на протяжении трех ее первых шагов при ***КФ*** в момент времени ***t-1*** c_{t-1}=□111111□ (*начальное условие*) и начальной ***КФ*** c_t = □1000010□, а именно:

t-1 … 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 …
t … 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 …
t+1 … 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 …
t+2 … 0 0 01 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 0 …
t+3 … 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 …

Естественно, что определенная нами обратимая структура моделируется в строго *реальное* время классической ***1-ОС*** с индексом соседства ***X*** Неймана-Мура и ***A***-алфавитом структурированных состояний, однако такая структура не будет являться *обратимой*.

Действительно, данная моделирующая ***1-ОС*** представляется структурированным ***A***-алфавитом состояний ее единичных автоматов и индексом соседства Неймана-Мура с локальной функцией перехода, определяемой параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$\begin{matrix} t-1 \\ t \end{matrix}\begin{bmatrix} S_{j-1} \\ S^*_{j-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_j \\ S^*_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{j+1} \\ S^*_{j+1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma^{(3)}(S^*_{j-1}, S^*_j, S^*_{j+1}) \\ \sigma^{(3)}(S^*_{j-1}, S^*_j, S^*_{j+1})\ XOR\ S_j \end{bmatrix}; S_j, S^*_j \in \{0,1\};\ j = 0, \pm1, \pm2, \dots;\ t = 0, 1, 2, \dots$$

Несложно убедиться, что эта моделирующая ***1-ОС*** является *классической* структурой с индексом соседства Неймана-Мура ***X***={***-1,0,1***}, структурированным алфавитом ***A*** мощности ***4;*** при этом, ее *первый уровень* состояний определяет конфигурацию *моделируемой* структуры в момент времени ***t***, тогда как *второй* – ***КФ*** в момент ***t-1 (t=1,2,...).*** Предполагается, что в момент времени ***t=0*** *второй* уровень состояний данной моделирующей структуры определяет некоторое начальное условие (*начальную* ***КФ***), тогда как *первый* уровень определяет *начальную* конфигурацию непосредственно моделируемой структуры. Для доказательства *необратимости* моделирующей структуры вполне достаточно указать для нее пару ***ВСКФ***, что влечет наличие для структуры неконструируемости ***НКФ***-типа, а следовательно, и отсутствие свойства обратимости ее динамики.

$$\sigma^{(3)}: \left\langle \begin{array}{c|c|c} 0\,0 & 0\,0\,0 & 1\,0 \\ 0\,1 & 0\,0\,1 & 1\,0 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left\langle \begin{array}{c|c|c} 1 & 1\,1\,1 & 1 \\ 1 & 1\,1\,1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\sigma^{(3)}: \left\langle \begin{array}{c|c|c} 0\,0 & 0\,0\,0 & 1\,0 \\ 0\,1 & 1\,0\,0 & 1\,0 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left\langle \begin{array}{c|c|c} 1 & 1\,1\,1 & 1 \\ 1 & 1\,1\,1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

С учетом вышесказанного несложно убедиться в справедливости наличия для моделирующей структуры уже пары ***ВСКФ*** с ***ВБ*** размера ***3*** вышепредставленного вида, что и обусловливает для структуры наличие неконструируемости ***НКФ***-типа, следовательно, и отсутствие у нее свойства обратимости динамики. Еще на одном аспекте следует акцентировать внимание. Использовав в приведенном примере для определения обратимой ***ОС***-модели в качестве локальной функции перехода ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ бинарной классической ***1-ОС*** с номером ***122***, которая не обладает свойством обратимости *динамики*, и информацию о состояниях z-автомата структуры в смежных моментах времени $\langle t,t-1\rangle$ для вычисления состояния z-автомата в момент времени $t+1$, мы ни в коей мере не решили вопрос моделирования такой необратимой структуры обратимой. Точнее, исходная необратимая структура была только одним из вариантов отображения конфигурации шаблона соседства z-автомата в момент времени t в его состояние в момент $t+1$. Аналогично сказанному вполне может быть использован ряд других операций в качестве ***#-****операции* ***(***$\Im$***)***. Таким образом, представленный пример обратимой ***ОС***-модели является лишь одним из возможных примеров такого типа и для получения обратимых ***ОС***-моделей для конкретных приложений требуется, порой, достаточно сложная исследовательская работа. В настоящее время имеется ряд и других интересных примеров определения обратимых ***ОС***-моделей [536]. Нами также был представлен ряд *обратимых* ***ОС***-моделей, отличных от классических, с применением в биологии развития [5].

В настоящем разделе рассматривается вопрос обратимости динамики конечных конфигураций относительно классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$, т.е. структур, чьи ***ЛФП*** удовлетворяют определяющему соотношению $\sigma^{(n)}(x,x,x,x, \dots, x) = x$, где x – состояние «*покоя*». В свете данного предположения под ***обратимой d-ОС*** понимается классическая структура, для которой имеют место одно или оба из нижеследующих соотношений, а именно:

$$(1) \qquad (\forall c \in C(A,d,\phi))(\forall t \in \{1,2,3,\dots\})(\exists! c^t \in C(A,d,\phi))(c^t \tau^{(n)t} = c)$$

$$(2) \qquad (\forall c \in C(A,d,\phi))(\forall t \in \{1,2,3,\dots\})(\exists! c^t \in C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty))(c^t \tau^{(n)t} = c)$$

При этом, во втором случае снимается ограничение на принадлежность предшественников для конечной конфигурации c из множества $C(A,d,\phi)$.

(a) $\quad \dots \leftarrow c_{-j} \leftarrow \dots \leftarrow c_{-3} \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o \in C(A,d,\phi)$ ***обратимая динамика d-ОС***

(b)

$$\begin{tikzcd}
\dots & c^{\infty}_{-(j+1)} \arrow[l] \arrow[dd, dash, dotted] & & & & & & \\
& & c_{-j} \arrow[ul] \arrow[dl] & \dots \arrow[l] & c_{-3} \arrow[l] & c_{-2} \arrow[l] & c_{-1} \arrow[l] & c_o \in C(A,d,\phi) \arrow[l] \\
\dots & c^{f}_{-(j+1)} \arrow[l] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

необратимая динамика d-ОС

При этом, в графе состояний типа ***(a)*** конфигурация c_o может повторяться *бесконечное* число раз в случае ее периодичности, тогда как для графа типа ***(b)*** число предшественников на шаге $-(j+1)$ обязательно не менее двух и они могут принадлежать как множеству $C(A,d,\phi)$, так и множеству $C(A,d,\infty)$. С учетом же предыдущих результатов данной главы по проблеме неконструируемости в классических ***ОС***-моделях уже несложно заключить, что для *обратимости* такого типа моделей необходимо отсутствие у них неконструируемости ***НКФ***-типа, ибо в противном случае для ***КФ*** c_o типа ***НКФ*** (*и блочных, и конечных*) вообще будут отсутствовать предшественники из множества $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$, не говоря уже о требовании их единственности. Рассмотрим в данной связи случай классических ***d-ОС***, обладающих неконструируемостью типа ***НКФ-1*** при отсутствии для них ***НКФ***. В качестве примера приведем бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, которая имеет классификационный номер ***102*** и была рассмотрена в разделе ***2.2***. Показано, что данная структура не обладает парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. С другой стороны, несложно убедиться, что для данной структуры существует множество ***НКФ-1*** вида $G=\{c_k=\Box 1^{2k-1}\Box \mid k=1,2, \dots\}$, где 1^p – кортеж $\langle 111 \dots 111\rangle$ из p единиц. Более того, каждая ***КФ*** $c_k \in G$ имеет по паре непосредственных предшественников $\{c'_k, c''_k\}$, а именно:

$$c'_k = \Box(10)^{k-1}1^{\infty}, \qquad c''_k = 1^{\infty}(01)^{k-1}\Box; \qquad c'_k \tau^{(3)} = c''_k \tau^{(3)} = c_k \quad (k=1,2,3, \dots)$$

Следовательно, данная структура не может быть обратимой в нашем понимании, если не будем принимать во внимание *симметричность предшественников* для указанного ***G***-множества ***НКФ-1***. Между тем, даже при таком допущении, что предшественники рассматриваются с точностью до симметрии, свойство *необратимости* сохраняется. В качестве примера рассмотрим классическую бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства $X = \{0,1,2\}$, которая имеет классификационный номер ***30*** и была рассмотрена в разделе **2.2**. Такая структура не обладает ***НКФ*** при наличии для нее ***НКФ-1*** следующего вида $c_k = \square(1110)^k11\square\ (k=0,1,2,\ \ldots)$. Так вот уже для ***НКФ-1*** простейшего вида $c = \square11\square$ существует пара *непосредственных* предшественников вида $c_1=1^\infty\square$, $c_2=\square101^\infty$, т.е. $c_1 \neq c_2$ и $c_1\tau^{(3)} = c_2\tau^{(3)}=c$. Таким образом, здесь имеет место необратимость даже с точностью до симметричности предшественников конфигураций.

Наконец, в качестве еще одного примера приведем *бинарную* модель ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, имеющую классификационный номер ***120*** и рассмотренную в разделе **2.2**. Показано, что данная структура не обладает парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. С другой стороны, несложно убедиться, что для данной модели ***1-ОС*** существует множество ***НКФ-1*** простейшего вида $c=\square1\square$ наряду с существованием ***КФ*** $c\in C(B,1,\phi)$, имеющей пару непосредственных предшественников и из множества $C(B,1,\phi)$, и из множества $C(B,1,\infty)$, а именно: $c_1 = \square101\square$, $c^\infty= 1^\infty01001^\infty$, $c_1\tau^{(3)}=c^\infty\tau^{(3)} = c = \square11011\square$. Следовательно, и данная классическая структура не может быть обратимой в нашем понимании. Вышесказанное позволяет сформулировать следующий результат, а именно.

<u>Теорема 48</u>. Отсутствие для классической структуры d-ОС (d≥1) неконструируемости типа НКФ является необходимым, но не достаточным условием обратимости динамики конечных конфигураций в контексте представленного выше определения обратимости.

Таким образом, в среде классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$, не обладающих неконструируемостью типа ***НКФ***, но обладающих неконструируемостью типа ***НКФ-1***, существуют *необратимые* структуры согласно представленного выше вполне естественного определения. Более того, проведенный вышеуказанным образом анализ показывает, что все классические бинарные ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, не обладающие неконструируемостью ***НКФ***-типа и обладающие ***НКФ-1*** (*т.е. структуры с характеристическими номерами* ***30,60,75,86,89,90,102,105,106*** *и* ***120***; *раздел* **2.2**), являются необратимыми в контексте вышепредставленного определения. Следовательно, наличие в ***d-ОС*** свойства неконструируемости типа ***НКФ-1***, не взирая даже на отсутствие неконструируемости ***НКФ***-типа в классических ***d-ОС***, может обусловливать необратимость динамики данного класса структур в целом.

Учитывая важность понятия *обратимости* для исследования динамики *классических* ***ОС***-моделей, еще раз обратимся к трем основным типам *неконструируемости* в такого типа моделях, а именно: ***НКФ***, ***НКФ-1*** и ***НКФ-2***. Для *трех* основных типов неконструируемости в *классических* ***d-ОС*** $(d\geq1)$ можно привести следующие достаточно наглядные графические интерпретации, а именно:

$$\text{НКФ } C_b: \quad C\in C(A,d,\phi)\cup C(A,d,\infty) \to C_b \notin c\tau^{(n)}$$

$$\text{НКФ-1 } C: \quad \begin{array}{ll} C \leftarrow C^\infty\tau^{(n)}; & C^\infty\in C(A,d,\infty) \\ C \nleftarrow C^*\tau^{(n)}; & C^*\in C(A,d,\phi) \end{array}$$

$$\text{НКФ-2 } C: \quad \begin{array}{ll} C \nleftarrow C^\infty\tau^{(n)}; & C^\infty\in C(A,d,\infty) \\ C \leftarrow C^*\tau^{(n)}; & C^*\in C(A,d,\phi) \end{array}$$

где C_b – блочная конфигурация, т.е. ***КФ*** состояний конечного блока единичных автоматов ***ОС***-модели; $C(A,d,\phi)$ и $C(A,d,\infty)$ – множества соответственно всех конечных и бесконечных ***d***-мерных

КФ структуры в алфавите $\boldsymbol{A=\{0,1,2,\ ...,\ a\text{-}1\}}$; $\tau^{(n)}$ – глобальная функция перехода структуры и $\boldsymbol{C}$ – конечная конфигурация структуры, для которой имеет место только конечное число состояний, отличных от состояния «*покоя*» **(0).** При этом, среди представленных типов неконструируемости в качестве *базовых* мы будем рассматривать именно два типа *неконструируемости* ***НКФ*** и ***НКФ-1.***

Отметим одно довольно важное соотношение между базовыми типами неконструируемости. В целях простоты изложения рассмотрим случай ***1***-мерных классических структур. Предположим теперь, что в данного класса ***ОС***-моделях отсутствуют типы неконструируемости ***НКФ*** и ***НКФ-1*** при наличии для них бесконечных конфигураций $c^\infty \in C(A,1,\infty)$, отличных от полностью *нулевых* $\square$-конфигураций и таких, что $c^\infty\tau^{(n)} = \square$. Рассмотрим произвольную блочную ***КФ*** $c_b = x_1x_2x_3\ ...\ x_p$ соответствующей длины, «*вырезанную*» из конфигурации c^∞ $(x_1,\ x_2 \in A\setminus\{0\})$; на ее основе строим соответствующую ей *конечную* ***КФ*** $c^* = \square c_b \square = \square x_1x_2x_3\ ...\ x_p\square$; $c^* \in C(A,1,\phi)$. Применяя теперь к этой ***КФ*** глобальную функцию перехода $\tau^{(n)}$, получаем конечную ***КФ*** следующего вида, а именно:

$$c^*\tau^{(n)} = \square c_1 000000\ ...\ 000000 c_2 \square$$

Очевидно, ввиду предположения об отсутствии для структур неконструируемости типов ***НКФ***, должно выполняться одно из следующих соотношений: $c_1 \neq \square \,\&\, c_2 \neq \square$, $c_1 \neq \square \,\&\, c_2 = \square$, $c_1 = \square \,\&\, c_2 \neq \square$, ибо в противном случае, как несложно убедиться, для структуры существовали бы пары ***ВСКФ*** уже вида $\{c^* \neq \square,\ \square\}$, т.е. $c^*\tau^{(n)} = \square\tau^{(n)} = \square$, а значит и ***НКФ***, что противоречит предположению. Для определенности рассмотрим случай $c_1 \neq \square\ \&\ c_2 = \square$. Но тогда, увеличивая размер блочной ***КФ*** c_b и тем самым размер ***КФ*** c^*, получаем *бесконечное* множество конечных ***КФ*** c^* таких, что $c^*\tau^{(n)} = c_1$, а следовательно и пар ***ВСКФ***, а значит ***НКФ***, что вновь противоречит нашему предположению. Случай $c_1 = \square\ \&\ c_2 \neq \square$ аналогичен предыдущему. Наконец, рассмотрим случай $c_1 \neq \square\ \&\ c_2 \neq \square$. В данном случае поступаем следующим образом. Более того, согласно нашему предположению в рассматриваемых структурах отсутствует и неконструируемость типа ***НКФ-1.*** Следовательно, *любая* конечная ***КФ*** c (*в том числе* c_1 *и* c_2) имеет только один непосредственный предшественник c^{-1} из множества $C(A,d,\phi)$. Так как ***КФ*** $c^*\tau^{(n)} = \square c_1 00000\ ...\ 00000 c_2 \square$, то определив конфигурацию $c^{**} = \square c^{-1}{}_1 000\ ...\ 000 c^{-1}{}_2 \square$, приходим к заключению, что можно подобрать ***КФ*** $c^* = \square c_b \square = \square x_1x_2\ ...\ x_p\square$ таким образом, что обязательно должно будет выполняться следующее соотношение, а именно: $c^*\tau^{(n)} = c^{**}\tau^{(n)} = \square c_1 0000\ ...\ 0000 c_2 \square$, а при условии, что $c^* \neq c^{**}$ вновь легко приходим к заключению, что структуры должны будут обладать парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что вновь противоречит нашему предположению. Между тем, с другой стороны, наличие для классических ***ОС***-моделей бесконечных конфигураций $c^\infty \in C(A,1,\infty)$, отличных от полностью нулевой $\square$-конфигурации и таких, что $c^\infty\tau^{(n)} = \square$, эквивалентно *незамкнутости* множества $C(A,1,\infty)$ относительно глобального отображения, индуцируемого ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ модели. Итак, с учетом вышеприведенных рассуждений получаем следующий достаточно важный результат, а именно.

<u>Теорема 49</u>. Если для классической 1-ОС конфигурационное множество $C(A,1,\infty)$ незамкнуто по отношению к глобальному отображению, индуцируемому ГФП $\tau^{(n)}$, то структура 1-ОС будет обладать неконструируемостью типов НКФ, НКФ-1 либо обоими типами одновременно.

Данный результат распространяется и на случай *классических* ***d-ОС*** $(d \geq 2)$ [54-56]. Вышесказанное позволяет сформулировать следующую достаточно интересную ***гипотезу:***

<u>Гипотеза</u>. Классическая структура d-ОС $(d \geq 1)$, для которой множество $C(A,d,\infty)$ незамкнуто относительно глобального отображения, определяемого ГФП $\tau^{(n)}$, является необратимой.

В частности, для случая классических бинарных ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура *(как мы убедились выше)* данная гипотеза верна. В данной связи особый интерес представляет также и проблема алгоритмической разрешимости *замкнутости* множества конфигураций ***C(A,d,∞)*** по отношению к глобальному отображению, индуцируемому ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ однородной структуры. Для случая множества ***C(A,1,∞)*** проблема алгоритмически разрешима [54-56,88], тогда как для случая множества ***C(A,d,∞)*** ***(d≥2)*** она алгоритмически неразрешима [88,90]. Приведем краткий набросок доказательства данного результата, предварив изложение необходимыми сведениями. Так, под «*домино*» нами будет пониматься квадратная пластинка со стороной длины ***1***, удовлетворяющая следующим условиям, а именно:

(1) стороны *домино* называются *(в порядке обхода по часовой стрелке) верхней*, *правой*, *нижней* и *левой;*

(2) каждая сторона домино окрашена в свой уникальный цвет *(одно домино может быть окрашено не более, чем **4-**мя различными цветами, но может быть использовано и меньше цветов).*

Общая игра «*домино*» задается некоторым непустым конечным множеством ***G*** типов «*домино*». В дальнейшем представим себе квадратную сетку на плоскости, образованную *прямыми* линиями, параллельными осям координат и проходящими через целочисленные точки. Будем говорить, что получено *покрытие* сетки посредством ***G***, если в каждый ее квадрат помещено *домино* одного из типов, имеющихся в ***G***. При этом, такое покрытие называется ***когерентным***, если все домино соприкасаются сторонами одного цвета. Игра «*домино*» называется ***правильной***, если существует вышеуказанное *когерентное* покрытие сетки посредством ***G***.

В отдельных случаях удается установить правильность той или иной общей игры «*домино*», но как доказал ***R. Berger*** [536], проблема определения правильности игры «*домино*» в общем случае алгоритмически неразрешима, т.е. не существует алгоритма, позволяющего за конечное число шагов установить *правильность* общей игры «*домино*». Идея доказательства утверждения состоит в сопоставлении программе машины Тьюринга общей игры «*домино*» либо ее вариантов таким образом, чтобы имела место следующая эквивалентность, а именно: ***Машина Тьюринга с пустой лентрйе никогда не останавливается тогда и только тогда, когда общая игра «домино» будет правильной.*** При этом, в отличие от *общей*, *угловая* игра «*домино*» задается конечным множеством ***G*** типов «*домино*», а уг-ловое покрытие посредством ***G*** можно получить помещением в каждый квадрат первого квадранта «*домино*» одного из типов ***G***. Когерентность этого углового покрытия определяется аналогично случаю общей игры «*домино*». В данном направлении *алгоритмическая неразрешимость* определения правильности ***угловой*** игры «*домино*» была доказана ***H. Wang*** [536]. При этом, в отдельных случаях вполне возможно установить наличие или отсутствие алгоритма, решающего вопрос правильности *общей* либо *угловой* игры «*домино*», однако в общем случае эта проблема *неразрешима*. С основными элементами доказательства представленных результатов на вполне доступном уровне можно ознакомиться, например, в прекрасной книге [260].

Для наших целей рассмотрим классическую ***2-ОС*** с произвольным алфавитом ***A={0,1,2, ..., a-1}*** и индексом соседства ***X={(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)}***. Определяем среди всех параллельных подстановок, определяющих ***ЛФП*** $\sigma^{(4)}$ те, которые удовлетворяют соотношению $\sigma^{(4)}((0,0),(1,0),(0,1),(1,1))=r\in A$. Таким образом, выбираем классическую ***2-ОС*** с «*почти*» простейшим индексом соседства ***X***, чей шаблон соседства для его центрального автомата h_{oo} имеет следующий вид, а именно:

$$\sigma^{(4)}: \begin{array}{|c|c|}\hline h_{01} & h_{11} \\ \hline h_{00} & h_{10} \\ \hline\end{array} \Rightarrow \quad S(h_{00}) = r \qquad (TF)$$

Во множестве всех конфигураций шаблона соседства такой структуры выбираем только те, для которых выполняется вышеуказанное соотношение ***(TF)***, т.е. те шаблоны, на которых локальная функция перехода $\sigma^{(4)}$ возвращает ***r***-значение; при этом, исключаются только те конфигурации шаблонов соседства, которые полностью состоят из ***r***-состояний, что выполняется для *исключения* *тривиальных* случаев покрытия. Обозначим такое множество через ***TF***. Очевидно, если в текущей конфигурации $c_t \in C(A,2,\infty)$ структуры конфигурации шаблонов соседства ***(ШС)*** всех единичных автоматов принадлежат только множеству ***TF***, то будет выполняется следующее соотношение, а именно $c_t \in \tau^{(4)} = \Re_r$, где $\tau^{(4)}$ – *глобальная* функция перехода структуры, соответствующая *локальной* функции перехода $\sigma^{(4)}$ структуры, и $\Re_r$ – конфигурация ***2-ОС***, все автоматы которой находятся в ***r***-состояниях. Для определения того, имеется ли возможность установления для произвольной классической ***2-ОС*** алгоритма, который за конечное число шагов определяет генерирует ли она из некоторой бесконечной ***КФ*** c^∞ конфигурацию структуры, состоящую только из ***r***-состояний, поступаем следующим образом. Не нарушая общности, несложно убедиться, что уже на основе первого квадранта произвольной ***КФ*** структуры легко получить когерентное покрытие первого квадранта плоскости шаблонами соседства, как это проиллюстрировано ниже.

Когерентное покрытие R ⇒

Квадрант конфигурации

====	====	====	====	
h_{41}	h_{42}	h_{43}	h_{44}	==
h_{31}	h_{32}	h_{33}	h_{34}	== ==
h_{21}	h_{22}	h_{23}	h_{24}	==
h_{11}	h_{12}	h_{13}	h_{14}	==

⇒⇒⇒

⇒⇒⇒

⇒⇒⇒

====	====	====	====	====	====	
h_{41}	h_{42}	h_{42}	h_{43}	h_{43}	h_{44}	==
h_{31}	h_{32}	h_{32}	h_{33}	h_{33}	h_{34}	== ==
h_{31}	h_{32}	h_{32}	h_{33}	h_{33}	h_{34}	==
h_{21}	h_{22}	h_{22}	h_{23}	h_{23}	h_{24}	==
h_{21}	h_{22}	h_{22}	h_{23}	h_{23}	h_{24}	== ==
h_{11}	h_{12}	h_{12}	h_{13}	h_{13}	h_{14}	==

Теперь уже несложно убедиться, что произвольная ***КФ*** Z^2 (*тривиальный случай полностью нулевой* □***-КФ*** *исключается из нашего рассмотрения*) конвертируется в *когерентное покрытие* Z^2 шаблонами соседства вышеуказанным способом, и наоборот. Следовательно, вышеуказанная проблема для классической ***2-ОС*** сводится к разрешимости *правильности* общей либо угловой игры «*домино*». При этом, в качестве «*домино*» используются шаблоны соседства ***2-ОС***, четыре стороны которых окрашены в цвета, соответствующие кортежам состояний $[h_{01},h_{11}]$, $[h_{11},h_{10}]$, $[h_{10},h_{00}]$ и $[h_{00},h_{01}]$; очевидно, что количество различных допустимых цветов определяется величиной a^2.

h_{01}	h_{11}
h_{00}	h_{10}

Таким образом, проблема (*а именно: генерирует ли произвольная* ***2-ОС*** *из некоторой бесконечной* ***КФ*** *конфигурацию структуры, которая состоит лишь из* ***r****-состояний*) сводится к *вопросу* существования алгоритма, разрешающего для произвольной *классической* ***2-ОС*** указанного вида, разрешимость *правильности* приведенного когерентного покрытия ***R*** шаблонами соседства, на конфигурациях которых ***ЛФП*** структуры принимает ***r***-значение, т.е. к разрешимости общей (*либо угловой*) игры «*домино*», каждая из которых в общем случае неразрешима. Полагая, в частности, ***r = 0*** получаем следующий достаточно интересный результат.

<u>Теорема 50</u>. Проблема незамкнутости множества всех бесконечных КФ $C(A,d,\infty)$ ***относительно глобального отображения, индуцируемого глобальной функцией*** $\tau^{(n)}$ ***классической однородной структуры, алгоритмически разрешима для*** $d = 1$ ***и алгоритмически неразрешима для*** $d \geq 2$.

Между тем, и в более общей постановке приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующий достаточно интересный результат, а именно.

<u>Теорема 51</u>. Для произвольной классической d-ОС (d≥2) с алфавитом $A=\{0,1,2,\ldots,a\text{-}1\}$ ***и глобальной функцией*** $\tau^{(n)}$ ***проблема существования конфигураций*** C^* ***таких, что имеет место*** $C^*\tau^{(n)} = C^\infty{}_r$

(где $C^{\infty}{}_{r}$ – бесконечная КФ структуры, состоящая лишь из r-состояний; $r \in A$), алгоритмически неразрешима.

В основном, под *замкнутостью (незамкнутостью)* множества ***C(A,d,∞)*** *бесконечных* конфигураций относительно ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ структуры ***d-ОС (d ≥ 1)*** нами понимается *наличие (отсутствие)* в нем ***КФ*** $c^{\infty} \in C(A,d,\infty)$, для которых выполняется соотношение $c^{\infty}\tau^{(n)} = \square$, где $\square$ – полностью нулевая ***КФ*** пространства Z^d, по целому ряду соображений отнесенная нами к множеству ***C(A,d,ϕ)*** конечных конфигураций. При этом, нижеследующий результат дает возможность рассматривать понятие *замкнутости (незамкнутости)* множества ***C(A,d,∞)*** существенно более широко, а именно.

<u>Предложение 10</u>. Для классической d-ОС (d≥1) существуют конфигурации $c^{\infty} \in C(A,d,\infty)$***, которые удовлетворяют соотношению*** $c^{\infty}\tau^{(n)} = c \in C(A,d,\phi) \backslash \{\square\}$ ***только тогда, когда для структуры d-ОС существуют конфигурации*** $c_o{}^{\infty} \in C(A,d,\infty)$***, удовлетворяющие соотношению*** $c_o{}^{\infty}\tau^{(n)} = \square$***, исключая случай тривиальной структуры, чья ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ ***удовлетворяет нижеследующему соотношению:***

$$(\forall < x_1 x_2 \ldots x_n > | \, x_j \in A; \; j=1..n)(\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0)$$

Следовательно, существование для нетривиального ***d***-мерного отображения $\tau^{(n)}$ конфигураций $c^{\infty} \in C(A,d,\infty)$ таких, что имеет место соотношение $c^{\infty}\tau^{(n)} = \square$, *эквивалентно* для такого отображения и существованию ***КФ*** $c_o{}^{\infty}$ таких, что $c_o{}^{\infty}\tau^{(n)} = c \in C(A,d,\phi)$. Таким образом, в более *общем* случае под *замкнутостью (незамкнутостью)* множества ***C(A,d,∞)*** всех бесконечных ***КФ*** относительно ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ структуры ***d-ОС (d≥1)*** на всем протяжении монографии будет пониматься *наличие (отсутствие)* во множестве ***C(A,d,∞)*** конфигураций $c^{\infty} \in C(A,d,\infty)$, для которых справедливо соотношение вида $c^{\infty}\tau^{(n)} = c \in C(A,d,\phi)$. Из наших результатов [88,90], следует достаточно интересное предложение.

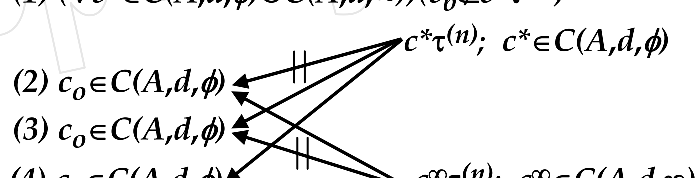
<u>Предложение 11</u>. Проблема существования бесконечных конфигураций $c_o{}^{\infty}$***, для которых имеет место соотношение*** $c_o{}^{\infty}\tau^{(n)} = c \in C(A,d,\phi)$ ***относительно ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***произвольной d-ОС (d≥1), будет алгоритмически разрешимой для d = 1 и алгоритмически неразрешимойа для d ≥ 2.***

Известно [80], что классическая ***d-ОС (d≥1)*** обладает *неконструируемостью* типа ***НКФ***, возможно, ***НКФ-3*** только тогда, когда для нее существуют ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$, не имеющие предшественников c^{-1} из множества $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$. Более того показано, что проблема существования таких ***КФ*** для произвольной классической ***d-ОС*** разрешима при ***d = 1*** и неразрешима при ***d ≥ 2***. В этом же контексте с использованием вышеупомянутого подхода на основе результата по *неразрешимости* общей игры «*домино*» доказывается и следующее не менее важное предложение [80], а именно.

<u>Предложение 12</u>. Проблема существования для произвольной КФ $c \in C(A,d,\phi)$ ***предшественника c* относительно произвольной ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***d-ОС (d≥1) алгоритмически разрешима при условии d = 1 и алгоритмически неразрешима при d ≥ 2.***

В заключение еще раз остановимся на *трех* основных типах некоструируемости в классических ***ОС***-моделях, а именно ***НКФ, НКФ-1*** и ***НКФ-2***. Так как неконструируемость напрямую связана с наличием для конечной ***КФ c*** предшественников c^{-1}, то представим все допустимые типы таких предшественников для наглядности в графическом виде, а именно:

$$(1) \; (\forall c^* \in C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty))(c_b \not\subset c^*\tau^{(n)})$$



Несложно убедиться, что вышепредставленные *четыре* типа *предшественников* для произвольной ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ являются исчерпывающими. Рассмотрим каждый из них в отдельности. Случай *(1)* характеризует наличие для ***d-ОС*** блочной ***КФ*** c_b, которая не является подконфигурацией ни для какой ***КФ*** $c^*\tau^{(n)}$ из множества $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$. Поэтому такая ***d-ОС*** согласно определения **1** обладает *неконструируемостью* типа ***НКФ***. Естественно, такой же результат мы получаем, если для ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ имеется более одного предшественника из множества $C(A,d,\phi)$ (*имеются пары* ***ВСКФ***, *значит* ***НКФ***), поэтому далее данный подвариант не рассматривается. Случай *(2)* говорит о наличии в ***d-ОС КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, не имеющей *предшественников* из множества $C(A,d,\phi)$, однако имеющей *предшественников* из множества $C(A,d,\infty)$, что ввиду определения **4** говорит о наличии для такой структуры неконструируемости типа ***НКФ-1***. Случай *(3)* говорит о наличии для ***d-ОС КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, не имеющей *предшественников* из $C(A,d,\infty)$, но имеющей их из $C(A,d,\phi)$, что ввиду определений ***1*** и ***4*** говорит о наличии для структуры *неконструируемостей* типов ***НКФ*** и ***НКФ-2***.

Наконец, случай *(4)* говорит о наличии в ***d-ОС КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, имеющей ***1*** предшественника из $C(A,d,\phi)$ и предшественников из $C(A,d,\infty)$. Не нарушая общности, рассмотрим *классическую* ***1-ОС***, удовлетворяющую данному случаю и не обладающую *неконструируемостью* типа ***НКФ*** и ***НКФ-1***. Можно убедиться в том, что для этой структуры существует ***КФ*** $c^\infty \in C(A,1,\infty)$ такая, что $c^\infty\tau^{(n)} = □$. Определяем на ее основе конечную ***КФ*** $c_o = □x_1x_2 \ldots x_q□$, где кортеж $<x_1x_2 \ldots x_q>$ ($x_1, x_q \in A\backslash\{0\}$) – часть ***КФ*** c^∞ достаточно большой длины. Получаем ***КФ*** $c_o\tau^{(n)} = □c_10 \ldots 0c_2□$, где по меньшей мере одна из ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будет конечной и отличной от нулевой. Иначе в структуре существовали бы пары ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что противоречит условию. Пусть лишь одна из $\{c_1, c_2\}$ конечна и отлична от *нулевой* (*например*, c_1). Тогда она будет иметь бесконечно много предшественников вида $c = □x_1x_2 \ldots x_q□$, что также противоречит отсутствию для структуры ***НКФ***. Следовательно, ввиду отсутствия ***НКФ*** она должна иметь *предшественников* из $C(A,1,\infty)$, а не из $C(A,1,\phi)$, т.е. быть ***НКФ-1***, что также противоречит условию. Пусть теперь обе ***КФ*** $\{c_1, c_2\}$ будут конечны, отличны от *нулевых* и обе имеют по одному *предшественнику* $\{c^{-1}{}_1, c^{-1}{}_2\}$ из множества $C(A,1,\phi)$. Рассмотрим ***КФ*** $c^* = □c^{-1}{}_10 \ldots 0c^{-1}{}_2□$, для которой по определению получаем $c^*\tau^{(n)} = □c_10 \ldots 0c_2□$. Но тогда для соответствующим образом определенной ***КФ*** $c^\# = □x_1x_2 \ldots x_q□$ получаем $c^*\tau^{(n)} = c^\#\tau^{(n)} = □c_10 \ldots 0c_2□$ ($c^* \neq c^\#$), что противоречит отсутствию для структуры ***НКФ***. Таким образом, получаем результат.

<u>Теорема 52</u>. Любая классическая d-ОС (d≥1) имеет по крайней мере один из трех базовых типов неконструируемости НКФ (возможно, НКФ-3), НКФ-1, НКФ-2 либо допутимые их сочетания, т.е. абсолютная конструируемость для данного типа однородных структур отсутствует.

2.9. Особенности проблемы неконструируемости для однородных структур на разбиении

Однородная структура *на разбиении* (***ОСнР***) определяется как упорядоченная пятерка базовых компонент ***d-ОСнР*** $\equiv <Z^d,A,m,\Psi^{(m)},\Xi>$, где первые две компоненты Z^d и A аналогичны случаю классической ***ОС***-модели; m – размер ребра ***d***-мерного гиперкуба, на которые разбивается Z^d-пространство структуры; $\Psi^{(h)}$ – локальная блочная функция перехода (***ЛБФ***; $h=m^d$); Ξ - правила коммутации блоков (*переразметка*) Z^d-пространства структуры. Функционирование структуры ***d-ОСнР*** достаточно просто и достаточно детально обсуждается в разделе ***1.2***. Там же проводится некоторый сравнительный анализ обоих типов моделей классических ***ОС*** и на разбиении ***ОСнР***. В ***ОСнР***-модели функция $\Psi^{(h)}$ отображает произвольную ***КФ*** (mx ... xm)-блока в новую ***КФ*** этого же блока, т.е. имеет место отображение $\Psi^{(h)}$**:** $A^h \Rightarrow A^h$**.** Одновременное же применение *локальной блочной функции* **(*ЛБФ*)** ко всем блокам Z^d**-**пространства определяет *глобальную функцию перехода* $\tau^{(h)}$**,** преобразующую *начальную* c_o**-*КФ*** всего однородного Z^d**-**пространства в следующую c_1**-*КФ*,** т.е. $c_o\tau^{(h)}=c_1$**.** В настоящее время структуры ***ОСнР*-**типа находят довольно широкое применение, в первую очередь, для ряда интересных задач физического моделирования и имеют поддержку как программную, так и аппаратную на вышеупомянутых ***САМ*-**машинах, которые базируются на вычислительных ***ОС*-**моделях [165,376,394,430,536].

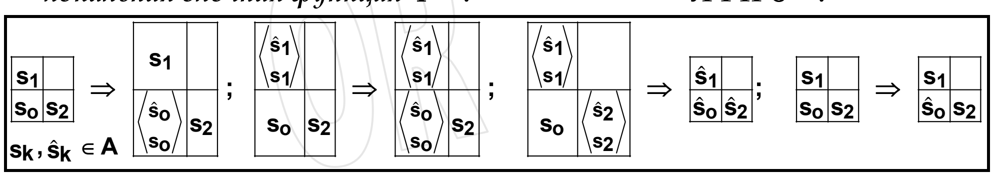
В контексте же проблемы *неконструируемости* классические ***ОС*-**модели и ***ОСнР*-**модели имеют принципиальные различия. Во-первых, для ***ОСнР*-**моделей не имеет силы классификация типов *неконструируемости*, вышеопределенная для классических ***ОС*-**моделей **(*НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3*).** Действительно, согласно определения ***4*** конечная ***с-КФ*** является в классической ***d-ОС НКФ-1*** тогда и только тогда, когда для нее существуют предшественники только из множества ***C(A,d,∞)*** бесконечных ***КФ*.** Это влечет за собой незамкнутость ***C(A,d,∞)*-**множества относительно глобального $\tau^{(h)}$**-**преобразования модели. С другой стороны, уже из определения ***ОСнР*-**модели непосредственно следует, что из незамкнутости ***C(A,d,∞)*-**множества относительно глобального $\tau^{(h)}$**-**преобразования вытекает необходимость наличия среди параллельных *блочных подстановок*, определяющих ***ЛБФ*** $\Psi^{(h)}$ модели, подстановок следующего вида $(\exists x_j\neq 0)(x_1x_2x_3 \ldots x_h \Rightarrow 0000 \ldots 0)$**.** Следовательно, отображение $\Psi^{(h)}$**:** $A^h \Rightarrow A^h$ не будет *взаимно однозначным* и ***ОСнР*-**модель должна обладать неконструируемостью ***НКФ*-**типа, т.е. обладать наиболее общим (*универсальным*) типом неконструируемости в ***ОС*-**моделях. При этом, наличие в ***ОСнР*-**модели конфигураций ***НКФ-1*** с необходимостью влечет за собой и наличие в ней ***НКФ*,** т.е. это является достаточным условием существования в ***ОСнР*-**модели неконструируемости ***НКФ*-**типа. С другой стороны, отсутствие для ***ОСнР*-**модели *неконструируемости* ***НКФ*-**типа влечет за собой также замкнутость множества ***C(A,d,∞)*** относительно глобального $\tau^{(h)}$**-**преобразования модели, а значит, и отсутствие для нее ***НКФ-1*.** Тогда как для случая классических ***ОС*-**моделей данные утверждения в общем случае не имеют силы. Более того, несложно убедиться, что: ***Проблема замкнутости множества C(A,d,∞) (d≥1) относительно глобального*** $\tau^{(h)}$***-преобразования модели d-ОСнР является алгоритмически разрешимой, тогда как множество НКФ для модели d-ОСнР рекурсивно*.** Следовательно, для ***ОСнР*-**модели невозможно существование ***НКФ-1*** без ***НКФ*.**

Тогда как для классической ***ОС*-**модели типы *неконструируемости* ***НКФ, НКФ-1*** *не эквивалентны*, и при отсутствии в ней ***НКФ ОС*-**модель может обладать ***НКФ-1*.** При этом, в качестве критерия наличия в классической ***ОС*-**модели ***НКФ-1*** при отсутствии в ней ***НКФ*** является незамкнутость множества ***C(A,d,∞)*** относительно глобального $\tau^{(n)}$**-**преобразования ***ОС*-**модели (теорема ***29*).** В стиле нестандартного анализа полностью нулевая ***КФ*** **(□-*КФ*)** однородного Z^d**-**пространства ***ОС*** относится нами для удобства формулировок и анализа к множеству ***C(A,d,ϕ)*** всех конечных ***КФ*.**

Как уже отмечалось, проблема существования *неконструируемости* ***НКФ*-**типа для общего случая классических ***d-ОС (d ≥ 2)*** алгоритмически *неразрешима* (теорема ***38*).** Тогда как в классе структур ***d-ОСнР (d≥1)*** данная проблема алгоритмически разрешима и конструктивный разрешающий ее алгоритм сводится к установлению *наличия*/*отсутствия* взаимной однозначности отображения $\Psi^{(h)}$**:** $A^h \Rightarrow A^h$**.** Критерием отсутствия ***НКФ*** для ***ОСнР*-**модели является взаимная однозначность локального отображения $\Psi^{(h)}$**:** $A^h \Rightarrow A^h$, определяемого ***ЛБФ*** модели. При этом, собственно сама неконструируемость определяется сразу же на **(*mxmx...xm*)-**блоках единичных автоматов модели и множество всех ***НКФ*** для произвольной ***ОСнР*-**модели *рекурсивно*. Из вышесказанного следует, что базируясь на одном и том же определении неконструируемости ***НКФ*-**типа получаем, что ее причинно-следственные основы для классических ***ОС*-**моделей и ***ОСнР*-**моделей *принципиально* различны**.** Данное отличие лежит в основе серьезных различий целого ряда фундаментальных динамических свойств классических ***ОС-***моделей и ***ОСнР-***моделей и обусловливает *существенно* большую востребованность вторых для задач моделировани процессов, явлений и феноменов, требующих наличия свойства обратимости их динамики [5,88,536].

Вместе с тем, принцип *блочного разбиения* однородного ***Z^d^***-пространства ***ОСнР-***модели, который на каждом шаге ***t*** модели допускает оперировать только с локально независимыми ***m-***блоками, позволяет в целом ряде случаев существенно проще исследовать ее динамические аспекты. Это в сочетании с возможностью симулирования произвольных классических ***d-ОС*** моделями ***d-ОСнР*** позволяет, в свою очередь, существенно упрощать исследование ряда динамических аспектов первых. В качестве простого примера приведем симулирование классической $OC=<Z^2,A,\tau^{(3)},Xn>$ с простейшим индексом соседства $Xn=\{(0,0),\ (1,0),\ (0,1)\}$ посредством $OCнP=<Z^2,A^*,2,\Psi^{(3)},\Xi>$, для которой $A^* = A \bigcup \left\{ \left\langle \begin{matrix} \hat{s} \\ s \end{matrix} \right\rangle \right\} (s, \hat{s} \in A)$, ***(2x2)-***блок разбиения ***Z^2^***-пространства полностью совпадает с ***ШС*** симулируемой ***2-ОС, ЛБФ*** симулирующей структуры определяется параллельными блочными подстановками следующего простого вида, а именно:

локальная блочная функция $\Psi^{(3)}$: ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$:



(k = 0 .. 2), тогда как Ξ-правило переразметки ***Z^2^***-пространства структуры состоит в циклическом чередовании координат ***j-***точки $\{(0,0) \Rightarrow (1,0) \Rightarrow (1,-1) \Rightarrow (0,0)\}$, т.е. на один элементарный автомат вправо вдоль ***X-***оси, затем на один автомат вниз вдоль ***Y-***оси, затем вновь в исходную ***(0,0)-***точку**.** При сделанных предположениях нетрудно убедиться (*оставляем это читателю в качестве веcьма полезного упражнения*), что исходная классическая структура ***2-ОС 3-***моделируется определенной выше ***2-ОСнР.*** Обобщение этой принципиальной схемы на общий ***d-***мерный случай позволяет сформулировать следующий полезный во многих отношениях результат, а именно:

Произвольная классическая структура $OC=<Z^d,A,\tau^{(d+1)},Xn>$ ***с простейшим индексом соседства (d+1)-моделируется структурой*** $OCнP=<Z^d,A^*,2,\Psi^{(d+1)},\Xi>$ ***на разбиении (с индексом соседства Марголуса), чей блок разметки Z^d^-пространства идентичен шаблону соседства моделируемой структуры и*** $\#A^* = a^*(a+1)$.

Хорошо известно**,** что с переходом от размерности ***d = 1*** к размерности ***d = 2*** весьма существенно усложняется исследование многих вопросов динамики *классических* структур ***d-ОС,*** а целый ряд алгоритмически разрешимых проблем для одномерного случая в общем случае ***d-***мерном ***(d ≥ 2)*** оказываются алгоритмически неразрешимыми. В частности, в [158] доказана алгоритмическая неразрешимость проблемы замкнутости множества всех конечных ***КФ,*** отличных от □***-КФ*** и ряд других проблем *динамики* классических ***d-ОС*** для случая ***d≥2.*** В работах [1,3-5,8,9,54-56,90,131,147, 160,184-187,232,240,241,277,306] представлен ряд интересных результатов и по алгоритмической *неразрешимости* проблем динамики *классических* ***ОС-***моделей**.** Именно поэтому очень *актуальной* является проблема понижения сложности исследования динамики многомерных классических ***ОС-***моделей. Ниже на основе моделирования предлагается один из таких подходов.

При моделировании *классических* ***d-ОС*** посредством структур ***d-ОСнР*** вторые наследуют целый ряд важных свойств первых, что позволяет в целях упрощения исследования классических ***ОС-***моделей использовать следующий редукционный подход:

исходная d-ОС $\Rightarrow$ ***d-ОС с простейшим индексом соседства*** $\Rightarrow$ ***d-ОСнР***

с последующей *экстраполяцией* полученных результатов исследования такой структуры ***d-ОСнР*** на исходные классические структуры ***d-ОС (d≥1).*** Однако этот подход предполагает проведение дополнительного анализа на предмет наследования моделирующей структурой исследуемого феномена моделируемой**.** Проведение данного анализа требуется в каждом конкретном случае. Например, моделируя классическую ***ОС=<Z^1,A,$\tau^{(2)}$,Xn>,*** чья ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками следующего простого вида:

$$00 \Rightarrow 0 \quad 01 \Rightarrow 1 \quad 02 \Rightarrow 1 \quad 10 \Rightarrow 2 \quad 11 \Rightarrow 0 \quad 12 \Rightarrow 2 \quad 20 \Rightarrow 2 \quad 21 \Rightarrow 1 \quad 22 \Rightarrow 0$$

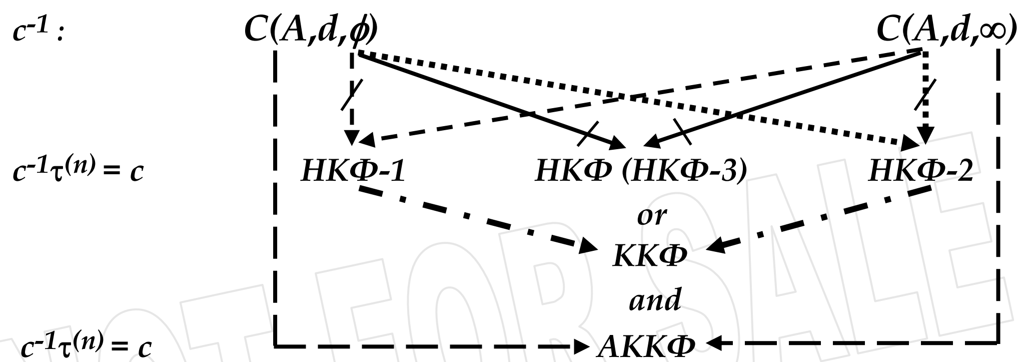
посредством ***ОСнР=<Z^1,A*,2,$\Psi^{(2)}$,Ξ>, ЛБФ*** $\Psi^{(2)}$ которой определяется *блочными* параллельными подстановками следующего общего вида, а именно:

$$\boxed{x_k x_{k+1} \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} \hat{x}_k \\ x_k \end{matrix} \right\rangle x_{k+1}\,; \quad x_k \left\langle \begin{matrix} \hat{x}_{k+1} \\ x_{k+1} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \hat{x}_k \hat{x}_{k+1}\,; \quad x_j, \hat{x}_j \in A \quad (j = \{k, k+1\},\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)}$$

нетрудно убедиться **(***предоставляем это читателю***)**, что отображение $\Psi^{(2)}$***:*** $A^{*2} \Rightarrow A^{*2}$ не является взаимно однозначным. Следовательно, моделирующая ***ОСнР***-структура как и моделируемая ею ***1-ОС*** обладает *неконструируемостью* ***НКФ***-типа **(***моделируемая структура обладает парами* ***ВСКФ*** *уже вида* {***010,020***}*, а значит и* ***НКФ*).** Однако**,** если в *моделирующей* структуре ***НКФ*** располагаются уже на **2-**блоках, то **(***как несложно убедиться***)** в *моделируемой* ***1-ОС*** размер ***НКФ*** больше двух. Итак, при наследовании моделирующей ***ОСнР*** свойства неконструируемости в целом, в частности не наследуется размер *минимального* блока, содержащего ***НКФ*** моделируемой структуры. При этом, делая в своих исследованиях акцент именно на неконструируемости ***НКФ–***типа, пока вне рамок рассмотрения оказались *три* других типа неконструируемости ***НКФ-1, НКФ-2*** и ***НКФ-3*** в связи с вопросом моделирования классических структур посредством ***ОСнР,*** и наоборот. Тогда как этот вопрос представляет несомненный интерес и ему следует уделить соответствующее внимание.

При этом, в общем случае не существует способа взаимного моделирования классических ***d-ОС*** и ***d-ОСнР,*** сохраняющего свойство неконструируемости инвариантным. Под ***инвариантностью*** свойства ***G*** будем понимать соотношение, когда ***G***-свойство *моделируемой* структуры наследуется *моделирующей*, и наоборот. Исходя из сказанного предположим, что неконструируемость типов ***НКФ*** *инвариантна* относительно взаимного моделирования классической ***d-ОС*** и ***d-ОСнР (d ≥ 2).*** Однако ввиду алгоритмической разрешимости проблемы существования неконструируемости типа ***НКФ*** в ***d-ОСнР,*** разрешимой должна быть и аналогичная проблема для классических ***d-ОС (d ≥ 2),*** что противоречит теореме ***38.*** Итак**:** ***В общем случае свойство неконструируемости типа НКФ относительно взаимного моделирования структур d-ОС и d-ОСнР не инвариантно.*** При этом**,** вполне допустимо моделирование *необратимой* структуры *обратимой***.** В частности, данный подход позволяет существенно упростить доказательство разрешимости проблемы замкнутости множества ***C(A,d,∞)*** относительно глобального $\tau^{(n)}$**-**отображения *классической* ***1-ОС,*** а также ряда алгоритмических проблем динамики классических ***d-ОС (d ≥ 2)*** [88,260,536].

Конструируемой КФ (ККФ) c∈C(A,d,ϕ) в классической ***d-ОС (d≥1)*** называется ***КФ,*** которая имеет предшественников c^{-1} из множеств ***C(A,d,ϕ)*** или ***C(A,d,∞)***, т.е. $c^{-1}\tau^{(n)}=c$***.*** Очевидно, *конструируемая* ***КФ c**** не может быть ***НКФ (НКФ-3),*** но она может быть ***НКФ-1*** либо ***НКФ-2.*** Определим теперь ***абсолютно конструируемой*** конфигурацией **(*АККФ*)** в классической ***d-ОС (d≥1) КФ c∈C(A,d,ϕ),*** имеющую предшественников как из множества ***C(A,d,ϕ),*** так и из множества ***C(A,d,∞).*** Очевидно, что в случае ***абсолютной*** конструируемости ***КФ c**** также не может быть ***НКФ (НКФ-3),*** однако она не может быть также и ***НКФ-1*** либо ***НКФ-2.*** Нижеследующая диаграмма довольно наглядно иллюстрирует взаимосвязь всех типов ***неконструируемости*** **(*НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3*)** и ***конструируемости*** **(*ККФ, АККФ*)** в классических ***d-ОС (d ≥ 1).***



Предположим, что каждая ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ в классической ***d-ОС*** ($d \geq 1$) абсолютно конструируема, т.е. имеет *предшественников* как из множества $C(A,d,\phi)$, так и из множества $C(A,d,\infty)$. Естественно, при сделанном предположении ***d-ОС*** не должна обладать неконструируемостью ***НКФ-***типа, т.к. все конечные ***КФ*** для нее будут конструируемыми. С другой стороны, согласно предположения и определения ***АККФ*** для классической ***d-ОС*** должны существовать ***КФ*** $c \in C(A,d,\infty)$, для которых верно следующее соотношение $c\tau^{(n)}=c \in C(A,d,\phi)$, таким образом множество $C(A,d,\infty)$ незамкнуто относительно отображения $\tau^{(n)}$ (***ГФП*** *структуры*). Но тогда на основе теоремы **29** следует, что ***d-ОС*** должна обладать *неконструируемостью* типа ***НКФ-1***, что противоречит предположению, что все конечные конфигурации являются для структуры абсолютно конструируемыми.

<u>Предложение 13</u>. Для классической d-ОС (d≥1) множество C(A,d,ϕ) не может содержать только абсолютно конструируемые конфигурации или конфигурации типа НКФ-1, но C(A,d,ϕ) может содержать только конструируемые конфигурации, например, типа НКФ-2.

Таким образом, предложение ***13*** утверждает невозможность совпадения множества $C(A,d,\phi)$ всех конечных конфигураций произвольной ***d–ОС*** с множеством ***абсолютно*** конструируемых ***КФ.***

Рассмотрим классическую бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$ и ***ЛФП*** вида:

$$000 \to 0 \qquad 010 \to 1 \qquad 100 \to 0 \qquad 110 \to 0$$
$$001 \to 1 \qquad 011 \to 1 \qquad 101 \to 1 \qquad 111 \to 0$$

В данном контексте возникает весьма интересный вопрос о максимальном множестве *абсолютно конструируемых* конечных ***КФ.*** Рассмотрим данный вопрос несколько детальнее. Предположим, что ***КФ*** $c \in C(B,1,\phi)$ имеет предшественника c^{-1} только из того же самого множества $c \in C(B,1,\phi)$, т.е. является ***НКФ-2.*** Покажем, что в этом случае ***КФ c*** будет иметь предшественника c^{-1} также и из множества $C(B,1,\infty)$, о чем достаточно наглядно свидетельствует нижеследующая конструкция, а именно:

c^{-1}:	□	1	x_1	x_2	x_3	...	x_n	$\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$	1	0	0	0	...
c_∞^{-1}:	□	1	x_1	x_2	x_3	...	x_n	$\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$	1	1	1	1	...
$c^{-1}\tau^{(3)} = c_\infty^{-1}\tau^{(3)} = c$	...	x'_o	x'_1	x'_2	x'_3	...	x'_n	$\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$	0	0	0	0	...

Из приведенной конструкции с очевидностью следует, что *конструируемая* в определенной ***1-ОС КФ*** $c \in C(B,1,\phi)$, имеющая предшественника $c^{-1} \in C(B,1,\phi)$, будет наряду с ним обязательно иметь и предшественника $c_\infty^{-1} \in C(B,1,\infty)$, т.е. будет абсолютно конструируемой. Для последующего нам понадобится тот факт, что наша ***1-ОС*** обладает *неконструируемостью* ***НКФ-***типа. Действительно, для структуры существуют пары ***ВСКФ*** уже с ***ВБ*** размера ***1*** и неконструируемые ***КФ*** типа ***НКФ*** и ***НКФ-3*** в одном лице, а именно:

ВСКФ

$\tau^{(3)}$:

0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0		

c^{-1}:

–	0	1	1	1
–	0	1	1	0
–	0	1	0	0
–	–	0	0	0
0	1	0		

НКФ (НКФ-3)

Таким образом, структура имеет пару ***ВСКФ <01|0|00>, <01|1|00>*** и ***НКФ (НКФ-3)*** вида ***<010> (□1□).*** Интересна данная ***1-ОС*** и тем, что минимальный размер ***НКФ*** в ней равен размеру ***ШС***, т.е. ***3***. Исходя теперь из того факта, что блочная ***КФ*** c_b***=<010>*** является неконструируемой типа ***НКФ***, любая конструируемая ***КФ*** $c \in C(B,1,\phi)$ будет иметь нижеследующий вид, определяющий вид допустимых для нее предшественников c^{-1} слева и справа, а именно:

	...	...	0	0	0	...	...	...	...						
	...	...	0	0	0	1	1	...	...	...	...	...	0	0	0
	...	...	1	0	0	1	1	...	...	1	0	1	1	1	...
	...	...	1	1	0	1	1	...	...	0	0	1	1	1	...
c^{-1}:	...	...	0	0	0	1	0	...	...	1	0	1	1	0	...
	...	...	1	0	0	1	0	...	...	0	0	1	1	0	...
	...	...	1	1	0	1	0	...	...	1	0	1	0	0	...
	–	–	–	0	1	0	1	...	...	0	0	1	0	0	...
	–	–	–	–	0	0	1	...	...	–	–	0	0	0	...
$c^{-1}\tau^{(3)} = c$	...	0	0	1	1	x_1	x_2	...	x_n	1	1	0	0	...	...

$$x_j \in B = \{0,1\},\ j=1\ ..\ n$$

Из представленной схемы несложно убедиться, что при вычислении предшественника c^{-1} для произвольной конструируемой ***КФ*** $c \in C(B,1,\phi)$ среди них обязательно будут ***КФ*** и из множества $C(A,d,\phi) \cup C(B,1,\infty)$. При этом, если для нее имеется *предшественник* из множества $C(A,d,\phi)$, то как показано выше на его основе можно легко получить и предшественника из множества $C(B,1,\infty)$. Если же имеется предшественник c^{-1} из множества $C(B,1,\infty)$, то из схемы нетрудно убедиться, что на его базе легко получить для ***КФ*** и предшественника, для чего достаточно заменить состояния автоматов затененных блоков на состояния ***<00>.***

<u>Предложение 14</u>. Для каждой классической d-ОС (d ≥ 1) имеет место одно из трех отношений, а именно: ККФ⊆C(A,d,ϕ), ККФ≡АККФ, АККФ⊂C(A,d,ϕ); ККФ и АККФ – множества всех конечных конструируемых и абсолютно конструируемых конфигураций соответственно; вместе с тем имеет место (∃d-ОС)(C(A,d,ϕ) ≡ НКФ-2) & (∀d-ОС) (C(A,d,ϕ) ⊃ НКФ-1 & C(A,d,ϕ) ⊃ АККФ).

Таким образом, с одной стороны, для *классической* ***d-ОС (d≥1)*** множество конфигураций $C(A,d,\phi)$ не может состоять только из *абсолютно* конструируемых конфигураций, между тем как с другой стороны, существуют классические ***d-ОС (d≥1)***, для которых все конструируемые конфигурации множества $C(A,d,\phi)$ являются также и *абсолютно* конструируемыми. Итак, понятие ***классичности ОС***-моделей позволяет естественным образом *дифференцировать* не только *неконструируемость*, но и также и *конструируемость* конечных конфигураций. И в этом также одна из существенных особенностей классических ***ОС***-моделей.

Здесь, пожалуй, будет вполне уместным сделать несколько замечаний *общего* характера, которые относятся к проблеме ***обратимости*** в целом, которая, в свою очередь, тесно связана с проблемой *неконструируемости*. Так, на формальном уровне проблема *обратимости* произвольной функции ***F*** от ***n*** переменных $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ сводится к вопросу возможности *однозначного* восстановления для нее кортежа $<x_1,x_2,...,x_n>$, по известным виду функции F и ее значению $F(x_1,x_2, ..., x_n)$ на искомом кортеже. Естественно, на n входах и $(n-k)$ $\{k=1..n-1\}$ выходах некоторого алгоритма при условии, что они принадлежат одному и тому же конечному алфавиту, добиться этого типа обратимости невозможно. Поэтому, кроме результата $F(x_1,x_2,...,x_n)$ мы должны иметь $(n-1)$ значений кортежа $<x_1,x_2,...,x_n>$ для *восстановления недостающего* значения x_j; $j\in\{1,2,...,n\}$, т.е. мы должны располагать некоторой дополнительной информацией, позволяющей по виду F–функции и ее значению на кортеже восстанавливать весь исходный кортеж. В принципе, может быть использоваи и другой подход к организации такой *дополнительной* информации. Следующая схема довольно наглядно иллюстрирует вышесказанное.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x_1, \\ x_2, \\ ..., \\ x_n \end{bmatrix}}^{t=0} \Bigg| \;\to\; \overbrace{\underbrace{\underbrace{F\left(\begin{bmatrix} x_1, \\ x_2, \\ ..., \\ x_n \end{bmatrix}\right)}_{irreversibility\hookleftarrow} \;,\; \bigcup\{x_{k_j} \mid j=1..n-1\};\, k_j\in\{1,2,...,n\}}_{reversibility\hookleftarrow}}^{t=1}$$

В качестве конкретного примера рассмотрим логическую функцию ***a XOR b***, определяемую как

a	*b*	*a XOR b*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Очевидно, данная функция необратима, ибо значение, например, «*1*» можно получить на двух различных кортежах **<0,1>** и **<1,0>**. Однако, если на выходе мы дополнительно задаем и одно из значений, например, «***a***», то получаем следующие соотношения между входами и выходами:

a b		*a r*		*a b*		*a r*		*a b*		*a r*		*a b*		*a r*
0 0	→	0 0		0 1	→	0 1		1 0	→	1 1		1 1	→	1 0

где ***a*** и ***r*** – значения ***a***-входа и результата ***a XOR b*** соответственно. Из приведенных соотношений очевидно взаимно–однозначное соответствие между двумя входами и двумя выходами, которое обеспечивает возможность однозначного восстановления ***b***–входа, как ***a XOR r***. Булева функция с ***n*** выходами и ***n*** входами называется ***обратимой***, если она отображает каждый входной кортеж значений в уникальный выходной кортеж. С учетом сказанного, несложно заметить, что ни одна из стандартных логических функций (*кроме унарной функции* ***NOT***) не является *обратимой*; т.е. по ее результату не определяется однозначно кортеж переменных. Между тем, несложно убедиться, что для данного типа функций обратимость можно обеспечить сочетанием результата и одного из входов. Таким образом, в качестве вполне естественного условия получения обратимости для системы является обеспечение равного количества входов и выходов. Добиться этого требования можно различными способами и в настоящее время, в частности, предложено довольно большое количество разнообразных обратимых вентилей. Из наиболее широко используемых обратимых вентилей можно отметить такие, как ***NOT***, ***CNOT***, ***SWAP***, *Тоффоли* и *Фредкина*. Детальнее с ними и другими интересными подходами к обеспечению ***обратимости*** можно ознакомиться в [536].

При этом, для класса структур ***d–ОС (d ≥ 1) обратимость*** их динамики совершенно естественно определить наличием для каждой конфигурации $c^*\in C(A,d)$ единственного предшественника c^{-1} из объединенного множества $C(A,d,\phi)\cup C(A,d,\infty)$ конфигураций, т.е. имеет место соотношение:

$$(\forall c^* \in C(A,d))(E!\, c^{-1}\in C(A,d,\phi)\bigcup C(A,d,\infty))(c^{-1}\tau^{(n)} = c^*)$$

Тогда как ***необратимость*** динамики структур ***d–ОС (d ≥ 1)*** естественно можно определить либо отсутствием по меньшей мере для одной конфигурации $c^{**} \in C(A,d)$ предшественников вообще, либо наличием более одного предшественника c^{-1} из объединенного множества конфигураций $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$. Между тем, для случая классических ***d–ОС (d ≥ 1)*** необратимость может быть как ***абсолютной***, так и ***относительной***. *Абсолютная* необратимость для случая *классических* ***d–ОС (d ≥ 1)*** имеет место, если для структуры существуют конфигурации $c^* \in C(A,d)$, которые обладают несколькими предшественниками c^{-1} из множества $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$ конфигураций или и вовсе не имеют предшественников. Очевидно, если ***d–ОС (d ≥ 1)*** обладает неконструируемостью типа ***НКФ***, то она *абсолютно необратима*. Действительно, в этом случае *любая* конфигурация $c^* \in C(A,d)$, содержащая в качестве подконфигурации ***НКФ***, не будет иметь предшественника $c^{-1} \in C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$. Совершенно иначе обстоит дело в случае *отсутствия* неконструируемости ***НКФ–***типа для классических ***d–ОС (d ≥ 1)***. Для данного типа классических структур относительно конечных конфигураций выступает введенный нами тип неконструируемости ***НКФ–1***, характеризуемый наличием конечных конфигураций, имеющих предшественников только из множества $C(A,d,\infty)$. В процессе исследования такого типа неконструируемости был выявлен интересный класс ***d–ОС (d ≥ 1)***, для которых имеет место следующее интересное предложение [88,90], а именно:

Существуют классические d-ОС (d ≥ 1), не обладающие неконструируемостью НКФ-типа, и для которых каждая конфигурация c*∈C(A,d,ϕ) имеет предшественников из множества C(A,d,∞), но не каждая такая конфигурация имеет предшественника из множества C(A,d,ϕ).

Схематично данного типа *необратимость* динамики классической структуры ***d–ОС (d ≥ 1)*** можно представить относительно некоторой конфигурации $c^* \in C(A,d,\phi)$ следующим образом, а именно:

$$\tau^{(n)}: \quad \begin{tikzcd} C(A,d,\phi) \arrow[dr, "c^{-1}\ /\!/"'] & & C(A,d,\infty) \arrow[dl, "c^{-1}"] \\ & (\exists c^* \in C(A,d,\phi))\ \&\ (\forall c^* \in C(A,d,\phi)) & \end{tikzcd}$$

В качестве примера этого типа можно привести бинарную ***1–ОС*** с индексом соседства $Xn=\{0,1\}$ и ***ЛФП*** вида $\sigma^{(2)}(x,y) = x \oplus y = x+y \ (mod\ 2);\ x,y \in \{0,1\}$. Несложно убедиться, что для такой простейшей структуры каждая конечная конфигурация вида $c^* = \square 1 x_2 \dots x_{n-1} 1 \square$ имеет по крайней мере одного предшественника из множества $C(A,d,\infty)$. С другой стороны, имеются конечные конфигурации, которые имеют по паре различных предшественников из множества $C(A,d,\infty)$, не имея конечных предшественников, например, для примитивной конфигурации $c_p = \square 1 \square = \tau^{(2)}(1^\infty \square) = \tau^{(2)}(\square 1^\infty)$. Но с другой стороны, для простой конфигурации $c_2 = \square 11 \square = \tau^{(2)}(\square 1 \square) = \tau^{(2)}(1^\infty 0 1^\infty)$ имеет место наличие пары предшественников из множества $C(A,1,\phi) \cup C(A,1,\infty)$. Более того, можно показать [88,90], что имеет место следующее достаточно интересное предложение, а именно:

Существуют классические d–ОС, не обладающие неконструируемостью типов НКФ и НКФ–1, для которых существуют конфигурации c[∞]∈C(A,d,∞), имеющие не мере двух предшественников из множества C(A,d,∞) (d ≥ 1).

Примером такого типа является ***1–ОС*** с $A=\{0,1,2\}$, ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ которой определяется подстановками

$$00 \to 0 \qquad 01 \to 1 \qquad 02 \to 2 \qquad 10 \to 0 \qquad 11 \to 2 \qquad 12 \to 1 \qquad 20 \to 0 \qquad 21 \to 1 \qquad 22 \to 2$$

Эта структура не обладает ***НКФ*** и ***НКФ–1***, однако для нее конфигурация $c^\infty = 2^\infty = \tau^{(2)}(2^\infty) = \tau^{(2)}(1^\infty)$ имеет пару предшественников $\{1^\infty, 2^\infty\}$ из множества $C(A,1) = C(A,1,\phi) \cup C(A,1,\infty)$.

Таким образом, сказанное естественным образом обусловливает целесообразность введения для *классических* ***d–ОС (d ≥ 1)*** понятия ***относительной обратимости (необратимости)*** их динамики.

Глава 3.
Экстремальные конструктивные возможности классических однородных структур

В разделе ***1.1*** *(пункты **9-11**)* мы привели пример моделирования произвольной машины *Тьюринга* ***(МТ)*** посредством классической ***1-ОС***, что доказывает наличие для ***1-ОС*** свойства ***универсальной вычислимости***, т.е. возможности вычислять любую рекурсивную функцию либо реализовывать любой алгоритм вычислений, либо обработки информации. Однако данная универсальность в общем случае требует использования ряда *дополнительных* состояний для единичного автомата структуры. А именно, для вычисления некоторой функции (*порождения конечной конфигурации*), определенной в *конечном* ***А***-алфавите, ***ОС***-модель может потребовать использования некоторого расширения ***А***-алфавита ее единичными автоматами, например, только на один символ. Ниже будет показано, что такое минимальное расширение достаточно для обеспечения возможности вычисления ***ОС***-моделью любой рекурсивной функции, включая и генерацию любой конечной конфигурации из заданной начальной.

Аналогичная ситуация имеет место для ***МТ***, вычисляющих функции, определенные в алфавите символов их выходных лент, но при этом использующих опосредствованное расширение в виде алфавита внутренних состояний конечного автомата – *управляющего устройства* ***МТ*** (рис. ***6***). По-видимому, данное свойство присуще любой достаточно сложной системе – в рамках внутренней аксиоматики системы невозможно решение всех присущих ей задач; для возможности решения *нерешаемых* задач требуется расширение аксиоматики системы (*в частности, состояний системы*). Формально данный постулат имеет строгие доказательства для ряда математических теорий.

Аксиоматика ***ОС***-модели определяется ее основными параметрами, а именно: размерностью ***(d)*** однородного ***Z***-пространства; алфавитом ***(A)*** внутренних состояний единичного ***z***-автомата, а также индексом соседства ***(X)*** и локальной функцией перехода $\{\sigma^{(n)}\}$. Именно в рамках данной базовой аксиоматики представляет особый интерес вопрос конструктивных возможностей ***ОС***-моделей. А именно: ***Насколько мощными оказываются возможности ОС-моделей (в рамках их базовой аксиоматики) по генерации ими конечных конфигураций?*** Между тем, на сегодня мы не располагаем вполне однозначным понятием генерационных возможностей ***ОС***-моделей, и оно в значительной мере носит субъективный характер [1,3-5,8,9]. Исходя из своих вкусов и интересов, целый ряд исследователей по-разному определяют *максимальные* генерационные (*динамические*) возможности ***ОС***-моделей в рамках их базовой аксиоматики. В противоположность, в частности, неконструируемости большой интерес представляет определение общих свойств, отражающих максимальные конструктивные возможности классических ***ОС***-моделей по генерации ими ***КФ***. В данном отношении мы рассмотрим два наиболее известных подхода: на основе *универсальных* и *самовоспроизводящихся* конечных конфигураций [1,3-5,8,9,54-56,88,90,536].

3.1. Универсальные конечные конфигурации в классических ОС-моделях

В известной монографии [220] ***С. Улам*** сформулировал интересную проблему о существовании простой *универсальной* матричной системы. Положительное решение ее дало бы пример простой воспроизводящейся формальной системы, которую можно было бы вполне эффективно изучать хорошо известными математическими методами. В связи с этой проблемой введем необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем.

***Определение 13.** Матрицу $U(n,a)$ порядка n с элементами из множества $A=\{0,1,2,3, ..., a-1\}$ будем называть универсальной для класса всех матриц порядка $m < n$, если для любой матрицы $B(k, a)$ $(k \le m)$ существует целое число $p > 0$ такое, что матрица B будет являться главным минором матрицы $U^p(n, a)$.*

В терминах данного определения вопрос существования ***универсальной*** самовоспроизводящейся матричной системы решает следующая основная теорема [5,16,88].

***Теорема 53.** Существует такое целое $n_o > 0$, что для любых целых $n \ge n_o$ и $a \ge 2$ универсальные матрицы $U(n, a)$ отсутствуют.*

Из результата теоремы следует, что не существует *универсальных* воспроизводящихся матричных систем достаточно высокого порядка. Для бесконечных же матриц данный вопрос пока остается открытым, т.е. в первоначальной постановке ***С. Улама*** проблема существования универсальной воспроизводящейся матричной системы еще ждет своего решения. Остается также открытым и целый ряд вопросов существования подобных матричных систем над полем ***A***. Работы в данном направлении представят, помимо вышеупомянутого прикладного, значительный интерес и для теории *бесконечных* матриц (*в первую очередь, используемым аппаратом*), которая разработана пока относительно слабо.

В качестве распространения проблемы существования *универсальных матричных* систем также на случай *классических* ***ОС***-моделей является проблема *универсальных конфигураций*, которая весьма тесно связана с проблемой ***полноты Х. Ямада – С. Аморозо*** для случая полигенных ***ОС***-моделей [5,73,244,245,248,256]. Данная проблема сводится к весьма интересному вопросу: ***Существует ли конечное множество конфигураций $c_k \in C(A,d,\phi)$ таких, что посредством ГФП $\tau^{(n)}$ классической ОС-модели можно сгенерировать из них множество $C(A,d,\phi)$ всех конечных конфигураций, т.е. может ли выполняться следующее определяющее соотношение: $\cup_k \langle c_k \rangle[\tau^{(n)}] = C(A,d,\phi)$ $(k=1..p)$?*** Конфигурации c_k, которые удовлетворяют данным условиям, будем называть ***универсальными конечными конфигурациями (УКФ).***

В качестве интересного прикладного аспекта данной проблемы можно указать, в частности, на использование классических ***d-ОС*** для моделирования логических дедуктивных систем в чистой математике. В этом случае ***КФ*** из множества ***$C(A,d,\phi)$*** ассоциируются с *предложениями логического* исчисления, начальные ***КФ*** структуры – с *аксиомами* и ***ГФП*** – с *правилами вывода* системы. Тогда последовательность ***ГФП***, примененная к *начальной* конфигурации (*аксиоме*), представляет собой доказательство (*вывод*) в данной дедуктивной модели. Основными в данных системах являются проблемы полноты и выводимости. Обе эти проблемы непосредственно связаны с проблемами существования для классических ***ОС***-моделей соответственно ***УКФ*** и ***НКФ***. В качестве второго прикладного аспекта проблемы существования ***УКФ*** можно указать на применение *классических* ***d-ОС*** для моделирования развивающихся систем *клеточной* природы. Для случая конечных ***ОС***-моделей проблема существования ***УКФ*** имеет положительное решение, а именно: ***Существуют конечные d-ОС $(d \ge 1)$, имеющие одну либо все конфигурации универсальными.*** При этом, целый ряд примеров таких структур можно найти в монографии [1]. Совершенно иная картина имеет место в случае рассмотрения бесконечных классических ***ОС***-моделей [5,88,90].

***Определение 14.** Набор конфигураций $c_k \in C(A,d,\phi)$ образуют для ГФП $\tau^{(n)}$ в классической d-ОС $(d \ge 1)$ множество УКФ, если $\cup_k \langle c_k \rangle[\tau^{(n)}] = C(A,d,\phi)$ $(k=1 .. p)$.*

В ряде источников достаточно активно дебатировался вопрос о так называемых «*минимальных*» ***d-ОС*** $(d \ge 1)$ (*например, в англоязычной литературе с подачи* ***С. Вольфрама*** *в книге* [407]), в которых, начиная с некоторой конечной конфигурации c^*, возможно последовательно сгенерировать все множество конечных конфигураций, т.е. для данных структур должно выполняться следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\exists c_o \in C(A,d,\phi))\left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\left\{c_j\tau^{(k)j}\right\} = C(A,d,\phi)\right) \qquad (\lambda)$$

Прежде всего, на наш взгляд, сам термин «*минимальный*» недостаточно корректно отражает суть вопроса, т.к. относится, прежде всего, к сложности собственно **ОС**-модели, которая, как правило, определяется размерностью, индексом соседства (*размером шаблона соседства*), а также *мощностью* алфавита внутренних состояний единичного автомата *модели* **d-ОС=<Z^d,A,$\tau^{(n)}$,X>**, т.е. *величиной* **SL=dxnx#(A)**, где **#(A)** – мощность **A**-алфавита. При этом, было высказано немало соображений о возможностях существования данных структур, приводились даже конкретные примеры такого типа структур, правда, базирующиеся лишь на эмпирических результатах. Рассмотрим данный вопрос несколько детальнее на примере возможности для произвольной *классической* **d-ОС (d≥1)** определяющего соотношения **(λ)**.

Предположим, что для *классической* **d-ОС (d≥1)** существует конфигурация $c_o \in C(A,d,\phi)$ такая, что выполняется соотношение **(λ)**. Естественно, в данном случае эта структура не должна обладать неконструируемостью **НКФ**-типа. Следовательно, конфигурация c_o обязательно должна иметь предшественника, т.е. конфигурацию c^* такую, что $c^*\tau^{(n)}=c_o$. Однако, если $c^* \in C(A,d,\phi)$, то ввиду предположения **(λ)** существовало бы такое целое **t>0**, что выполнялось соотношение $c_o\tau^{(n)t}=c^*$ и генерируемая последовательность $\{c_o\tau^{(n)j} \mid j \ge 0\}$ была бы периодической, что противоречило бы предположению **(λ)**. Следовательно, **КФ** $c_o \in C(A,d,\phi)$ может иметь *предшественника* c^∞ только из множества $C(A,d,\infty)$ бесконечных конфигураций, т.е. являться неконструируемой типа **НКФ-1**. Но в этом случае структура будет обладать бесконечным множеством **НКФ-1** [54], т.е. конечных конфигураций, имеющих предшественников только из множества $C(A,d,\infty)$ конфигураций, что также противоречит предположению **(λ)**. Это и доказывает факт отсутствия классических **d-ОС (d ≥ 1)** и конфигураций $c_o \in C(A,d,\phi)$, удовлетворяющих вышеуказанному условию **(λ)**.

Используя результаты по неконструируемости, можно показать [1,5], что данная проблема даже в более общей постановке имеет отрицательное решение для каждой классической **ОС**-модели, о чем свидетельствует следующий основной результат, имеющий целый ряд весьма интересных приложений, наряду с многими теоретическими аспектами [536].

<u>Теорема 54</u>. Для любой классической структуры d-ОС (d≥1) отсутствует конечное множество универсальных конечных конфигураций.

Приведем достаточно простое доказательство настоящей теоремы, базирующееся на известных свойствах *неконструируемости* типов **НКФ** и **НКФ-1** для *классических* структур **d-ОС (d≥1)**. Пусть существует некоторое *конечное* множество $\Re_o$ конфигураций $c_k \in C(A,d,\phi)$ таких, что имеет место следующее определяющее отношение, а именно:

$$\tau^{(n)}:\begin{cases} c_o^1 \to c_1^1 \to c_2^1 \to c_3^1 \to \ldots \to c_j^1 \to \ldots \\ c_o^2 \to c_1^2 \to c_2^2 \to c_3^2 \to \ldots \to c_j^2 \to \ldots \\ ================================== \\ c_o^m \to c_1^m \to c_2^m \to c_3^m \to \ldots \to c_j^m \to \ldots \end{cases} \qquad (\alpha_o)$$

$$\Re_o = \bigcup_{k=1}^{m} < c_o^k > \left[\tau^{(n)}\right] = C(A,d,\phi); \quad (\forall k)(\forall j)(k \ne j \to c_o^k \ne c_o^j)$$

При сделанном предположении очевидно, что данная структура ***d–ОС (d≥1)*** не должна обладать свойством неконструируемости типов как ***НКФ***, так и ***НКФ–1***. В противном случае ***d–ОС*** имела бы бесконечные множества ***НКФ*** и/или ***НКФ–1***, что противоречило бы нашему предположению о *конечности* множества $\Re o$. С учетом же вышесказанного нетрудно убедиться, что не существует конфигурации $c_o \in C(A,d,\phi)$ такой, что имело бы место соотношение $< c_o > \left[\tau^{(n)}\right] = C(A,d,\phi)$, т.к. предшественник $c^{-1}{}_o \in C(A,d,\phi)$ для ***КФ*** c_o должен был бы принадлежать последовательности, т.е. ***КФ*** c_o была бы *периодической*, а $<c_o>[\tau^{(n)}]$ конечной, что противоречит бесконечности множества $C(A,d,\phi)$. **А** так как по предположению множество $\Re o$ конечно, то естественно предположить, что среди всех $\Re o$ можно выбрать «***минимальное***» множество $\Re o$, имеющее минимальную мощность среди всех множеств этого типа; более того, минимальных множеств может быть более одного.

Множество $\Re o$ может содержать чисто циклические ***КФ*** $c^j{}_o$, для которых имеет место следующее соотношение $(\exists t \geq 0)(c^j{}_o \tau^{(n)t} = c^j{}_o)$ $\{j=1..p\}$ наряду с обязательным наличием ***КФ*** $c^k{}_o$, генерирующих бесконечные непериодические последовательности $<c^k{}_o>[\tau^{(n)}]$ конечных ***КФ*** $\{k=p+1..m\}$. Пусть в *минимальном* множестве $\Re o$ имеется p периодических ***КФ*** $c^j{}_o$ $(j=1..p)$ (*подмножество* $\Re p$), а также q *непериодических* ***КФ*** $c^k{}_o$ $(k=p+1..m)$ (*подмножество* $\Re q$, *генерирующее бесконечные последовательности конечных конфигураций*) при выполнении следующего достаточно очевидного соотношения:

$$\bigcup_{j=1}^{p} < c_o^j > \left[\tau^{(n)}\right] \cap \bigcup_{k=p+1}^{m} < c_o^k > \left[\tau^{(n)}\right] = \varnothing$$

Более того, несложно убедиться, что должно иметь место и следующее соотношение, а именно:

$$(\forall k)(\forall j)\left(k \neq j \ \rightarrow \ < c_o^k > \left[\tau^{(n)}\right] \cap < c_o^j > \left[\tau^{(n)}\right] = \varnothing \ \ \& \ \ c_{o,k}^{-1}, c_{o,j}^{-1} \notin \Re_q ; \ \ c_o^k, c_o^j \in \Re_q\right)$$

т.к. в противном случае ***понижаема*** мощность множества $\Re q$, что противоречит предположению. Рассмотрим произвольную ***КФ*** $c^k{}_o \in \Re q$. Согласно вышесказанного для такой ***КФ*** имеется только один предшественник $c^{-1}{}_{o,k} \in C(A,d,\phi)$, который не сможет принадлежать последовательностям, генерируемым ***КФ*** из подмножества $\Re p$ (*иначе последовательность вида* $<c^{-1}{}_{o,k}\tau^{(n)} = c^k{}_o>[\tau^{(n)}]$ *была бы периодической, что противоречит определению подмножества* $\Re q$) и может принадлежать только последовательностям, генерируемым ***КФ*** из подмножества $\Re q$. При этом предположении можно несложно удостовериться, что ***понижаема*** мощность минимального множества $\Re$, либо получить ***периодичность*** для некоторых ***КФ*** из $\Re q$, что вновь приводит к противоречию. Итак, для любой *классической* ***d–ОС*** $(d \geq 1)$ отсутствуют *конечные* множества ***КФ*** $c^k{}_o \in C(A,d,\phi)$, отвечающие условию (αo). Использованный при доказательстве подход, базирующийся на рассмотренных свойствах неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ–1***, может быть полезен и в целом ряде других случаев. При этом, при определенных условиях имеет место даже существенно более сильный результат, выражаемый следующей теоремой, представляющей и самостоятельный интерес [5,54,88,90].

<u>Теорема 55</u>. Если для произвольной классической структуры d–ОС (d ≥ 1), которая не обладает неконструируемостью типа НКФ, существует G–множество конфигураций типа НКФ–1, то для нее не существует конечного множества конфигураций $c_j \in C(A,d,\phi)$, для которых имело бы место следующее определяющее соотношение, а именно:

$$\bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n)}\right] = C(A,d,\phi) \setminus G \qquad (j = 1..p)$$

Доказательство теоремы достаточно прозрачно и может быть найдено в [54-56,88,90]. Из данного результата непосредственно следует, что в ряде случаев *сужение* множества ***КФ*** $C(A,d,\phi)$, которые требуется сгенерировать, до множества только конструируемых конфигураций не приводит к положительному решению проблемы существования ***УКФ*** для классических ***ОС***-моделей. Более того, на основе одного весьма интересного алгебраического подхода с применением результатов по неконструируемости можно доказать существенно более общий и сильный результат [88,90], дающий ответы на ряд вопросов, поставленных в наших предыдущих работах [1,4,5,8,54-56,76], а также составляет довольно существенную часть аппарата исследования динамики классических ***ОС***-моделей. Между тем, существует аналог данного результата и для ***ОСнР***-класса однородных структур на разбиении [8,9].

<u>Теорема 56</u>. Пусть $\tau^{(n)}$ будет произвольная ГФП классической d-ОС в алфавите A (a – простое число), обладающая GSA-множеством НКФ (возможно, и НКФ-3) и/или НКФ-1. Тогда не будет существовать d-мерных конечных множеств КФ $c_j \in C(A,d,\phi)$ и ГФП $\tau^{(n_j)}$ в конечном алфавите $A=\{0,1,2,3, ..., a-1\}$ таких, что выполняются следующие два соотношения, а именно:

$$1)\ \bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n_j)}\right] = C(A,d,\phi) \setminus GSA \quad or \quad 2)\ \bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n_j)}\right] = GSA \quad (d \le 1;\ j = 1..p)$$

При этом, для A-алфавита (a - составное число) имеет место формулировка результата лишь со вторым соотношением; данное утверждение имеет место также в случае простого числа a и неконструируемости типа НКФ-2, т.е. глобальная функция $\tau^{(n)}$ обладает GSA-множеством неконструируемых конфигураций типа НКФ-2.

Наряду с другими [71-73,75,88,90], из данного результата вытекает весьма интересное следствие, а именно: множества ***КФ $C(A,d,\phi)\setminus GSA$*** и ***GSA*** (***GSA*** – *множество* ***НКФ***, *возможно*, ***НКФ-3***, ***НКФ-1*** *либо* ***НКФ-2*** *в случае* ***A***-*алфавита при простом значении* ***a***) не смогут генерироваться посредством конечных множеств $c_j \in C(A,d,\phi)$ и ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$, определенных в том же алфавите, безотносительно к *исходной* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, относительно которой рассматривается *неконструируемость* указанных типов. Более того, из результата теоремы ***56*** следует, что классические ***ОС***-модели не являются конечно аксиоматизируемыми параллельными формальными системами даже при условии исключения из множества $C(A,d,\phi)$ любого подмножества неконструируемых конечных ***КФ***. Таким образом, каждое множество *неконструируемых* ***КФ*** (***НКФ, НКФ-1, НКФ-2, НКФ-3***) относительно ***проблемы полноты*** в классических ***d-ОС*** обладает таким же иммунитетом, как и само множество $C(A,d,\phi)$ всех конечных конфигураций структуры. Этот результат позволяет существенно глубже понять сущность проблемы *неконструируемости* в классических ***ОС***-моделях. При этом оказывается, что неконструируемость каждого из допустимых ***4***-х типов не оказывает сколько-нибудь серьезного влияния на ***максимальные*** конструктивные возможности в контексте наличия для классических ***ОС***-моделей множества ***УКФ***.

Вместе с тем, использование *расширенного* алфавита *классической* ***ОС***-модели позволяет успешно и достаточно просто генерировать только из одной начальной ***КФ*** все множество конечных ***КФ*** $C(A,d,\phi)$. Рассмотрим простой пример классической ***1-ОС*** $<Z^1, A^*, \tau^{(3)}, X>$ при $A=\{0,1,2,3, ..., a-1\}$; $A^*=A\cup\{\#,b,c,d\notin A\}$, $X=\{-1,0,1\}$. *Локальную* функцию перехода $\sigma^{(3)}$, определяющую ***ГФП*** $\tau^{(3)}$, задаем параллельными подстановками (***ПП***) следующего вида, а именно:

$$\boxed{\begin{array}{l} cx\# \Rightarrow b \quad xcy \Rightarrow y \quad cxy \Rightarrow c \quad \#\#d \Rightarrow 1 \quad \#dx \Rightarrow c \quad x,y \in A;\ u,v,w \in A^* \\ xb\# \Rightarrow \begin{cases} b, if\ x+1>0\ (mod\ a) \\ 0, if\ x+1=0\ (mod\ a) \end{cases}; \quad yxb \Rightarrow \begin{cases} x+1, if\ x+1>0\ (mod\ a) \\ d, \quad if\ x+1=0\ (mod\ a) \end{cases} \\ xdy \Rightarrow \begin{cases} c, if\ x+1>0\ (mod\ a) \\ 0, if\ x+1=0\ (mod\ a) \end{cases}; \quad \#xd \equiv yxd \Rightarrow \begin{cases} x+1, if\ x+1>0\ (mod\ a) \\ d, \quad if\ x+1=0\ (mod\ a) \end{cases} \end{array}} \quad (33)$$

Тогда как на остальных кортежах **<*u,v,w*>** выполняется соотношение $\sigma^{(3)}(u,v,w) = v$. Суть самого механизма генерации *всего* множества ***КФ*** $C(A,\phi)$ базируется на применении простого алгоритма сложения по ***(mod a).*** Пусть текущая ***КФ*** в таким образом определенной ***1-ОС*** имеет следующий вид: $C_t = ...\#x_1x_2x_3x_4 \ldots x_mb\#...$ $(x_k \in A;\ k=1..m)$, которая в ***А***-алфавите совпадает с конфигурацией C^*_t = □$x_1x_2x_3x_4 \ldots x_m$□ и трактуется как ***a***-ричное число длиной в ***m*** цифр. На последующем шаге производится сложение числа $x_1x_2x_3x_4 \ldots x_m$ с ***1*** по ***(mod a)***, что обеспечивается наличием только ***3*** дополнительных символов {***b,c,d***}. При этом, собственно один символ ***b*** является инициатором операции сложения, символ ***d*** обеспечивает перенос ***1*** переполнения в старшие разряды числа, а символ ***c*** – возврат к правому концу числа-конфигурации и установку ***b***-символа – инициатора очередного цикла *сложения*. Посредством применения к текущей C_t-конфигурации ***ПП (33)*** уже несложно убедиться, что генерируемые в определенной нами таким образом ***1-ОС*** *конечные* ***КФ*** *(идентитифицируемые* ***b****-символом)* в ***А***-алфавите перечисляют ***все*** множество $C(A,\phi)$ *конечных* ***КФ***, если в качестве начальной выбрана ***КФ*** вида: $c_o=...\#0b\#...$. Как достаточно полезное упражнение читателю рекомендуется провести указанную апробацию функционирования описанной ***1-ОС*** и попытаться решить данную задачу при меньшем числе дополнительных символов, используя, в частности, увеличение ***ШС***, подходящую кодировку *дополнительных* символов, возможно, иной алгоритм генерации конечных конфигураций.

Таким образом, даже *исключение* из множества $C(A,d,\phi)$ *неконструируемых* конфигураций любых типов *(относительно произвольной* ***ГФП****)* оставляет в нем достаточно сложные для генерации даже посредством конечного набора ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ конечные ***КФ***. Это является непосредственным шагом на пути определения понятия ***сложности*** конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях, рассматриваемого ниже. Таким образом, существование конечного множества ***УКФ*** как для отдельной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, так и для их конечного набора $\tau^{(n_j)}$ невозможно, т.е. и в *расширенном* понимании проблема существования ***УКФ*** для классических ***ОС***-моделей имеет отрицательное решение. В расширенном понимании данная проблема непосредственно предшествует проблеме сложности конечных ***КФ***, тогда как в исходной постановке говорит о невозможности генерации посредством ***ГФП*** классической ***ОС***-модели всего множества *конечных* ***КФ*** из любого конечного набора начальных ***КФ***, устанавливая верхний недостижимый предел ее генерационных *(порождающих)* возможностей. В данной связи рассматривается ряд более ослабленных подходов к установлению *максимальных* генерационных возможностей ***ОС***-моделей, среди которых особое место занимает подход на базе ***универсальной воспроизводимости*** конечных конфигураций, представляющий наряду с сугубо теоретическим, определенный прикладной интерес в биологии развития и в ряде задач исследования вопросов *надежности* и *восстановления* в различного рода прикладных ***ОС***-моделях *технического* характера, включая вопросы *самовоспроизведения* роботов [536]. Этот вопрос рассматривается в следующем разделе, здесь же мы рассмотрим проблему наличия для *классических* ***ОС***-моделей *универсальных* конфигураций *(на наш взгляд, как отмечалось выше, не совсем корректно ассоциируемых с понятием «минимальных»* ***ОС****-моделей)* при ослаблении требования к их определению, а именно.

Существуют ли классические d-ОС (d≥1) и начальные КФ со∈С(A,d,ϕ) для них такие, что имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\exists c_o \in C(A,d,\phi))(\forall c^* \in C(A,d,\phi))(\exists t \geq 1)(c^* \subseteq c_o\tau^{(n)t})$$

При таком подходе мы требуем не генерации из начальной ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ последовательности, содержащей все конечные ***КФ***, а только наличия в генерируемых конечных ***КФ*** вхождения ***всех*** конечных блочных конфигураций, что существенно более слабое условие. Несложно убедиться, что при наличии ***d-ОС*** с указанным свойством все конфигурации $c^\wedge \in C(A,d,\phi)$, генерируемые из ***КФ*** c^*, будут *самовоспроизводящимися* в смысле Мура. В то время как для самой структуры будет отсутствовать неконструируемость ***НКФ***-типа ***(НКФ-3)*** при наличии неконструируемости типа ***НКФ-1***. В то же время в данной структуре ***никакая*** конечная ***КФ*** c_o не может иметь каких-либо предшественников из множеств ***C(A,d,ϕ)*** и ***C(A,d,∞)*** одновременно, т.е. каждая конечная ***КФ с^*** в структуре будет ***НКФ-1*** или ***НКФ-2*** [88,90]. Общее решение данной проблемы нам неизвестно, однако ниже приведен ряд соображений в пользу ее положительного решения.

Рассмотрение проведем для класса бинарных классических ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура. В разделе **2.2** такой класс структур рассматривался нами с точки зрения наличия для них неконструируемости типов ***НКФ***, ***НКФ-1*** и ***НКФ-2***. Однако, прежде вполне уместно напомнить одно замечание, носящее конвенционный характер и упоминаемое в разделе ***1.1***. Ради удобства представления бинарных классических ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура нами широко использовался весьма естественный прием, когда ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ данного типа структур определяются параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$
\begin{array}{llll}
000 \to x_1 = 0 & 010 \to x_3 & 100 \to x_5 & 110 \to x_7 \\
001 \to x_2 & 011 \to x_4 & 101 \to x_6 & 111 \to x_8
\end{array}
$$

Пронумеруем теперь такие ***1-ОС*** целыми десятичными числами, соответствующими бинарным представлениям $<x_1x_2 \ldots x_8>$, т.е. от ***0*** до ***255***. На наш взгляд, такой подход наиболее естественен, вместе с тем, в начале ***80-х*** г. с подачи ***С. Вольфрама*** был определен другой принцип нумерации такого типа структур, когда *нумерация* структур базируется на использовании *обратного* порядка параллельных подстановок, определяющих ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$:

$$
\begin{array}{llll}
111 \to y_1 & 110 \to y_3 & 101 \to y_5 & 100 \to y_7 \\
011 \to y_2 & 010 \to y_4 & 001 \to y_6 & 000 \to y_8
\end{array}
$$

так, что *характеристический* номер структуры определяется десятичным эквивалентом *бинарного* кортежа $<y_1y_2 \ldots y_8>$. Естественно, данное различие не принципиально, однако его следует иметь ввиду, когда привязываются к нумерации такого типа структур ***1-ОС***. В настоящей книге будет используется именно наша *классификация*. В целях упрощения перевода из нумерации ***Аладьева*** в нумерацию ***Вольфрама*** структур такого типа можно использовать простую процедуру ***AW(N)***, реализованную в среде пакета ***Maple*** и работающую по принципу *переключателя*, а именно: если ***N*** – номер структуры в нумерации ***Вольфрама (Аладьева)***, то ***AW(N)*** будет соответствующим ей номером в нумерации ***Аладьева (Вольфрама)***. Для понимания исходного текста процедуры ***AW***, представленного ниже, вполне достаточно знакомства с пакетом ***Maple***, в частности, в пределах наших книг [97-118,545].

```
AW := proc(N::integer)
local a, k;
  if not belong(N, 0 .. 255) then error "argument must be from range 0..255,
         but had received <%1>", N  else  a := convert(convert(N, 'binary'), 'string');
     convert(parse(Rev(cat("0" $ (k = 1 .. 8 – length(a)), a))), 'decimal', 'binary')
  end if
end proc
> AW(30), AW(60), AW(75), AW(86), AW(89),AW(90), AW(102),AW(105), AW(106), AW(120);
                    120, 60, 210, 106, 154, 90, 102, 150, 86, 30
```

Из всех структур этого типа (*согласно вышесказанного*) сразу же можно исключить из дальнейшего рассмотрения структуры со следующими характеристическими номерами, а именно:

0..14, 16..22, 24..26, 28, 31..38, 40..44, 47..50, 52, 53, 55..59, 61..70, 72..74, 76, 78..82, 84, 87, 88, 91..100, 103, 104, 107..119, 121..127

по той простой причине, что *каждая* из них обладает *неконструируемостью* по крайней мере типа ***НКФ***, т.е. для каждой из них существуют *бесконечные* множества конечных блочных ***КФ***, которые не могут генерироваться в качестве *подконфигураций* ни из какой начальной $c \in C(B,1,\phi) \cup C(B,1,\infty)$. Три структуры с номерами ***15***, ***51*** и ***85*** не обладают ни ***НКФ***, ни ***НКФ-1***, генерируя идентичные (*с точностью до сдвига*) последовательности конечных ***КФ*** типа ***НКФ-2*** и, с нашей точки зрения, также не представляющие интереса. Обратимся к подгруппе структур, не обладающих ***НКФ*** по причине отсутствия для них ***ВСКФ***. Номера данных структур представлены ниже, а именно:

30, 45, 60, 75, 86, 89, 90, 101, 102, 105, 106, 120

Однако, ввиду вышесказанного искомая в качестве кандидата на предмет обладания свойством *универсальности* ***1-ОС*** должна обладать неконструируемостью типа ***НКФ-1***, тогда как структуры с номерами ***45*** и ***101*** данным свойством не обладают. Поэтому и их следует исключить из числа потенциальных кандидатов. Следовательно, остается рассмотреть лишь ***10*** структур с номерами ***30,60,75,86,89,90,102,105,106,120***, обладающих неконструируемостью типов ***НКФ-1*** и ***НКФ-2*** при отсутствии неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-3***. Достаточно детальный и теоретический анализ, и компьютерное моделирование показали, что структуры ***1-ОС*** с характеристическими номерами ***30,60,75,86,89,90,102,105*** и ***106*** не могут служить в качестве структур с вышеуказанным *свойством универсальности*. Остается структура с номером ***120***, к более детальному рассмотрению которой и приступаем.

Пусть $c_b = x_1x_2...x_n$ $(x_j \in B = \{0,1\};\ j=1..n)$ – произвольная *блочная* ***КФ***. Исходя из сказанного в разделе ***2.2***, несложно убедиться, что для данной структуры для каждой блочной ***КФ*** c_b ***КФ*** $c^* \in C(B,1,\phi)$, удовлетворяющая условию $c_b\tau^{(3)} = c^*$, будет являться ***НКФ-1***. Например, конфигурациями такого типа являются конфигурации вида $c_k = \square(1)^k\square;\ k \geq 1$. Поэтому, для компьютерного исследования динамических свойств классических ***1-ОС*** (*включая и бинарные структуры рассматриваемого типа*) нами был создан ряд программ в среде различных систем программирования [5,88,90]; примеры двух из них, написанных в среде ***СКА Maple*** [102-118], представлены ниже. Посредством вызова процедуры ***Art_Kr(Co,C1,T,p)*** получаем возможность тестировать ***p***-кратность вхождений *блочной* ***КФ С1*** в конфигурации, генерируемые из начальной конечной ***КФ Со*** посредством ***1-ОС***, ***ЛФП*** которой определяется таблицей ***Т*** *параллельных* подстановок. Тогда как вызовом ***Art_Kr1(Co,C1,T)*** обеспечивается вывод на печать ***2***-элементных последовательностей, возрастающих по первому элементу, определяющему количество копий ***КФ С1***, входящих в конфигурации, генерируемые из начальной ***КФ Со*** посредством ***1-ОС***, ***ЛФП*** которой определяется таблицей ***Т*** параллельных локальных подстановок. Если первая процедура обеспечивает тестирование *кратных* вхождений произвольных блочных ***КФ С1*** в конфигурации, генерируемые из начальной конечной ***КФ Со*** (***Со ≠ С1***; *экспериментально тестируется универсальная воспроизводимость вышеуказанного типа*), то вторая процедура обеспечивает тестирование кратных вхождений произвольных *блочных* ***КФ С1*** в конфигурации, генерируемые из начальной конечной ***КФ Со*** (***Со ≡ С1***; *итак, экспериментально тестируется возможность универсальной воспроизводимости конечных* ***КФ*** *в смысле Мура*).

```
> Art_Kr := proc(Co::string, C1::string, T::table, p::posint)
   local Kr, C, t, k, d;
   Kr, C, t, k := proc(S::string)
      local k;
         for k from length(S) by -1 to 1 do if S[k] <> "0" then break end if end do; S[1 .. k]
      end proc, Co, {}, 0;
   do
      k := k + 1; if p <= nops(Search2(C, {C1})) then break end if;
      C := convert(parse(Kr(psubs(cat("00", C, "00"), T, 'r'))), 'string')
```

```
    end do;
    k
end proc:
> T:=table(["000"="0","001"="1","010"="1","011"="1","100"="1","101"="0","110"="0","111"="0"]):
> Art_Kr("10100111111", "10100111111", T, 5);   ⇒ 807
> Art_Kr("1", "10100111111", T, 5);   ⇒ 1211
> Art_Kr1 := proc(Co::string, C1::string, T::table)
local Kr, C, t, k, d, a, h;
    Kr, C, t, k, h := proc(S::string)
      local k;
        for k from length(S) by -1 to 1 do if S[k] <> "0" then break end if end do;  S[1 .. k]
      end proc, Co, {}, 0, 1;
    do  k := k + 1;  a := nops(Search2(C, {C1})); if  h < a  then lprint(a, k);  h := a  end if;
      C := convert(parse(Kr(psubs(cat("00", C, "00"), T, 'r'))), 'string')
    end do
end proc:
> Art_Kr1("11110010110", "11110010110", T120);
  2, 224
  3, 323
  4, 971
  5, 1420
  6, 1596
  Warning, computation interrupted
```

Результаты многочисленных компьютерных экспериментов со структурой с *характеристическим номером* ***120***, проведенные с применением вышеуказанных процедур, в сочетании с некоторыми теоретическими рассмотрениями, основывающимися на динамических свойствах ***1-ОС***, которые обусловлены наличием в них неконструируемости типа ***НКФ-1*** без ***НКФ***, дают нам возможность сформулировать следующее весьма интересное предположение [88]: ***Для классической бинарной 1-ОС с номером 120 любая конечная конфигурация является самовоспроизводящейся в смысле Мура, одновременно генерируя при этом все конечные блочные КФ.*** Если это действительно так, то мы получаем довольно интересный пример структур, обладающих свойством ***универсальной*** воспроизводимости конечных ***КФ***, принципиально отличный как от уже ставшего *классическим* типа линейных ***ОС***-моделей, чьи ***ЛФП*** определяются как $\sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_n) = \sum_j x_j \ (mod\ a)$, так и от более широкого класса структур, образованных на осное *композиции* их ***ГФП***, также обладающих свойством *универсальной воспроизводимости* в смысле Мура *конечных* ***КФ.*** *(см. раздел* ***3.2****).* При этом, в случае установления такого типа структур мы получаем весьма интересный *класс* ***ОС***-моделей, обладающих *одновременно* и свойством *универсальной воспроизводимости* в смысле Мура конечных ***КФ***, и свойством *универсальной генерационной* возможности блочных ***КФ*** из каждой конечной ***КФ.*** На наш взгляд, исследования в данном направлении представляются достаточно интересными.

3.2. Самовоспроизводящиеся конечные конфигурации в классических ОС-моделях

Если проблема существования ***УКФ*** характеризует генерационные возможности классических ***ОС***-моделей относительно множества конечных ***КФ*** в целом, то *универсальная воспроизводимость* соотносит данную возможность со структурно-динамическим аспектом *генерации* ***ОС***-моделями ***КФ***-последовательностей. Сущность универсальной воспроизводимости заключается в том, что каждая конечная ***КФ*** в классической ***ОС***-модели является *самовоспроизводящейся* по Муру. Класс ***ОС***-моделей, обладающих свойством универсальной воспроизводимости, интересен со многих точек зрения и данному вопросу глобальной динамики ***ОС***-моделей уделяется довольно много внимания. В этом направлении целым рядом исследователей ***(А. Ваксман, Т. Виноград, Т. Уаку, А. Смит, С. Аморозо, Т. Остранд, А. Фредкин, Г. Купер, П. Андерсон, С. Улам, В.З. Аладьев и др.)*** получены весьма интересные результаты [1,3-5,8,9,54-56,88,90,131,185-187,221-225,294,298,299,536].

Наши результаты в данном *направлении* позволяют установить целый ряд довольно интересных соотношений между неконструируемостью и *универсальной* воспроизводимостью в классических **ОС**-моделях, а также решить ряд сугубо математических проблем. Для дальнейшего определим понятие «*воспроизводимости конфигураций по Э. Муру*».

<u>Определение 15</u>. Будем говорить, что КФ c∈C(A,d,φ) содержит m копий (с точностью до сдвига и вращения пространства Z^d) блочной c_b-конфигурации, если существует m непересекающихся областей однородного пространства Z^d, содержащих по меньшей мере по одной копии блочной c_b-КФ. КФ c∈C(A,d,φ) является самовоспроизводящейся в смысле Мура в классической модели d-ОС (d≥1), если для любого наперед заданного целого m>0 существует такое целое t>0, что КФ $c\tau^{(n)t}$ содержит не менее m копий исходной конечной c-КФ.

Наряду с попытками формализации процесса *самовоспроизведения* на самом абстрактном уровне *воспроизводящиеся* конфигурации в определенной мере могут характеризовать конструктивные возможности классических **ОС**-моделей и в данном отношении они являются, в некоторой мере, *противоположными* неконструируемым конфигурациям типов ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1***. Показано, что *классические* **ОС**-модели могут иметь множества довольно сложных самовоспроизводящихся по Муру конечных ***КФ*** как при отсутствии, так и при наличии в них ***НКФ*** и, возможно, ***НКФ-3*** [1,3-5,9]. Наиболее интересным в данном отношении оказалось обнаружение ***L***-класса линейных классических ***d-ОС (d ≥ 1)***, обладающих свойством универсальной воспроизводимости конечных ***КФ***. ***Линейной*** *классической* ***d-ОС (d ≥ 1)*** называется структура, чья ***ЛФП*** имеет следующий вид:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1}^{n} b_k x_k \ (mod\ a) \quad x_k, b_k \in A = \{0,1,...,a-1\};\ (k = 1..n),\ a\text{ - }prime$$

При определенных предположениях благодаря работам вышеуказанных исследователей имеет место следующий достаточно интересный результат [5,54-56,88,90,536].

<u>Теорема 57</u>. В классической линейной структуре d-ОС (d ≥ 1) каждая конфигурация c∈C(A,d,φ) является самовоспроизводящейся в смысле Мура.

В качестве простого примера рассмотрим классическую ***1-ОС*** с алфавитом состояний ***A***={***0,1,2***}, простейшим индексом соседства ***X***={***0,1***} и локальной функцией перехода $\sigma^{(3)}(x,y)=x+y\ (mod\ 3)$; ***x,y∈A***. Взяв в качестве начальной конфигурацию c_o=□122□, уже на первых ее ***21*** шаге генерации нетрудно наблюдать весьма прозрачную картину *воспроизведения* все увеличивающихся в числе копий исходной конечной конфигурации c_o-***КФ***, а именно:

c_o =	□ 1 2 2 □	0
	□ 1 0 1 2 □	1
	□ 1 1 1 0 2 □	2
	□ 1 2 2 1 2 2 □	3
	□ 1 0 1 0 0 1 2 □	4
	□ 1 1 1 1 0 1 0 2 □	5
	□ 1 2 2 2 1 1 1 2 2 □	6
	□ 1 0 1 1 0 2 2 0 1 2 □	7
	□ 1 1 1 2 1 2 1 2 1 0 2 □	8
	□ 1 2 2 0 0 0 0 0 0 1 2 2 □	9
	□ 1 0 1 2 0 0 0 0 0 1 0 1 2 □	10
	□ 1 1 1 0 2 0 0 0 0 1 1 1 0 2 □	11
	□ 1 2 2 1 2 2 0 0 0 1 2 2 1 2 2 □	12
	□ 1 0 1 0 0 1 2 0 0 1 0 1 0 0 1 2 □	13

```
              □ 1 1 1 1 0 1 0 2 0 1 1 1 1 0 1 0 2 □   14
            □ 1 2 2 2 1 1 1 2 2 1 2 2 2 1 1 1 2 2 □   15
          □ 1 0 1 1 0 2 2 0 1 0 0 1 1 0 2 2 0 1 2 □   16
        □ 1 1 1 2 1 2 1 2 1 1 0 1 2 1 2 1 2 1 0 2 □   17
      □ 1 2 2 0 0 0 0 0 0 2 1 1 0 0 0 0 0 0 1 2 2 □   18
    □ 1 0 1 2 0 0 0 0 0 2 0 2 1 0 0 0 0 0 1 0 1 2 □   19
  □ 1 1 1 0 2 0 0 0 0 2 2 2 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 2 □   20
□ 1 2 2 1 2 2 0 0 0 2 1 1 2 1 1 0 0 0 1 2 2 1 2 2 □   21
```

Используя результат теоремы ***150*** [5], можно не только существенно упростить доказательство данного результата, но и в определенной степени охарактеризовать целый класс данного типа структур, в дальнейшем называемого классом ***линейных d-ОС (d≥1)***, а именно:

<u>Теорема 58</u>. Любая классическая d-ОС (d ≥ 1) с локальной функцией перехода следующего общего вида, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Big(\sum_{1}^{n} b_k x_k\Big)^{a^m} \pmod{a}$$

при $a = p^k$ (p – простое; m, k – положительные целые числа; b_j, $x_j \in A$; j=1..n) имеет все конечные КФ самовоспроизводящимися в смысле Мура.

Таким образом, ***L***-класс ***линейных*** классических ***ОС***-моделей с точки зрения их динамики может быть охарактеризован наличием универсальной воспроизводимости *конечных* ***КФ***. В связи с чем возникает весьма интересный вопрос: ***Существуют ли другие классы ОС-моделей, обладающие свойством универсальной воспроизводимости, и как их можно формально охарактеризовать?*** В конце раздела вновь вернемся к данному интересному вопросу. В дальнейшем будем полагать, что для структур из класса *линейных* алфавит ***A***={***0,1,2,...,a-1***} удовлетворяет условию $a=p^k$, где ***p –*** простое и ***k –*** положительное целое числа.

Класс линейных ***ОС***-моделей, обладающих свойством *универсальной воспроизводимости* конечных ***КФ*** по Муру, до сих рассматривался относительно *связного* индекса соседства ***X***={***0,1,2, ..., n-1***}; но, между тем, такое свойство распространяется и на случай *общего* индекса соседства $X^*=\{j_1, j_2, \ldots, j_p\}$ $(0 = j_1 < j_2 < \ldots < j_p = n-1)$, включая и *несвязные* индексы при условии, что в них *ведущими* являются не менее двух переменных по каждой из размерностей, т.е. для случая ***1-ОС ЛФП*** модели имеет следующий вид, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=j_1}^{j=j_p} x_j \pmod{a}; \quad (0 = j_1 < j_2 < j_3 < \ldots < j_p = n-1;\ 2 \le p \le n);\ a = p^k \qquad (\psi)$$

где: ***A***={***0,1, ..., a-1***} – алфавит ***ОС***-модели при условии $a=p^k$, где ***p –*** простое и ***k –*** положительное целое, тогда как ***ШС*** имеет размер ***n*** [5,54-56]. Несложно убедиться, что для каждого ***ШС*** размера ***n*** существует 2^{n-2} различных *линейных* классических ***1-ОС*** с алфавитом ***A***={***0,1, ..., a-1***}. При этом, минимальный индекс соседства ***X***, участвующий при вычислении нового состояния единичного автомата структуры, имеет следующий вид ***X***={***0,n-1***}. Следовательно, в данном контексте вполне уместно рассматривать своего рода *обобщенный* класс линейных ***ОС***-моделей, характеризуемых таким важным динамическим свойством как *универсальная воспроизводимость* по Муру конечных конфигураций, чьи ***ЛФП*** определяются вышеуказанными соотношениями теоремы *58* и ***(ψ)***.

```
HS1B := proc(Co::string, n::posint, q::posint, m::posint, Ind::{set, list}, R::{1, 2})
local a, Ar, Kr, C, t, k, d, p, v, v1, F;
   if not belong(convert(Co, 'set1'), {seq(""||k, k=0 .. q-1)}) then error "Configuration <%1>
         contains an illegal symbol", Co  end if;
   if not belong({op(Ind)}, {k $ (k = 0 .. n - 1)}) then  error "4th argument %1 is invalid", Ind
```

```
   else a := cat(seq("0", k = 1 .. n - 1))
   end if;
   Ar, C, F, Kr, p, v, v1 := "", cat(a, Co, a), "HS-history.txt", proc(S::string)
      local k, j;
         for k from length(S) by -1 to 1 do  if S[k] <> "0" then break end if  end do;
         for j to length(S) do  if S[j] <> "0" then break end if  end do;
         S[j .. k]
      end proc, 0, 0, 1;
   while `if`(R = 1, v, p) < m do
      for k to length(C) - n + 1 do
         d := modp(add(parse(C[k + t]), t = Ind), q);  Ar := cat(Ar, "" || d)
      end do;
      v := Search3(Ar, {Co});   v := `if`(v = [], 0, nops(op(v)) - 1);
      if R =1 then `if`(0 < v, `if`(nargs=7, writeline(F, cat("", p+1, "; ", v, "; ", length(Ar), ": ", Ar)),
         NULL), NULL), assign('p' = p + 1,  'C' = cat(a, Ar, a), 'Ar' = "")
      else
         p := p + 1;  if v1 < v then print(v, p); v1 := v end if;  C := cat(a, Ar, a);  Ar := ""
      end if
   end do;
   if R = 1 then
      if nargs = 7 then WARNING("HS-history has been saved in datafile <%1>",
         cat(currentdir(), "\\", F)), close(F), p, v   else p, v   end if
   end if
end proc:
> HS1B("121312311113223", 5, 4, 19, [0, 1, 4], 1);     ⇒   736, 19
> HS1B("1213111211213223", 5, 4, 20, [0, 1, 4], 1);    ⇒   864, 23
> HS1B("1212131323112233", 5, 4, 13, [0, 1, 4], 1);    ⇒   480, 16
> HS1B("121131231331122132112З", 6, 4, 1020, [0, 3], 2);
                                        2, 16
                                        4, 80
                                        8, 240
                                        16, 496
                                        32, 1008
> HS1B("123", 5, 4, 8, [0,1,4], 1, 66);       ⇒   61, 12
Warning, HS-history has been saved in file <C:\Program Files\Maple 10\HS-history.txt>
Содержимое файла «C:\Program Files\Maple 10\HS-history.txt»:
1; 1; 7: 1231313
2; 1; 11: 12322230003
3; 1; 15: 123313000120033
4; 1; 19: 1230002000201210323
5; 1; 23: 12313110020010312103113
6; 1; 27: 123222100010323230020220203
7; 1; 31: 1233132003203301011332020012233
8; 3; 35: 12300000000020202020000012302020123
9; 3; 39: 123131300000202202022220123111123011313
10; 1; 43: 1232223000302020200000001212021012022210003
11; 1; 47: 12331300012023120222200012133102311310300300033
12; 3; 51: 123000200020323012100000321020003230123012303230323
==========================================================================
```

Выше представлен как исходный код процедуры ***HS1B***, так и примеры применения для анализа динамики ***самовоспроизводящихся*** по Муру конечных ***КФ*** в классических ***1-ОС***. Для понимания принципов реализации и функционирования ***HS1B***-процедуры вполне достаточно знакомства с пакетом ***Maple*** в объеме наших книг [97-118]. Читателей, имеющих дело с программированием в среде ***Maple***, могут заинтересовать и используемые в процедуре полезные приемы, в частности, для организации ветвления вычислительных процессов в *циклических* конструкциях. Процедура ***HS1B*** содержится в нашей ***Maple***-библиотеке релизов ***6–11*** [118,545] (**http://freesoft.ru/?id=672524**). Основные функциональные возможности ***HS1B***-процедуры сводятся к следующему. Процедура ***HS1B*** располагает шестью обязательными формальными аргументами и одним необязательным

- Co – произвольная конечная ***КФ***, определенная в алфавите $A=\{0,1,2, ..., a-1\}$;
- n – целое число, определяющее размер шаблона соседства классической ***1-ОС;***
- q – целое число, определяющее мощность алфавита ***A*** структуры; $q \equiv a$;
- m – целое число, определяющее число копий по Муру ***КФ Co*** или число шагов ***1-ОС;***
- Ind – индекс соседства структуры, определяемый в виде $[0 \le j_1 < j_2 < ... < j_p \le n-1]$;
- R – целое число, определяющее режим выполнения процедуры; $R=\{1|2\}$.

Для классической ***1-ОС*** с алфавитом внутренних состояний $A=\{0,1,2,3, ..., a-1\}$ ($q=a$) и индексом соседства $Ind=[0 \le j_1<j_2<j_3< ...<j_p \le n-1]$ вызов процедуры в режиме ***R=1*** обеспечивает возврат **2**-х элементной последовательности, чей первый элемент определяет номер шага структуры ***1-ОС***, на котором из ***КФ Co*** была сгенерирована конфигурация, содержащая ***m*** копий начальной ***КФ Co***, тогда как второй – число копий. При этом, использование в данном режиме необязательного ***7-го*** фактического аргумента (*любое* ***Maple****-выражение*) позволяет сохранять историю генерации последовательностей конфигураций из ***КФ Co*** в файле *"HS-history.txt"*, который располагается в текущем каталоге сеанса ***Maple***, как правило, в каталоге «*C:\\Program Files\\Maple* ***J***» (***J = 6 .. 11***). Записи сохраненного файла данных имеют следующий формат, а именно:

$$t;\ m;\ L: \text{<конфигурация } C_t = C_o\tau^{(n)t}\ (t=1,2,3, ...)\text{>}$$

где ***t*** – номер итерации ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ структуры, ***m*** – число копий по Муру ***КФ*** C_o, ***L*** – длина ***КФ*** C_t и, наконец, сама конечная конфигурация C_t. Данный файл имеет текстовый формат (***txt–файл***) и его можно легко просматривать и редактировать любым текстовым процессором.

Вызов процедуры ***HS1B*** в режиме ***R = 2*** обеспечивает вывод на печать последовательностей пар, чьи первые элементы определяют номера ***t*** итераций ***ГФП*** структуры, в которых из ***КФ Co*** были сгенерированы конфигурации, содержащие указанные вторыми элементами количества копий начальной ***Co***-конфигурации. При этом, в отличие от предыдущего режима, второй ***m***-аргумент определяет число итераций ***ГФП*** структуры, в процессе которых и отыскиваются *копии* по Муру *начальной* ***КФ Co*** и найденное количество копий выводится в *возрастающем* порядке с привязкой к шагам итерации.

В процессе экспериментирования с процедурой ***HS1B*** был получен ряд достаточно интересных результатов относительно *самовоспроизводящихся* по Муру конечных ***КФ*** для *линейной* бинарной классической ***1-ОС***, в частности:

* при росте числа ведущих переменных индекса соседства *линейной бинарной* классической ***1-ОС*** растет и плотность (*отношение общего числа сгенерированных копий за* ***t*** *итераций* ***ГФП*** *структуры к* ***t***) генерируемых копий для каждой начальной ***КФ*** $Co \in C(A,1,\phi)$;

* независимо от начальной ***Co***-конфигурации возрастающая последовательность числа копий по Муру ***КФ Co*** имеет вид 2^k ($k=1,2,3, ...$) при индексе соседства $X=\{0 \le j_1 < j_2 \le n-1\}$ и значениях ***a***, имеющих представление следующего вида 2^p ($p=1,2,3,4,5, ...$);

* при индексе соседства $X = \{0 \le j_1 < j_2 \le n\text{-}1\}$ классической ***1-ОС*** в целом ряде случаев возможно устанавливать весьма интересные формульные зависимости, связывающие шаг t итерации ***ГФП***, число копий по Муру начальной конфигурации $Co \in C(A,1,\phi)$, содержащихся в **КФ** $C_t = C_o\tau^{(n)t}$, и разность $j_2 - j_1$.

Представленная ниже простая ***Maple***-процедура ***HS1DD(Co,t,n,c,X)*** обеспечивает эмпирическое тестирование линейных классических ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2,3, ..., t\text{-}1\}$ и алфавитом $A=\{0,1, ..., a\text{-}1\}$ на предмет анализа присущего им свойства *универсальной* самовоспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ***. Процедура имеет *пять* формальных аргументов: ***Co*** – начальная конечная ***КФ***, ***t*** – размер ***ШС***, ***n*** – искомое количество копий ***Co***, ***c*** – целое, равное ***a***, ***X*** – индекс соседства (*связный или несвязный*). По достижении заданного числа копий процедура возвращает ***3***-х элементную последовательность, чей первый элемент определяет затраченное число шагов ***ГФП***, второй – список числа копий, полученных в процессе генерации *конечной* (*результирующей*) ***КФ***, содержащей не менее заданных ***n*** копий, тогда как третий – общее число сгенерированных *копий* ***КФ Co***. Для понимания исходного кода процедуры ***HS1DD*** вполне достаточно знакомства, в частности, с книгами [116-118] и библиотекой процедур для ***Maple*** релизов ***6 – 11*** [545].

```
> HS1DD := proc(Co::string, t::posint, n::posint, c::posint, X::{set, list})
 local a, b, d, h, k, j, m, p;
   h := cat("0" $ (k = 1 .. t - 1));   assign(a = cat(h, Co, h), d = "", m = 0, p = []);
   do
      assign('b' = nops(Search2(a, {Co})), 'm' = m + 1);
      if n <= b then p := [op(p), b];  break
      else  if 1 <= b then p := [op(p), b]  end if;
         for k to length(a) - t + 1 do d := cat(d, add(parse(a[k + j]), j = X) mod c)  end do;
         assign('a' = cat(h, d, h), 'd' = "")
      end if
   end do;
   m, p, add(k, k = p)
 end proc:
> Svet:= "11101011100110101011": HS1DD(Svet, 3, 30, 2, {0, 2});
          497, [1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, 2, 4, 4, 8, 4, 8, 8, 16, 2, 4, 4, 8, 4, 8, 8, 16, 4, 8, 8, 16, 8, 16, 16, 32], 243
> Svet:= "1121011011001210101 0112": HS1DD(Svet, 3, 20, 3, {0, 1, 2});
                                  352, [1, 3, 2, 3, 9, 2, 2, 6, 6, 3, 9, 6, 9, 27], 88
> Svet:= "11210110110012101010112": HS1DD(Svet, 3, 20, 3, {0, 2});
 1189, [1, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 4, 5, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 4, 8, 10, 2, 4, 5, 4, 8, 10, 5, 10, 14, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 4, 8, 10, 4, 8, 8, 8,
                                                  16, 16, 8, 16, 20], 296
```

В процессе экспериментирования с процедурой ***HS1DD*** были получены (*дополнительно к раньше отмеченным*) целый ряд довольно интересных результатов относительно *самовоспроизводящихся* в смысле Мура *конечных* ***КФ***. Например, проведенное экспериментальное исследование позволяет сделать вывод, что свойство универсальной или существенной *воспроизводимости* в смысле Мура конечных ***КФ***, по-видимому, присуще также линейным структурам с произвольным алфавитом $A=\{0,1,2, ..., a\text{-}1\}$, где ***a*** – произвольное положительное целое, не представимое в виде $a=p^k$, где ***p*** – простое и ***k*** – положительное целое. Однако, в отличие от вышеопределенного класса линейных структур процесс генерации требуемого количества копий начальных конфигураций в данного типа линейных структурах требует значительно большего количества шагов ***ГФП*** при довольно существенном снижении плотности числа копий в процессе генерации. На скорость генерации довольно существенно влияние как размера начальной ***КФ***, так и ее вида. Так, для генерации в линейной ***1-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2,..., 5\}$ и индексом соседства $X=\{0,1,2\}$ из ***КФ c= "3315003"*** ее ***6*** копий требуется ***1774*** шага ***ГФП***, тогда как для ***КФ*** ***с*="5555555"*** с той же длиной только ***41*** шаг. Имеется целый ряд и других интересных результатов в данном направлении [54-56,90], которое представляется нам достаточно интересным для дальнейших исследований.

С другими интересными свойствами *обобщенного класса линейных* ***ОС***-моделей, характеризуемых свойством *универсальной воспроизводимости* по Муру конечных ***КФ***, можно ознакомиться в [54-56, 536]. Между тем, было бы весьма желательно получить некоторые *определяющие* характеристики класса *обобщенных* линейных классических ***ОС***-моделей в целом. В данном направлении вполне определенный интерес представляет следующий основной результат, используемый и в других целях [88,90].

Хорошо известно [88], что ряд свойств, присущих ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ (*некоторым либо всем*), наследуется и ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, являющейся результатом их композиции следующего общего вида, а именно:

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\tau^{(n_2)}\tau^{(n_3)} \dots \tau^{(n_j)} \dots \tau^{(n_p)}; \quad n = \sum_{j=1}^{p} n_j - (p-1); \quad 2 \le n_j < n; \quad j = 1..p \qquad (\delta)$$

и наоборот. Например, если ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ обладает *неконструируемостью* ***НКФ***-типа, этим свойством будет обладать по меньшей мере и одна из ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$, которые составляют любую допустимую ее декомпозицию **(δ)**. Некоторые другие полезные свойства подобного рода рассмотрены в данной книге, другие могут быть найдены в [88]. Таким образом, мы получаем естественный механизм конструирования и более сложных ***ГФП*** из менее сложных, чьи композиции будут в результате давать требуемой сложности ***ГФП*** и наследующей необходимые свойства, присущие некоторым либо всем ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$, составляющим композицию для ***ГФП*** $\tau^{(n)}$. В данном контексте рассмотрим вопрос конструирования на базе *композиционного* подхода классических структур, обладающих свойством ***универсальной*** воспроизводимости по Муру конечных ***КФ***, принципиально отличных от уже ставшего классическим примера *линейных* структур, ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ которых определяются как $\sigma^{(n)}(x_1,x_2,x_2,\dots,x_n) = \sum_j x_j \ (mod\ a)$. В качестве иллюстрации приведем весьма простой пример. Для композиции выбираем бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1\}$ и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$, определяемой формулой $\sigma^{(2)}(x_o,x_1)=x_o+x_1 \ (mod\ 2)$. Несложно убедиться, что композиция $\tau^{(3)}=\tau^{(2)}\tau^{(2)}$ двух ***ГФП***, определяемых указанной ***ЛФП***, в результате дает новую, более сложную ***ГФП*** $\tau^{(3)}$, чья ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ определяется параллельными подскановками следующего вида, а именно:

$$000 \to 0 \quad 001 \to 1 \quad 010 \to 0 \quad 011 \to 1 \quad 100 \to 1 \quad 101 \to 0 \quad 110 \to 1 \quad 111 \to 0$$

Показано, что данная ***ГФП*** обладает неконструируемостью типа ***НКФ-1*** при отсутствии в ней ***НКФ***. Более того, бинарная ***1-ОС*** с данной ***ГФП*** и индексом соседства $X=\{-1,0,1\}\equiv\{0,1,2\}\equiv\{-2,-1,0\}$ обладает свойством ***универсальной*** *воспроизводимости* конечных конфигураций в смысле Мура. При этом, многочисленные компьютерные эксперименты в сочетании с теоретическим *анализом* позволили сформулировать следующее достаточно интересное утверждение [88]:

<u>Предложение 15</u>. Глобальная функция перехода $\tau^{(n)}$***, заданная в алфавите*** $A=\{0,1,2, \dots, a-1\}$***, будет обладать свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных КФ, если все ГФП*** $\tau^{(n_j)}$***, составляющие ее композицию (δ), будут также обладать свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных конфигураций.***

При конструирования новых ***1***-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n+m-1)}$, обладающих вышеупомянутым свойством *универсальной* в смысле Мура *воспроизводимости* конечных ***КФ***, на базе *композиции* более простых ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и $\tau^{(m)}$, обладающих тем же свойством, достаточно полезным оказывается и следующее соотношение, а именно: $\tau^{(n+m-1)}=\tau^{(n)}\tau^{(m)}=\tau^{(m)}\tau^{(n)}$. В основе доказательства данного утверждения лежат нижеследующие достаточно прозрачные соотношения (*не нарушая общности для **1**-мерного случая*), а именно:

$$\sigma_1^{(n+m-1)}(x_1, x_2, ..., x_{n+m-1}) = \sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{j=t}^{t+n-1} x_j \pmod a\right) \pmod a$$

$$\sigma_2^{(n+m-1)}(x_1, x_2, ..., x_{n+m-1}) = \sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{j=t}^{t+m-1} x_j \pmod a\right) \pmod a$$

$$(\forall < x_1 x_2 \ldots x_{n+m-1} >)(\sigma_1^{(n+m-1)}(x_1, x_2, ..., x_{n+m-1}) = \sigma_2^{(n+m-1)}(x_1, x_2, ..., x_{n+m-1}))$$
$$x_j \in A = \{0, 1, ..., a-1\}; \quad j = 1..n+m-1$$

При этом, в качестве ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и $\tau^{(m)}$ могут выступать либо линейные (*в вышеотмеченном смысле*) функции, либо их композиции. Более того, можно показать, что в результате композиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и $\tau^{(m)}$ получаем ***ГФП*** $\tau^{(n+m-1)}$, соответствующая которой ***ЛФП*** является *симметричной*. Таким образом, среди ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***(n≥3)*** существуют функции, отличные от *линейных* и также обладающие свойством *универсальной* в смысле Мура воспроизводимости *конечных* ***КФ***. В данном направлении имеет место следующий достаточно интересный результат, имеющий ряд приложений [88,90].

<u>Теорема 59</u>. Множество P всех линейных классических структур 1-ОС с алфавитом состояний A={0,1,...,a-1} единичного автомата и ГФП $\tau^{(n)}$ (n ≥ 2) совместно со множеством всех структур, чьи ГФП образованы композицией глобальных функций структур из указанного множествi P, образуют полугруппу по отношению к свойству универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных конфигураций.

Смысл данного результата состоит в том, что композиция *линейных* ***ГФП***, обладающих свойством *универсальной* воспроизводимости по Муру, вновь дает ***ГФП*** из того же класса, т.е. ***линейность*** не является, как оказалось, довольно жестким требованием. Более того, данный результат *обобщаем* и на случай классических ***d-ОС (d≥2)***. При этом, более специальные вопросы динамики *линейных* классических ***ОС***-моделей рассматриваются в целом ряде работ [5,9,54-56,140,160,283,284] и будут представлены несколько ниже. Целый ряд весьма интересных свойств линейных классических ***ОС***-моделей исследовался и японскими математиками [124] посредством *алгебраических* методов с использованием как понятий аддитивной группы и коммутативного кольца, так и понятий и методов динамических систем. Так, в работе [140] ***L***-класс линейных классических ***ОС***-моделей исследовался средствами линейной алгебры. Между тем, до сих пор не удалось выявить другого множества *классических* ***ОС***-моделей (*кроме приводимой ниже интересной гипотезы*) и отличного от представленного теоремой ***59***, обладающих свойством *универсальной воспроизводимости* в смысле Мура конечных ***КФ***. Однако удалось получить общую характеристику данного класса структур [75], тесно связанную с проблемой *неконструируемости* в классических ***ОС***-моделях.

<u>Теорема 60</u>. Необходимым (но не достаточным) условием обладания классической d-ОС (d ≥ 1) свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных КФ является наличие для нее неконструируемости типа НКФ-1 при отсутствии в ней неконструируемости типов НКФ и НКФ-3.

Данный результат представляет собой своего рода испытание (*необходимое условие*) для проверки классических ***ОС***-моделей на предмет обладания свойством *универсальной* воспроизводимости, а также иллюстрирует достаточно важный аспект взаимосвязи ***максимальной*** конструируемости и неконструируемости в классических ***ОС***-моделях. Более того, результат теоремы ***60*** позволяет получить решение следующего весьма важного вопроса, связанного также и с конструктивными возможностями *классических* ***ОС***-моделей: ***Может ли классическая ОС-модель удваивать любую конечную конфигурацию, заданную в том же самом А-алфавите?***

Занимаясь вопросами поиска приемлемого математического аппарата, который будет *изоморфен развивающейся биологической* организации, нами были предложены в этом качестве параллельные τ_n-грамматики и ***А***-алгоритмы и проведен их анализ в контексте биологических интерпретаций [3-5,33,46,54-56,88]. Например, исследовался *логический* парадокс ***Розена,*** связанный с феноменом *самовоспроизведения* в формальных развивающихся системах. Суть данного парадокса сводится к тому, что модели *самовоспроизведения* должны включать как собственно систему *воспроизведения*, так и некоторое специфическое окружение *(среду).* Так, хорошо известные алгоритмы ***Маркова,*** определенные в некотором ***А***-алфавите, не могут удваивать произвольное конечное слово в том же самом алфавите. Вполне резонно предположить, что данный результат имеет место как для τ_n-, так и для ***А***-алгоритмов. Относительно ***А***-алгоритмов показано [3,5], что проблема удвоения слов решается путем введения *одного* дополнительного символа $b \notin A$. При этом, более детальные исследования в этом направлении позволили сформулировать следующую достаточно важную гипотезу, представляющую большой теоретический интерес.

Пусть ***P*** будет продукцией над конечным словом ***s*** в некотором конечном алфавите ***А,*** которая перерабатывает данное слово в новое ***s`***-слово согласно некоторого алгоритма, использующего только ***А***-алфавит. Схема ***R*** представляет собой некоторое конечное множество продукций P_k ***(k=1 .. n)*** совместно с алгоритмом их применения к каждому ***s***-слову в ***А***-алфавите. Тогда ***F(R,A)*** будем называть *формальной* системой в ***А***-алфавите со схемой ***R.*** В приведенной терминологии наша гипотеза принимает вид: ***Не существует формальной системы F(R,A), которая могла бы удваивать произвольное конечное слово в А-алфавите.*** Данная гипотеза остается открытой и по сей день и ее решение в общем случае представляется нам достаточно сложным, между тем, для случая классических ***ОС***-моделей данная проблема имеет решение в том смысле, что получено ее отрицательное решение, а именно.

<u>Теорема 61</u>. Не существует классической ОС-модели с произвольными А-алфавитом и индексом соседства, удваивающей каждую конечную конфигурацию, заданную в том же самом конечном А-алфавите.

Данный результат является непосредственным следствием более общего результата теоремы ***60,*** устанавливая своего рода ограничения на универсальную воспроизводимость конечных ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях. Из результатов раздела ***6.5*** можно убедиться в возможности решения данной проблемы в среде классической ***1-ОС*** с ***А***-алфавитом, который расширен только на один символ. Доказательство является неконструктивным и читателю в качестве весьма интересного упражнения рекомендуется определить классическую структуру ***1-ОС*** с алфавитом $A^* = A \cup \{\alpha\}$ $(\alpha \notin A)$, *удваивающую* произвольную *конечную* конфигурацию, заданную в том же самом конечном ***А***-алфавите.

Рассматривая *универсальную воспроизводимость* как ***максимальные*** конструктивные возможности *классических* ***ОС***-моделей по генерации ими *конечных* ***КФ,*** очень интересно не только попытаться выявить новые классы структур с данным свойством, но и исследовать классы структур, которые обладают данным *(либо подобным ему)* свойством в значительной мере. Так, был определен [9,54] класс ***G*** структур с *небинарным* алфавитом и *связным* шаблоном соседства размера ***n,*** для которых каждая сплошная *(не имеющая внутри себя **0**-состояний покоя)* конечная ***КФ*** размера ***m≥n*** является самовоспроизводящейся по Муру. Еще один класс ***LG*** структур, ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ которых получены на основе ***ЛФП*** структур из классов ***L*** и ***G,*** обладают весьма высокой степенью воспроизводимости конечных ***КФ.*** Новые интересные классы структур, обладающих достаточно ***высокой*** степенью воспроизводимости конечных ***КФ,*** можно получать на основе *композиций* конечного числа ***ГФП*** из указанных классов ***L*** и ***LG.*** Исследования на основе специальной симуляционной программы для серии ***ЕС ЭВМ*** [5,85], показали, что данного типа структуры обладают достаточно высокими воспроизводящими показателями конечных ***КФ*** вполне определенных типов.

Вопросы ***воспроизводимости*** конечных конфигураций в ***ОС***–моделях представляют достаточно большой интерес не только с точки зрения симулирования процессов биологического развития, порождающих свойств определяемых данного типа параллельными динамическими системами формальных *алгебраических* систем, но также с чисто утилитарной точки зрения на практические реализации вычислительных систем, базирующихся на ***ОС***-моделях, в которых рассматриваемое свойство *воспроизводимости* может представлять интерес, например, с точки зрения надежности.

Еще один класс ***ОС***-моделей**,** обладающих достаточно высокой степенью *воспроизводимости* ***КФ*****,** можно определить на основе одной специальной алгебраической системы, введенной нами для *полиномиального* представления ***а****-значных* логических функций [3,5]. Исследование целого ряда классов *дискретных параллельных динамических систем* ***(ДПДС)*****,** включая ***ОС***-модели**,** очень тесно связано с исследованием свойств ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$**,** представляющих собой ***а****-значные логические функции* ***(а-ЗЛФ).*** Среди различных подходов к исследованию подобных функций особое место занимает алгебраический подход, когда каждая ***а-ЗЛФ*** может быть представлена полиномом по ***(mod a)*** максимальной степени ***n(a-1)*** над полем ***A*****,** и наоборот, где ***а-ЗЛФ*** есть любое отображение $R^{(n)}$: $A^n \to A$**.** Между тем, в случае составного числа ***а*** далеко не все ***а-ЗЛФ*** могут быть представлены в такой полиномиальной форме, а точнее «*почти все*» функции не имеют такого *полиномиального* представления. А так как ***А***-алфавит в классической ***ОС***-модели может быть произвольным, то возникает проблема распространения *алгебраического* метода исследований ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ на общий случай ***А***-алфавита внутренних состояний. В данной связи, возникает интересная и важная со многих точек зрения проблема**:** ***Можно ли определить алгебраическую систему (АС), которая допускала бы полиномиальное представление а-ЗЛФ в А-алфавите при составном а-числе как в случае простого а-числа?*** В этой целью нами была определена одна ***АС*****,** в которой «*почти все*» ***а-ЗЛФ*** имеют *полиномиальное* представление для случая составного ***а***-модуля [84]. Предлагаемая ***АС*** определяется следующим образом. Выбирается конечный алфавит системы A_a=$\{0,1,2, ..., a-1\}$ и на нем определяется обычная бинарная операция сложения по ***(mod a)*****.** Одновременно на A_a определяется бинарная операция **#**-произведения согласно таблице умножения (табл. ***5*****).** Легко убедиться, что операция **#**-произведения на множестве $A_a \backslash \{0\}$ образует конечную циклическую группу $A^{\#}$ степени ***(a - 1).*** Относительно определенной таким образом ***АС*** имеет место основной результат, формулируемый нижеследующей теоремой ***62*** [5,84,88].

Таблица 5

#	0	1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	a-6	a-5	a-4	a-3	a-2	a-1
0	0	0	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	a-4	a-3	a-2	a-1	0	a-1
2	0	2	3	4	5	6	.	.	.	.	.	a-3	a-2	a-1	0	a-1	1
3	0	3	4	5	6	7	.	.	.	.	.	a-2	a-1	0	a-1	1	2
4	0	4	5	5	7	8	.	.	.	.	.	a-1	0	a-1	1	2	3
5	0	5	6	7	8	9	.	.	.	.	.	0	a-1	1	2	3	4
6	0	6	7	8	9	10	.	.	.	.	.	a-1	1	2	3	4	5
....	...	...	...	...	..	...	.	.	.	.	.	...	...	....	....	...	....
....	...	...	...	...	..	...	.	.	.	.	.	...	...	....	....	...	....
a-3	0	a-3	a-2	a-1	1	2	.	.	.	.	.	a-9	a-8	a-7	a-6	a-5	a-4
a-2	0	a-2	a-1	1	2	3	.	.	.	.	.	a-8	a-7	a-6	a-5	a-4	a-3
a-1	0	a-1	1	2	3	4	.	.	.	.	.	a-7	a-6	a-5	a-4	a-3	a-2

Теорема 62. Существует алгебраическая система <A_a;+; #>, в которой «почти каждая» а-ЗЛФ, определенная в A_a-алфавите (а – составное), представима в форме полинома $P_{\#}(n)$ по (mod a), где:

1) (+) – традиционная операция сложения по (mod a);

2) (#) – операция произведения, определяемая в соответствии с таблицей 5;

$$P_{\#} = \sum_{j=1}^{a^n-1} c_j \# X_1^{d_{j1}} \# X_2^{d_{j2}} \# \ldots \#\# X_n^{d_{jn}} \quad (mod\ a) \; - a\ polynom$$

3) ***which is not containing dyadic expressions of the following kind :*** **(34)**

$$p_d \# X_j^d + B_d \# X_j^{a-d-1} \quad \left(0 \le d_{i_j} \le a-1;\ \sum_{j=1}^{n} d_{i_j} \ge 1;\ X_j,\ c_j \in A_a;\right.$$

$$p_d + B_d = a;\ p_{d'} B_d \ge 1;\ X_j^p = \underbrace{X_j \# X_j \# \ldots \# X_j}_{\longleftarrow - - - p - - - \longrightarrow};\ j = 1..n;\ j = 1..a^n - 1;\quad d = 1..[(a-2)/2]$$

Данный результат сыграл весьма важную роль в исследованиях ***ДПДС*** для случаев алфавита A_a ***(a** - составное**)*** и позволил получить ряд весьма интересных результатов по ***ТОС***-проблематике, часть из которых рассматривается ниже. При этом, теорема ***62*** дает вполне удовлетворительное аналитическое представление ***а-ЗЛФ*** в случае составного ***а***-модуля. Даже такая весьма простая логическая функция как:

$$R_1(x) = \begin{cases} 0, & if\ \ x = 0; \\ 2, & if\ \ x = 1; \\ 1, & else \end{cases}$$

определенная в алфавите A_6, не может быть представлена полиномом по ***(mod 6)***, тогда как в ***АС*** ***<A_6; +; #>*** ее представление имеет следующий простой вид: $R_1(y) = P_{\#}(1) = y^2 + y^3\ (mod\ 6)$. Целый ряд других весьма интересных примеров подобного характера, а также и сравнительный анализ определенной выше ***АС*** наряду с *классической* алгебраической системой вида ***<A_a;+;x>***, у которой операции ***(+)***, ***(x)*** являются обычными *бинарными* операциями сложения и умножения по ***(mod a)*** соответственно, можно найти в работах [5,56,84,88,90].

На основе введенной выше ***АС*** можно определить еще один интересный тип классических ***ОС***-моделей, обладающих достаточно высокой степенью воспроизводимости конечных ***КФ***. В свете вышесказанного определяем для классической модели ***1-ОС ЛФП*** следующими параллельными подстановками, а именно:

$$\begin{aligned} &x_1x_2x_3 \ldots x_n \to x_1^1 = 0, \quad if \quad (\forall k)(x_k = 0) \\ &x_1x_2x_3 \ldots x_n \to x_1^1 = \prod_{k=1}^{n}{}_{\#}\, \delta(x_k), \quad else; \quad x_1^1, x_k \in A \quad (k = 1..n) \\ &\delta(x_k) = \begin{cases} x, & if \quad x \ne 0 \\ 1, & else \end{cases} \end{aligned} \qquad (35)$$

где ***#***-произведение определяется согласно табл. ***5***. Рассмотрим при сделанных предположениях ***S(a,m)***-множество всех конечных ***КФ***, имеющих вид c=□$x_1x_2x_3 \ldots x_m$□ при $x_k \in A \backslash \{0\}$ ***(j=1..m)***.

Очевидно, мощность таким образом определенного ***S(a,m)***-множества равна $(a-1)^m$, а мощность множества ***Σ(a,m)*** *всех* конечных ***КФ m***-длины есть $(a-1)^{2} * a^{m-2}$. Итак, плотность множества ***S(a,m)*** относительно ***Σ(a,m)***-множества определяется выражением вида $\Xi(a,m) = S(a,m)/\Sigma(a,m) = (1-1/a)^{m-1}$, асимптотическое поведение которого характеризуется следующими соотношениями, а именно:

$$\lim_{m \to \infty} \Xi(a,m) = 0 \qquad \lim_{m \to \infty} \Xi(a,m) = 1 \qquad (36)$$

$$\lim_{m \to \infty} \Xi(a,m) = \lim_{a \to \infty} \Xi(a,m) = e^{-1/p}, \quad \text{если} \quad \lim_{m,a \to \infty} a/m = p = const$$

Из данных соотношений можно убедиться, что в ряде важных случаев плотность ***S(a,m)***-вполне достаточна, чтобы рассматривать составляющие его *конечные* ***КФ*** самовоспроизводящимися, т.е.

определить еще один новый класс ***ОС***-моделей, в значительной степени обладающих свойством *воспроизводимости* конечных ***КФ.*** На основе детального анализа параллельных подстановок ***(35)*** можно показать, что соответствующая им ***ЛФП (ГФП)*** классической ***ОС***-модели обладает ***НКФ*** и ***НКФ-3*** видов соответственно c_b***=010*** и c_1***=□1□*** при отсутствии неконструируемости типа ***НКФ-1;*** тогда как каждая ***КФ*** $c \in S(a,m)$ является в такой структуре *самовоспроизводящейся* в смысле Мура. Этот результат совершенно не противоречит теореме ***60,*** ибо рассматриваемый класс структур характеризуется наличием для них свойства *существенной*, а не *универсальной воспроизводимости* по Муру конечных ***КФ.*** Из анализа целого ряда классических структур, которые в значительной мере обладают свойством воспроизводимости по Муру конечных ***КФ,*** можно предположить, что *необходимое* условие состоит в том, чтобы ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ классической ***ОС***-модели, обладающей таким свойством, определялась параллельными подстановками следующего общего вида, а именно:

$$x_1x_2x_3 \,.....\, x_n \;\Rightarrow\; x^*_1 = \Phi(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \qquad x_k \in A \;\; (k = 1 \,..\, n)$$

где ***Ф***-функция базируется только на таких операциях, которые образуют на ***А***-множестве либо его подмножествах, конечные циклические группы соответствующей степени. Так, дальнейшее исследование структур указанного типа позволит, на наш взгляд, *существенно* как обобщить, так и расширить имеющиеся на сегодня в таком направлении результаты. Наряду с продолжением изучения классических ***ОС***-моделей, обладающих свойством универсальной воспроизводимости по Муру, целесообразно определить и другие интересные с теоретической и прикладной точек зрения классы структур, наделенных некоторым достаточно общим присущим им свойством, и эффективно охарактеризовать данные классы в терминах новых либо ранее уже исследованных понятий и категорий.

В свете данного вопроса весьма интересным представляется нам исследование ***CSAG***-класса ***ОС***-моделей с *симметрическими* ***ГФП (ЛФП).*** Проведенный анализ целого ряда ***1-ОС*** из ***CSAG***-класса на основе как сугубо теоретических подходов, так и посредством компьютерного исследования в среде пакета ***Mathematica*** [93] позволил сформироваться предположению, что среди моделей из ***CSAG***-класса существует бесконечное множество, обладающих свойством или универсальной по Муру, или существенной *воспроизводимости* конечных ***КФ.*** При этом, вполне убедительной нам представляется следующая достаточно интересная гипотеза, а именно:

Каждая классическая 1-ОС с симметрической ГФП $\tau^{(n)}$***, не обладающая неконструируемостью типа НКФ (НКФ-3) при наличии для нее НКФ-1, обладает также свойством универсальной или существенной по Муру воспроизводимости конечных КФ.***

Следовательно, можно предположить, что в основе *существенной* воспроизводимости конечных ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях в значительной мере лежит ***симметричность ГФП*** и отсутствие для них неконструируемости ***НКФ***-типа. Нетрудно убедиться, что множество ***CSAG*** всех таких ***ГФП*** *замкнуто* относительно операции *композиции*, а в более общей формулировке эта гипотеза принимает следующий основной вид.

<u>Гипотеза</u>. Каждая классическая d-ОС (d ≥ 1) с симметрической ГФП $\tau^{(n)}$ ***(n ≥ d+1), обладающая неконструируемостью типа НКФ-1, но при отсутствии для нее неконструируемости типов НКФ и НКФ-3, обладает свойством универсальной либо существенной воспроизводимости по Муру конечных конфигураций.***

В случае доказательства данной гипотезы мы получаем хорошо определенный ***CSAG***-класс ***ОС***-моделей, обладающих указанным общим свойством; при этом, в одномерном случае такой класс является рекурсивным, т.е. функция определения принадлежности произвольной одномерной ***ОС***-модели ***CSAG***-множеству рекурсивна и для нее существует конструктивный разрешающий алгоритм. Доказательство гипотезы позволило бы также дать очень интересную характеристику класса структур, обладающих свойством *универсальной воспроизводимости* конечных ***КФ*** в смысле

Мура. Следует отметить, что определенным подтверждением этой гипотезы является результат теоремы ***59***. Согласно теоремы ***11*** доля классических ***d-ОС*** ($d \geq 1$), не обладающих ***НКФ (НКФ-3)***, стремится к ***1*** при росте размера ***ШС*** и/или мощности ***А***-алфавита структуры. Между тем, класс ***ОС***-моделей, удовлетворяющих условиям вышеуказанной гипотезы, довольно представителен.

Так, уже для классических бинарных ***1-ОС*** мощность данного класса не менее $N(n) = 2^{2^{n-3}}$; такую оценку несложно получить, рассматривая классические структуры ***1-ОС***, чьи ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ задаются следующими определяющими соотношениями, а именно:

$$\begin{cases} (\forall < x_1, x_2, ..., x_{n-1} >)(\sigma^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \neq \sigma^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x^*_n)) \\ (\forall < x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n >)(\sigma^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = \sigma^{(n)}(x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1)) \\ x_1, x^*_k \in A = \{0, 1, 2, ..., a-1\}; \; k = 1..(n-1); \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что определенные таким образом классические ***1-ОС*** обладают полностью *симметричными* ***ЛФП*** и не обладают ***НКФ*** и ***НКФ-3*** [5,90]. Нетрудно убедиться, что общее число допустимых линейных ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\beta_k x_k \ (mod\ a)$; $\beta_k, x_k \in A$; $(k=1..n)$ для случая ***1-ОС*** с ***ШС*** размера ***n*** составляет $M(n)=a^{n-2}(a-1)^2$. В случае классических ***1-ОС*** для каждого целого $a > 1$ существует ***n***-размер ***ШС***, начиная с которого число структур с нелинейными симметричными ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, не обладающих ***НКФ (НКФ-3)***, будет расти быстрее количества структур с *линейными симметричными* ***ЛФП*** [90]. В частности, для бинарных ***1-ОС*** $M(n)=2^{n-2}$ и указанное соотношение имеет силу, начиная уже с $n=5$. На первый взгляд, класс ***ОС***-моделей, определяемых полностью симметричными ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ и при этом не обладающих ***НКФ (НКФ-3)*** при наличии в них ***НКФ-1***, исчерпывает всевозможные однородные структуры, характеризуемые свойством ***универсальной воспроизводимости*** конечных конфигураций по Муру. Однако, как будет показано ниже, такое утверждение, по всей вероятности, неверно и класс структур ***d-ОС*** ($d \geq 1$) с указанным свойством может оказаться несколько более широким.

Для целей компьютерного исследования проблем *динамики* ***1***-мерных классических ***ОС***-моделей с *симметрическими* ***ЛФП (ГФП)*** была создана простая модульная ***Math***-процедура, позволяющая определять *воспроизводимость* в смысле Мура произвольной *конечной* ***КФ*** в зависимости от ***ЛФП***. Данная процедура ***HS***[***LTF, CF, P***] имеет три формальных параметра, позволяющие определять фактические значения для: ***LTF*** – локальная функция перехода, определяемая параллельными подстановками; ***CF*** – начальная конечная ***КФ*** из $C(A,\phi)$-множества и ***P*** – число копий начальной ***КФ***. Выполнение данной ***Math***-процедуры в случае успешного завершения анализа возвращает исследуемую на *воспроизводимость* конечную ***КФ*** с количеством ее копий, а также требуемое для этого количество шагов анализируемой структуры и *финальную* ***КФ***, на которой было получено заданное число ***P*** копий. В приводимом ниже примере рассмотрены фрагменты использования процедуры ***HS*** для исследования динамики конечных ***КФ*** в классических ***1-ОС*** с ***ЛФП***, которые определяются списками параллельных подстановок ***LTF2*** и ***LTF3*** соответственно в 2 алфавитах ***B***={***0,1***} и ***A***={***0,1,2***}. Анализ показывает, что структуры, определяемые данными ***ЛФП***, обладают неконструируемостью ***НКФ-1*** при отсутствии для них ***НКФ (НКФ-3)***. Между тем, следует иметь в виду, что данная ***Math***-процедура предполагает использование достаточно производительных классов персональных компьютеров.

```
HS[LTF_List, CF_String, P_Integer]:= Module[{n=0, k, C1, Co, Cfo, CFf, H, t=0, Z},
n=StringLength[First[First[LTF]]]; C1= ""; Co= "0"; Do[C1=C1<>Co, {k, 1, n-1}];
      CFo=C1<>CF<>C1; CFf=""; Label[St]; T1=TimeUsed[];
      Do[CFf=CFf<>StringReplace[StringTake[CFo, {k, k+n-1}], LTF], {k,1,StringLength[CFo]+1-n}];
t++; T2=TimeUsed[];
```

```
     If[T2-T1>=15, Goto[Q], 7];  Goto[C];  Label[Q];
Print["Steps: "<>ToString[t]<>"; CFfin: "<>CFf]; Z=Input["Continue(y/n)?"];
If[Z==y, Goto[C], 7]; Return["Job is canceled in step: "<>ToString[t]]; Label[C];
If[H=Length[StringPosition[CFf, CF]]; H>=P, Goto[Fin], CFo=C1<>CFf<>C1; CFf=""];
Goto[St]; Label[Fin];  Print["Initial configuration: "<>CF<>" is "<>ToString[H] <>"-reproductable!"];
Print["Steps: "<>ToString[t]<>"; CFfin: "<>CFf]]
       LTF3:= {"000"->"0","001"->"2","002"->"1","010"->"2","011"->"1","012"->"0",
       "020"->"1","021"->"0","022"->"2","100"->"2","101"->"1","102"->"0","110"->"1",
       "111"->"0","112"->"2","200"->"1","201"->"0","202"->"2","120"->"0","121"->"2",
       "122"->"1","210"->"0","211"->"2","212"->"1","220"->"2","221"->"1","222"->"0"};
     HS[LTF3, "2122221", 13];
Initial configuration: 2122221 is 18-reproductable!
Steps: 198; CFfin:  21222210021222210021222210021 2...2122221002122222100 2122221
     LTF2:= {"0000"->"0","0001"->"1","0010"->"0","0011"->"1","0100"->"0",
       "0101"->"1","0110"->"1","0111"->"0","1000"->"1","1001"->"0","1010"->"1",
       "1011"->"0","1100"->"1","1101"->"0","1110"->"0","1111"->"1"};
       HS[LTF2, "11110010111", 3];
Initial configuration: 11110010111 is 3-reproductable!
Steps: 256; CFfin: 11110010111000000011101011001 01...000011110000000011110010111
```

Для понимания принципа реализации и самого выполнения ***HS***-процедуры вполне достаточно знакомства с пакетом ***Mathematica*** в объеме лишь книги [93]. Экспериментальное исследование динамики конечных ***КФ*** посредством ***HS***-процедуры позволило получить целый ряд достаточно интересных типов поведения воспроизводящихся по Муру конечных ***КФ***. Итак, для стуруктуры, определяемой ***ЛФП LTF3***, количества ***N*** копий воспроизводящихся *конечных* ***КФ*** вычисляются по следующей простой формуле, а именно:

$$N(k)=\begin{cases}2\times 3^{k-1}, & \text{if } k \text{ is odd}\\ 3^{k-1}, & \text{if } k \text{ is even},\quad (k=1,2,3,\ldots)\end{cases}.$$

где ***k*** – порядковый номер в последовательности воспроизводящихся конечных ***КФ***. Количество всех симметрических ***1-ОС*** для заданных ***А***–алфавита и ***Х***–индекса соседства легко вычисляется по следующей простой формуле, а именно:

$$N(n,a)=a^{(a^n+a^{r(n)}-2)/2};\quad r(n)=\begin{cases}n/2, & \text{if } n \text{ is even}\\ (n+1)/2, & \text{if } n \text{ is odd}\end{cases}$$

Ряд интересных вопросов по *динамическим* свойствам *симметрических* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ рассматриваются нами несколько ниже. Во множестве ***GSAG*** естественно выделяется *изолированная* относительно операции композиции ***VS***-полугруппа всех симметрических ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***(n ≥ d+1)***, не обладающих неконструируемостью ***НКФ***-типа. На наш взгляд, именно ***VS***-полугруппа представляет особый интерес в связи с вопросом характеризации ***ОС***-моделей, обладающих свойством универсальной либо существенной воспроизводимости конечных ***КФ***. Для генерации последовательности ***КФ*** $<c_o>[\tau^{(n)}]$ в *классических* ***1-ОС*** вполне можно использовать ***Math***-процедуру ***HSd***[***L,CF,P***]. Данная ***HSd***[***L,CF,P***]-процедура имеет ***3*** формальных параметра, позволяющие определять фактические значения для ***L*** - локальной функции перехода, задаваемой параллельными подстановками; ***CF*** - начальной конечной ***КФ*** из множества ***С(1,А,ϕ)*** и ***Р*** – количество шагов структуры, через которое производится запрос санкции на продолжение процесса генерации последовательности ***КФ***.

Ниже представлен исходный текст процедуры ***HSd***[***L,CF,P***], для понимания которого достаточно знакомства с пакетом ***Mathematica*** в объеме книги [93]. Приведены и примеры ее применения.

```
HSd[L_List, CF_String, P_Integer]:= Module[{n, k, C1, Co, CFo, CFf, H, t=0, z, m=0},
n=StringLength[First[First[L]]]; C1= ""; Co= "0"; Do[C1=C1<>Co, {k, 1, n-1}]; CFo=C1<>CF<>C1;
CFf= ""; Print["Initial configuration: "<>CF]; Label[St];
     Do[CFf=CFf<>StringReplace[StringTake[CFo, {k, k+n-1}], L], {k, 1, StringLength[CFo] + 1 - n}];
t++; m++; If[t>=P, Goto[Q], 49]; Print[ToString[m]<>": "<>CFf]; Goto[C]; Label[Q]; t=0; Print["Step:
"<> ToString[m]<>"; CFm: "<>CFf]; Z=Input["Continue(y/n)?"]; If[z==y, Goto[C], 7]; Return["Work is
terminated in step: "<>ToString[m]]; Label[C];
     CFo=C1<>CFf<>C1; CFf=""; Goto[St]];       HSD[LTF3, "1022", 5]
Initial configuration: 1022
1: 220221
=====================
Step: 5; CFm: 21102000012201
6: 1021011002012022
=====================
Step: 15; Cfm: 20120220000000000000000001021011
19: 2202210001101120000000000000110112000220221
Work is terminated in step: 20
```

В отличие от предыдущей ***HSd***-процедура на основе заданной *параллельными* подстановками ***(L)*** ***ЛФП*** *классической* ***1-ОС*** из начальной *конечной* ***CF-КФ*** генерирует последовательность **<*CF*>**$[\tau^{(n)}]$, запрашивая через каждые ***Р***-шагов санкцию на продолжение работы. Для уяснения принципа организации и выполнения процедуры вполне достаточно знакомства с пакетом ***Mathematica*** в объеме книги [93]. При этом, следует отметить, что сам пакет включает ***Math****-модуль «Cellular.m»*, поддерживающий несколько простых функций работы с *классическими* ***1-ОС*** (*Cellular Automata*), однако принцип организации приведенных двух ***Math***-процедур представляется нам несколько более эффективным для построения программных средств исследования классических ***1-ОС***. В настоящее время для целей компьютерного исследования динамики классических ***ОС***-моделей в среде пакета ***Mathematica*** нами разработан целый ряд модулей и процедур. При этом, следует отметить, что последние версии пакета предлагают намного более развитые *встроенные* средства для программного симулирования классических ***ОС***-моделей [536].

Ввиду достаточно сложной динамики целого ряда классических ***1-ОС*** даже в случае бинарного ***В***-алфавита внутренних состояний единичных автоматов метод компьютерного моделирования с полным основанием можно отнести к основным составляющим аппарата исследования ***d-ОС***. Данный метод позволяет не только эмпирически исследовать динамику ***ОС***-моделей и довольно эффективно отображать ее визуально, но и предоставляет хорошие возможности на его основе формулировать гипотезы, ряд из которых уже получили теоретическое обоснование; другие же стимулировали и ряд весьма интересных исследований. Наряду с вышеупомянутыми, нами был разработан ряд *специальных* программных средств различных сложности и назначения для задач компьютерного исследования разнообразных аспектов ***ТОС*** [3,5,8,9,15,54-56,78,79,85,90,97-99,112, 116-118], прежде всего, динамики классических ***1-*** и ***2***-мерных ***ОС***-моделей. В настоящее время в рамках одного из направлений *научной* активности ***ТТГ*** разрабатываются программные средства для обеспечения компьютерного исследования ***ОС***-моделей в среде известных математических пакетов ***Mathematica***, ***Maple***, которые уже позволили получить целый ряд довольно интересных результатов, гипотез, наметили некоторые пути дальнейших исследований по ***ТОС***-тематике. В частности, упомянутый метод позволил сформулировать и в значительной мере апробировать одну довольно интересную гипотезу о существовании подполугруппы полугруппы одномерных симметрических ***ГФП***, не обладающих неконструируемостью типа ***НКФ*** при наличии для них типа ***НКФ-1***, для которых имеет место свойство *универсальной* воспроизводимости конечных ***КФ***. В настоящее время такая проблематика исследуется довольно интенсивно и в этом направлении уже получен целый ряд весьма интересных результатов [90]. Для компьютерного исследования ***ОС***-моделей целым рядом других исследователей были созданы программные симуляторы того либо иного назначения и уровня сложности [88,90,167,174,185-187,243,250,253,255,329,399-401,536], часть из которых кратко рассматривается также в разделе ***6.6*** настоящей монографии.

Исследование вопросов *самовоспроизводимости* в ***ОС***-моделях в целом ряде случаев сталкивается с проблемами алгоритмической разрешимости. В частности, ***А. Лейч*** рассмотрел [306] проблемы самовоспроизведения и фертильности для одного *подкласса* недетерминированных ***ОС***-моделей, используя теорию рекурсивных функций, и доказал их неразрешимость. При этом, во многих случаях степень *неразрешимости* для *индекс-множеств* рассмотренных им подклассов ***ОС***-моделей оказалась больше ***1.*** Его доказательство алгоритмической неразрешимости подобных проблем базируется на использовании перечислимостей, эквивалентных известным нумерациям ***Геделя.***

Наряду с продолжением исследований классических ***ОС***-моделей, которые обладают свойством *универсальной* воспроизводимости по Муру, целесообразно определить ряд других интересных с теоретической и прикладной точек зрения классов структур, наделенных некоторым присущим им общим свойством и охарактеризовать эти классы в терминах новых либо уже исследованных понятий. Так, например, с ***L***-классом *линейных* классических ***1-ОС*** можно дополнительно связать одно очень интересное свойство, присущее всем структурам класса – возможность генерировать строки обобщенного треугольника Паскаля [12]. Несколько подробнее речь об этом будет идти в последней главе книги.

Между тем, использование нестандартных подходов позволило выявить целый ряд достаточно интересных классов ***ОС***-моделей, обладающих свойством существенной воспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ.*** В частности, определим одну полезную модификацию логической ***XOR***-операции над целыми положительными числами следующим образом: ***Операция x XOR1 y над двумя целыми положительными числами x и y определяется как побитная XOR-операция без переноса в старшие разряды над бинарными эквивалентами данных чисел; при этом, длина бинарного представления определяется длиной представления максимального числа,*** например

$$12\ \ XOR1\ 19 \equiv \begin{bmatrix} 01011_{12} \\ 10011_{19} \end{bmatrix} \equiv 11000 \equiv 24$$

Очевидно, что в *бинарном* случае введенная нами операция ***XOR1*** и классическая операция ***XOR*** совпадают. В частности, для множества чисел ***A***={***0,1,2,***3} таблица ***XOR1***-операции определяется нижеследующими таблицами, а именно:

XOR1	000	001	010	011
000	000	001	010	011
001	001	000	011	010
010	010	011	000	001
011	011	010	001	000

XOR1	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Несложно убедиться, что множество ***A***={***0,1,2,3, …, h***} ***(h=2k+1; k=0,1,2, …)*** относительно операции ***XOR1*** образует конечную аддитивную абелеву группу с нейтральным ***0***-элементом, для которой любой элемент обладает единственным обратным ему элементом, совпадающим с ним самим. В качестве программной реализации ***XOR1***-операции можно использовать специальную простую процедуру ***&XOR1***, запрограммированную в среде пакета ***Maple*** [97-118], которая обеспечивает выполнение ***XOR1***-операции над любым конечным множеством ***N*** положительных целых чисел, задаваемых в качестве фактических операндов.

```
> `&XOR1` := proc()
local a, b, c, k, j;
```

```
   if nargs = 0 then error  "factual arguments are missing"  elif
      {seq(type(args[k], 'nonnegative'), k = 1 .. nargs)}  <> {true}  then
      error  "factual arguments must be positive integers"
   elif nargs = 1 then return  args else  c := ""  end if;
   a := map(convert, sort([seq(convert(args[k], 'binary'), k = 1 .. nargs)]), 'string');
   b := [seq(cat("0" $ (k = 1 .. length(a[-1]) - length(a[j])), a[j]), j = 1 .. nops(a))];
   for k to length(b[1])  do
     if type(add(parse(b[j][k]), j = 1..nops(b)), 'odd') then c:=cat(c, "1") else c:=cat(c,"0") end if
   end do;   convert(c, 'decimal', 'binary')
end proc:
> `&XOR1`(3,1), 3 &XOR1 1, `&XOR1`(19,12,66), 19 &XOR1 12 &XOR1 66;   ⇒  2, 2, 93, 93
> h:= 32:   M:= matrix(h, h, []):   for k to h do for j to h do M[k, j]:= `&XOR1`(k-1, j-1) end do
   end do;  evalm(M);
```

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	20	21	22	23	16	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	21	20	23	22	17	16	19	18	29	28	31	30	25	24	27	26
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9	22	23	20	21	18	19	16	17	30	31	28	29	26	27	24	25
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8	23	22	21	20	19	18	17	16	31	30	29	28	27	26	25	24
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	24	25	26	27	28	29	30	31	16	17	18	19	20	21	22	23
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6	25	24	27	26	29	28	31	30	17	16	19	18	21	20	23	22
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	26	27	24	25	30	31	28	29	18	19	16	17	22	23	20	21
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	27	26	25	24	31	30	29	28	19	18	17	16	23	22	21	20
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	28	29	30	31	24	25	26	27	20	21	22	23	16	17	18	19
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2	29	28	31	30	25	24	27	26	21	20	23	22	17	16	19	18
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1	30	31	28	29	26	27	24	25	22	23	20	21	18	19	16	17
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
20	21	22	23	16	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
21	20	23	22	17	16	19	18	29	28	31	30	25	24	27	26	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
22	23	20	21	18	19	16	17	30	31	28	29	26	27	24	25	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
23	22	21	20	19	18	17	16	31	30	29	28	27	26	25	24	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
24	25	26	27	28	29	30	31	16	17	18	19	20	21	22	23	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
25	24	27	26	29	28	31	30	17	16	19	18	21	20	23	22	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
26	27	24	25	30	31	28	29	18	19	16	17	22	23	20	21	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
27	26	25	24	31	30	29	28	19	18	17	16	23	22	21	20	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
28	29	30	31	24	25	26	27	20	21	22	23	16	17	18	19	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
29	28	31	30	25	24	27	26	21	20	23	22	17	16	19	18	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
30	31	28	29	26	27	24	25	22	23	20	21	18	19	16	17	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Выше представлен исходный код процедуры ***&XOR1*** и примеры ее применения. Так, например, вывод таблицы ***XOR1***-операции для множества вида ***A***={***0,1, ..., 31***} дает возможность установить ее структурную организацию, представляющую и самостоятельный интерес.

Экспериментально-теоретический анализ *классических* ***d-ОС*** показал [88,90], что при сделанных предположениях может быть сформулировано нижеследующее предложение, а именно.

Предложение 16. ***Классическая d-ОС ($d \geq 1$) с алфавитом A={0,1,2, ..., h} ($h=2^k-1$; k=1,2,3,…), ЛФП $\sigma^{(n)}$ которой определяется соотношением вида $\sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_n)$ = &XOR1($x_1,x_2, ..., x_n$), обладает свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура конечных КФ.***

```
> TestL := proc(S::string, n::posint, m::posint)
local a, b, c, k, j, t;
   c := cat("0" $ (k = 1 .. m - 1));   a, t, b := cat(c, S, c), 0, "";
   do
      for k to length(a) - m + 1 do b:=cat(b, `&XOR1`(seq(parse(a[k + j]), j = 0..m - 1))) end do;
      if n <= nops(Search2(b, {S})) then break else assign('a' = cat(c,b,c), 't' = t+1); b:="" end if
   end do;
      print(S, n, t)
end proc:
> TestL("123456007000654321", 32, 4);  ⇒  "123456007000654321", 32, 671
```

В частности, для тестирования такого типа структур может быть использована процедура ***TestL,*** реализованная в среде упомянутой ***СКА Maple*** и чей исходный код приведен выше. Вызов этой процедуры ***TestL(S,n,m)*** возвращает исходную строку ***S*** состояний ***ОС*** с ***ШС*** размера ***m,*** число ***n*** вхождений копий ***S*** в строку, *сгенерированную* на шаге, указанном третьим значением результата. Проведенные нами теоретические исследования в *сочетании* с компьютерными экспериментами показали, что таким образом определенная классическая ***1-ОС*** обладает свойством *универсальной* воспроизводимости конечных ***КФ*** в смысле Мура. При этом, было показано [88,90], что данный результат экстраполируется и на случай классических ***d-ОС ($d \geq 2$)*** с произвольным индексом ***X*** соседства структуры. Таким образом, вполне уместно сформулировать следующий вывод:

По отношению к свойству универсальной воспроизводимости в смысле Мура класс структур d-ОС ($d \geq 1$) несколько шире класса структур, определяемых линейными ОС-моделями.

Предложение ***16*** в значительной мере дает ответ на вопрос существования *классических* структур, отличных от *линейных* ***ОС*** и обладающих свойством *универсальной* воспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ.*** Более того, ниже формулируется предположение, которое позволяет более широко трактовать класс ***ОС-***моделей, обладающих свойством *универсальной* либо *существенной* воспроизводимости в смысле Мура конечных конфигураций.

Для тестирования произвольных ***1-ОС*** с алфавитом ***A={0,1,...,a-1} ($2 \leq a \leq 10$)*** и индексом соседства ***X={0,1,2, ..., n-1}*** вполне могут оказаться достаточно полезными нижеследующие две процедуры, реализованные в программной среде пакета ***Maple*** [97-118]. В частности, процедура $\Theta(G,x_1,...,x_n)$ обеспечивает бинарную Θ-операцию $\Theta(G,x,y) = \Theta_{x,y}$, заданную нижеследующей операционной Θ-таблицей, над конечным кортежем операндов – элементов ***A-***алфавита. Так, вызов процедуры $\Theta(G,x_1,...,x_n)$ процедуры обеспечивает возврат результата применения операции Θ к операндам $x_1,x_2,...,x_n$ $\{x_j \in A;\ j=1..n\}$. Практически, Θ-таблица задается ***G-***массивом размерности ***axa,*** согласно нижеследующей таблице, а именно:

Θ	*0*	*1*	*2*	.....	*a-1*
0	$\Theta_{0,0}$	$\Theta_{0,1}$	$\Theta_{0,2}$	.....	$\Theta_{0,a-1}$
1	$\Theta_{1,0}$	$\Theta_{1,1}$	$\Theta_{1,2}$	.....	$\Theta_{1,a-1}$
2	$\Theta_{2,0}$	$\Theta_{2,1}$	$\Theta_{2,2}$	.....	$\Theta_{2,a-1}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
a-1	$\Theta_{a-1,o}$	$\Theta_{a-1,1}$	$\Theta_{a-1,2}$	.....	$\Theta_{a-1,a-1}$

Если количество фактических аргументов менее **2** или аргументы, начиная со второго, содержат значения не из ***G***-массива, инициируется ошибка, в противном случае возвращается указанный результат. Тогда как вызов ***TestP(G, S, n, m)*** второй процедуры возвращает количество итераций ***1-ОС*** с индексом соседства ***X=*{*0,1, ..., m-1*}**, которые потребовались для генерации из начальной ***КФ S*** состояний из ***A***-алфавита конфигурации, содержащей по меньшей мере ***n*** вхождений ***КФ S.*** В случае прерывания выполнения процедуры по ***stop***-клавише при *затянувшемся* вычислении через *глобальную* ***VGS***-переменную возвращается количество итераций ***ГФП*** на текущий момент прерывания. Таблица для бинарной **Θ**-операции задается в виде массива первым ***G***-аргументом. Третья процедура ***KrArt(G, n, m, p, h)***, имея первый аргумент ***G*** аналогичным случаю процедуры ***TestP***, располагает четырьмя дополнительными аргументами для обеспечения тестирования на *воспроизводимость* генерируемых псевдослучайным образом начальных ***КФ***, а именно: ***p –*** число вхождений блочной ***КФ***, ***h –*** индекс соседства ***X=*{*0,1,..., h-1*}**, ***n –*** алфавит ***A=*{*0,1,..., n-1*}** состояний и ***m –*** максимальная длина тестируемых начальных ***КФ.*** Исходные тексты процедур и примеры их применения представлены ниже. Для понимания организации этих очень простых процедур вполне достаточно знакомства с пакетом ***Maple*** в объеме, например, наших книг [97-118].

```
> Θ := proc(G::array)
local a, k;
   if nargs = 0 or {seq(belong(args[k], G), k = 2 .. nargs)} <> {true} then
      error "summands are invalid or are missing"
   elif nargs = 2 then return args[2]  else  a := args[2];
      for k from 3 to nargs do a := G[a, args[k]] end do
   end if;
      a
end proc:
> TestP := proc(G::array, S::string, n::posint, m::posint)
local a, b, c, k, j, t;
global VGS;
   c := cat("0" $ (k = 1 .. m - 1));   a, t, b, VGS := cat(c, S, c), 0, "", 0;
   do
      for k to length(a) - m + 1 do b := cat(b, Θ(G, seq(parse(a[k + j]), j = 0 .. m - 1)))  end do;
      if n <= nops(Search2(b, {S})) then break
      else assign('a' = cat(c, b, c), 't' = t + 1)
      end if;
      VGS := VGS + 1
   end do;
   t
end proc:
> C := array(0..2,0..2): C[0,0]:=0: C[0,1]:=2: C[0,2]:=1: C[1,0]:=2: C[1,1]:=0: C[1,2]:=1: C[2,0]:=1:
  C[2,1]:=2:  C[2,2]:=0:   TestP(C, "102212011121", 25, 2);    ⇒   8
> KrArt := proc(G::array, n::posint, m::posint, p::posint, h::posint)
local a, b, c, d, k;
   assign(a = rand(0 .. n), b = rand(2 .. m));
   do
      c := cat("", parse(cat("", seq(a(), k = 1 .. b()))));
      for k from length(c) by -1 to 1 do
         if c[k] <> "0" then break end if
      end do;
      c := c[1 .. k];
```

```
    if c <> "" then lprint(c); lprint(TestP(G, c, p, h))  end if
  end do
end proc:
> KrArt(C, 2, 12, 6, 2);
"1001200001"
8
"21110111"
9
"10020212"
6
"1010201221"
5
"1201"
6
"120212221121"
6
"2021112"
5
"10022"
6
"10200210002"
6
"2200011112"
8
"1001"
5
"2121"
5
"1112121"
5
"120212001121"
"120202"   –   Warning, computation interrupted
```

Симуляционный подход с использованием указанных средств позволяет определить ряд типов ***1-ОС,*** обладающих свойством *существенной воспроизводимости* конечных ***КФ,*** а также ряд других весьма интересных динамических свойств такого класса структур. Несмотря на всю их простоту, они в совокупности с другими зарекомендовали себя как достаточно эффективные средства при исследованиях указанных вопросов. В частности, в результате подобного экспериментального исследования была обнаружена ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства, чей алфавит $A=\{0,1,2\}$ и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}(x,y) = x\Theta y$, тогда как **Θ-**операция определяется соответствующей таблицей

Θ	*0*	*1*	*2*
0	*0*	*2*	*1*
1	*2*	*0*	*1*
2	*1*	*2*	*0*

Несложно убедиться, что данная структура не обладает неконструируемостью ***НКФ-***типа, тогда как каждая ***КФ*** вида $c=\square x_1x_2x_3 \ldots 21\square$ $\{x_1,x_2,x_3\in A\}$ для нее является ***НКФ-1,*** что с очевидностью следует из попытки определения для нее непосредственного предшественника c^{-1}, а именно:

c^{-1} =	.....	.....	.....	.....	2	1	2	2	2	.....
c^{-1} =	.....	.....	.....	.....	0	1	2	2	2	.....
c^{-1} =	.....	.....	.....	.....	1	0	2	2	2	.....
c^{-1} =	–	–	–	–	–	–	1	1	1	.....
c^{-1} =	–	–	–	–	–	2	0	0	0	.....
c =	□	x_1	x_2	.....	2	1	0	0		.....

Экспериментальное исследование вышеуказанной классической ***1-ОС*** подтвердило наличие для нее свойства *существенной воспроизводимости* по Муру конечных конфигураций.

Между тем, ряд проработок в данном направлении позволяет сформулировать ряд достаточно интересных предположений, из которых отметим следующее. В частности, проведенное нами теоретико-экспериментальное исследование *классических* структур ***1-ОС*** показало, что в качестве структур, обладающих универсальной воспроизводимостью конечных ***КФ*** в смысле Мура могут выступать структуры, обладающие нижеследующим общим свойством. В качестве классической ***1-ОС*** выбирается структура с простейшим индексом соседства ***X***={***0,1***}, алфавитом ***A***={***0,1, ..., a-1***}. На множестве ***A*** задается бинарная ⊗-операция, определяемая нижеследующей операционной ⊗-таблицей, а именно:

⊗	0	1	2	...	a-2	a-1
0	0	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	...	$x_{0,a-2}$	$x_{0,a-1}$
1	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,a-2}$	$x_{1,a-1}$
2	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,a-2}$	$x_{2,a-1}$
...	...	...	...	...	...	...
a-2	$x_{a-2,0}$	$x_{a-2,1}$	$x_{a-2,2}$	...	$x_{a-2,a-2}$	$x_{a-2,a-1}$
a-1	$x_{a-1,0}$	$x_{a-1,1}$	$x_{a-1,2}$	...	$x_{a-1,a-2}$	$x_{a-1,a-1}$

Элементы определяющей ⊗-операцию таблицы удовлетворяют нижеследующим условиям:

$$(\forall h, j, k)(j \neq k \rightarrow x_{h,j} \neq x_{h,k})\,\&\,(\forall h, j, k)(j \neq k \rightarrow x_{j,h} \neq x_{k,h})$$
$$x_{h,j},\ x_{h,k},\ x_{j,h},\ x_{k,h} \in A = \{0, 1, \ldots, a-1\};\quad h, k, j = 0..a-1$$

Суть данных условий состоит в том, что каждый столбец и каждая строка ⊗-таблицы содержат строго по одному вхождению элементов из ***A***-алфавита. Например, вполне можно ограничиться условием, что ⊗-операция на ***A*** образует *конечную* Абелеву группу. Итак, из экспериментально-теоретического исследования *классических* ***1-ОС*** с весьма простыми индексами соседства X_1={***0,1***} и X_2={***0,1,2***}, а также алфавитом ***A***={***0,1,...,a-1***} ***(a=2..5)*** имеются веские основания сформулировать следующее достаточно интересное предположение, а именно:

Классическая d-ОС (d≥1) с индексом соседства X={0,1, ..., n-1} и алфавитом A={0,1, ..., a-1}, ЛФП $\sigma^{(n)}$ ***которой определяется соотношением вида*** $\sigma^{(n)}(x_o,x_1,x_2,...,x_{n-1})=\otimes(x_o,x_1,x_2,...,x_{n-1})$, ***обладает свойством универсальной воспроизводимости конечных КФ в смысле Мура, где*** x_j ***(j=0..n-1) есть точки (координаты автоматов шаблона соседства) в*** Z^d.

```
> CfCopy := proc(c::string, A::array, n::posint)
 local a, b, k, h, g;    a, b, g := "0" || c || "0", "", 0;    do
     for k to length(a) - 1 do b := cat(b, A[parse(a[k]), parse(a[k + 1])])  end do;
     if nargs = 4 then print(b) end if;  h := nops(Search2(b, {c}));
     if n <= h then return n, g  else assign('a' = cat("0", b, "0"), 'b' = "", 'g' = g + 1)  end if
```

```
  end do  end proc:
> A:= array(0..3,0..3): A[0,0]:=0: A[0,1]:=3: A[0,2]:=2: A[0,3]:=1: A[1,0]:=1: A[1,1]:=0: A[1,2]:=3: A[1,3]:=2:
A[2,0]:=2: A[2,1]:=1: A[2,2]:=0: A[2,3]:=3: A[3,0]:=3: A[3,1]:=2: A[3,2]:=1: A[3,3]:=0:
> CfCopy("12312230232010113201003231231 2", A, 32);   ⇒  32, 4031
```

Для тестирования данного типа ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства ***X*** можно использовать ***Maple***-процедуру, чей вызов ***CfCopy(c,M,n)*** возвращает количество <*копий **n**, итераций **g***> для ***КФ c*** при ⊗-операции, заданной массивом ***M***. При этом, при задании ***4****-го необязательного* аргумента выводится история генерации последовательности ***КФ*** $<c>[\tau^{(2)}]$. В процессе исследований [88,90] был получен целый ряд достаточно интересных свойств самовоспроизводящихся конечных ***КФ*** в зависимости от бинарной ⊗-операции, как определенной на ***A***-множестве, так и участвующей в определении локальной функции ***ОС***-модели. В частности, эксперименты показали, что число шагов ***T*** классической ***1-ОС***, обладающей свойством *универсальной* воспроизводимости по Муру, и требуемых для получения ***m*** копий конечной ***КФ*** c_o может быть достаточно быстрорастущей функцией от пяти переменных $T(\otimes,a,n,c_o,m)$, при алфавите $A=\{0,1, ..., a-1\}$ и индексе ***X*** соседства $X=\{0,1, ..., n-1\}$, например, $(\exists\otimes)(\exists h)(\exists p)(c_o \geq h\ \&\ m \geq p \rightarrow T(\otimes,4,2,c_o, m) > 2^{|c_o|}m^3)$.

Можно показать [88,90], что в случае справедливости приведенного предположения совместно с *линейными классическими* ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ будет существовать не менее $[(a-1)!]^2$ структур с алфавитом $A=\{0,1, ..., a-1\}$, произвольным индексом соседства $X=\{x_o,x_1, ..., x_{n-1}\}$ и ***ЛФП*** которой определяется соотношениями вида $\sigma^{(n)}(x_o,x_1, ..., x_{n-1}) = \otimes(x_o,x_1, ..., x_{n-1})$, обладающих свойством *универсальной воспроизводимости* конечных ***КФ*** в смысле Мура. Этот результат позволит довольно существенно расширить класс ***ОС***-моделей с указанным весьма интересным свойством генерации конечных конфигураций; в свою очередь, ряд ⊗-операций могут представить определенный интерес при целом ряде исследований структур ***d-ОС*** $(d \geq 1)$.

До сих пор мы рассматривали классические ***ОС***-модели в свете их *максимальных* генерационных возможностей относительно множества *всех* конечных ***КФ*** безотносительно к самому порядку их генерации. Однако, к данной проблеме непосредственно примыкает и вопрос о возможностях генерации ***ОС***-моделью наперед заданных историй конечных ***КФ***, т.е. множества ***КФ*** $<c_o>[\tau^{(n)}]$ в его динамике. Таким образом, в общей постановке данный вопрос может быть сформулирован следующим образом, а именно:

Существует ли для заданной истории конфигураций $\Omega=\{c_o \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow c_4 \rightarrow ... \rightarrow c_k \rightarrow ...\}$ $c_o \in C(A,d,\phi)$, ***заданных в конечном A-алфавите, глобальная функция*** $\tau^{(n)}$, ***определенная в том же самом алфавите A и генерирующая ее, т.е. может ли иметь место соотношение*** $<c_o>[\tau^{(n)}] = \Omega$?

Нетрудно убедиться, что в общем случае ответ на данный вопрос отрицателен. В качестве очень простого примера достаточно рассмотреть историю конфигураций для *классической* ***1-ОС*** вида: c_t=□$\alpha 0^t c`_t 0^t \alpha$□; $\alpha \in A\backslash\{0\}$, $c_t, c`_t \in C(A,\phi)$ $(t=0,1,2, ...)$ и 0^t – отрезок ***t***-длины из единичных автоматов в ***0***-состояниях *покоя*. В качестве упражнения читателю предлагается показать, что не существует *классической* ***1-ОС***$=<Z^1,A,\tau^{(n)},X>$, генерирующей ***КФ***-последовательности вышеуказанного вида. Данного типа ***КФ***-последовательности (*и их обобщения на **d**-мерный случай*; $d>1$) характеризуются тем, что на их основе можно доказывать невозможность целого ряда динамических феноменов в классических и даже полигенных ***ОС***-моделях. В *алгоритмическом* контексте задача определения возможности генерации произвольной ***Ω***-истории конечных ***КФ*** посредством классической ***ОС***-модели алгоритмически неразрешима [55]. В плане же исследования фундаментальных свойств ***ОС***-моделей было бы весьма желательным определить и исследовать ряд других плодотворных понятий ***универсальных*** свойств структур ***d-ОС (d ≥ 1)***, отличных от *воспроизводимости* конечных ***КФ*** и *вычислимости*, рассматриваемых ниже. С вопросами более практического подхода к задаче реализации *самовоспроизводящихся* промышленных автоматов можно ознакомиться в достаточно интересной научно-популярной книге [302], тогда как в целом ряде работ можно ознакомиться с другими интересными обсуждениями самовоспроизводимости в ***d-ОС (d ≥ 1)*** [536]. В свете бурно развивающихся нанотехнологий данная проблематика представляется нам весьма актуальной, свидетельством чему является и неуклонный рост к ней интереса [536].

3.3. Универсальные и самовоспроизводящиеся конечные конфигурации для однородных структур на разбиении

Однородные структуры на разбиении (***ОСнР***), определенные в разделе ***1.2*** монографии и частично рассмотренные выше, представляют особый интерес для задачи физического моделирования, допуская относительно несложное программирование такого фундаментального свойства как ***обратимость динамики***. В этой связи относительно класса ***ОСнР***-моделей возникают вопросы о возможности существования для них *универсальных* и *самовоспроизводящихся* в смысле Мура ***КФ***, в определенной степени характеризующих экстремальные конструктивные возможности данного класса структур. Тут же еще раз следует отметить, что используемый нами термин «*структур на разбиении*» эквивалентен термину «*индекс соседства Марголуса*». Если используемый нами термин представляется более адекватным сути отражаемого им понятия переразметки Z^d-пространства, т.к. он отражает факт динамики изменения алгоритма применения индекса соседства, тогда как термин «***индекс соседства Марголуса***» более ассоциируется со статичными индексами соседства типа Неймана-Мура, Мура и другими.

Предположим, что для некоторой ***ОСнР***-модели существует конечное множество *универсальных* конечных ***КФ (УКФ)*** $G = \{c_k \in C(A,d,\phi) \mid k=1\ ..\ p\}$, а именно:

$$\tau^{(m)}: \begin{cases} c_1 \Rightarrow c_1^1 \Rightarrow c_1^2 \Rightarrow c_1^3 \Rightarrow\ \dots \Rightarrow c_1^k \Rightarrow\ \dots \\ c_2 \Rightarrow c_2^1 \Rightarrow c_2^2 \Rightarrow c_2^3 \Rightarrow\ \dots \Rightarrow c_2^k \Rightarrow\ \dots \\ ========================== \\ c_p \Rightarrow c_p^1 \Rightarrow c_p^2 \Rightarrow c_p^3 \Rightarrow\ \dots \Rightarrow c_p^k \Rightarrow\ \dots \end{cases} \qquad (\alpha)$$

где $\tau^{(m)}$ – *глобальная функция* ***ОСнР***-модели. В таком случае можно утверждать о существовании для функции $\tau^{(m)}$ минимального множества такого, что выполняется следующее определяющее соотношение $\bigcup_k <c_k>\left[\tau^{(m)}\right] = C(A,d,\phi)$. Но тогда из минимальности ***G***-множества ***УКФ***, а также детерминированности ***ГФП*** структуры непосредственно следует необходимость (α) выполнения соотношения $(\forall q,v)(q \neq v \rightarrow c_q \neq c_v \& c_q \notin <c_v>[\tau^{(m)}])$. Следовательно, ***G***-множество должно содержать неконструируемые ***КФ***. С другой стороны, наличие для структуры ***ОСнР*** неконструируемости эквивалентно (*как следует из результатов главы* 2) наличию для нее пусть и рекурсивного, однако бесконечного множества ***НКФ***, что противоречит конечности ***G***-множества ***УКФ***. Следовательно имеет место результат, аналогичный рассмотренному случаю классических ***ОС***-моделей:

Структура на разбиении d-ОСнР не может обладать конечным множеством УКФ.

Предположим теперь, что существуют структуры ***d-ОСнР***, обладающие свойством *универсальной* воспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ***. Следовательно, для данных моделей должны отсутствовать ***НКФ*** и ***C(A,d,∞)***-множество бесконечных ***КФ*** должно быть замкнутым, т.е. для них должны отсутствовать и ***НКФ-1*** в контексте терминологии классических ***ОС***-моделей. Но тогда достаточно простой анализ динамики такого типа структур ***ОСнР*** показывает, что относительно каждой конечной c_o-***КФ*** граф состояний будет иметь следующий вид, а именно:

$$\tau^{(m)}: \dots \Rightarrow c_{-k} \Rightarrow \dots \Rightarrow c_{-1} \Rightarrow c_o \Rightarrow c_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow c_k \Rightarrow \dots \quad (k = 0;\ \pm1;\ \pm2;\dots),$$

в котором все состояния-***КФ*** различны и являются самовоспроизводящимися в смысле Мура**.** В качестве примера можно привести следующую очень простую структуру ***ОСнР***$=\langle Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi\rangle$, определение которой полностью соответствует разделу ***1.2***, достаточно прозрачно и каких-либо дополнительных пояснений не требует. Между тем, уже класс данных простых моделей ***ОСнР*** обладает свойством универсальной вычислимости.

Рассмотрим теперь вопрос моделирования произвольной однородной структуры на разбиении ***ОСнР***$=\langle Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi\rangle$ классической структурой ***ОС***$=\langle Z^1,A,\tau^{(n)},X^*\rangle$ с переменным X^*-индексом соседства, применение входящих в который подиндексов определяется координатами автомата моделирующей структуры. Не нарушая общности, пусть теперь с учетом блочной переразметки два последовательных шага моделируемой структуры ***ОСнР***$=\langle Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi\rangle$ (*симулирующие один шаг моделирующей структуры*) над произвольной конфигурацией c^{**} принимают в общем случае нижеследующий простой вид, а именно:

разметка	*динамика КФ c** с учетом j-переразметки Z^1-пространства*	*t*
....	....	..
$j=0$	$\dots \Vert\ s_{k-2}\ \ s_{k-1}\ \Vert\ s_k\ \ s_{k+1}\ \Vert\ s_{k+2}\ \ s_{k+3}\ \Vert\ s_{k+4}\ \ s_{k+5}\ \Vert \dots$	0
$j=1$	$\dots\ s'_{k-2}\ \Vert\ s'_{k-1}\ \ s'_k\ \Vert\ s'_{k+1}\ \ s'_{k+2}\ \Vert\ s'_{k+3}\ \ s'_{k+4}\ \Vert\ s'_{k+5} \dots$	1
$j=2$	$\dots \Vert\ s''_{k-2}\ \ s''_{k-1}\ \Vert\ s''_k\ \ s''_{k+1}\ \Vert\ s''_{k+2}\ \ s''_{k+3}\ \Vert\ s''_{k+4}\ \ s''_{k+5}\ \Vert \dots$	2
....	....	..

$$s_{k+p},\ s`_{k+p},\ s''_{k+p} \in A \quad (p = 0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \dots)$$

$$\begin{cases} x'_{k-1} = f^1_{k-1}(x_{k-2}, x_{k-1}) & x'_k = f^1_k(x_k, x_{k+1}) \\ x'_{k+1} = f^1_{k+1}(x_k, x_{k+1}) & x'_{k+2} = f^1_{k+2}(x_{k+2}, x_{k+3}) \\ x'_{k+3} = f^1_{k+3}(x_{k+2}, x_{k+3}) & x'_{k+4} = f^1_{k+4}(x_{k+4}, x_{k+5}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''_k = f^2_k(x'_{k-1}, x'_k) = f^2_k(f^1_{k-1}(x_{k-2}, x_{k-1}), f^1_k(x_k, x_{k+1})) = F^2_k(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) \\ x''_{k+1} = f^2_{k+1}(x'_{k+1}, x'_{k+2}) = f^2_{k+1}(f^1_{k+1}(x_k, x_{k+1}), f^1_{k+2}(x_{k+2}, x_{k+3})) = F^2_{k+1}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}) \end{cases}$$

С учетом сказанного и в виду определения ***ОСнР***-модели (раздел ***1.2***) несложно убедиться, что s,s',s''-состояния единичных $(k+p)$-автоматов в *моделируемой* ***ОСнР***-структуре связаны системой функциональных дискретных уравнений, представленной выше. Из нее несложно усмотреть, что моделирующая ***ОС***$=\langle Z^1,A,\tau^{(n)},X^*\rangle$ должна располагать переменным индексом X^* соседства $X^*=\langle X_k=\{-2,-1,0,1\},\ X_{k+1}=\{-1,0,1,2\}\rangle$, применение той либо иной компоненты $\{X_k \mid X_{k+1}\}$ которого определяется координатой единичного $(k+p)$-автомата структуры ***ОСнР*** $(p=0;\ \pm1;\ \pm2;\ 3;\ \dots)$. Таким образом, имеет место следующий результат.

<u>Предложение 17</u>. Структура ОСнР$=\langle Z^1,A,2,\Psi^{(2)},\Xi\rangle$ ***на разбиении 2-моделируется структурой ОС***$=\langle Z^1,A,\tau^{(4)},X^*\rangle$ ***с переменным индексом соседства, применение каждой из двух компонент которого определяется только координатой текущего единичного автомата структуры.***

Естественно, что в целом ряде конкретных случаев индекс соседства моделирующей структуры, оставаясь переменным, вместе с тем состоит из намного более простых компонент **–** *подиндексов*, определяющих меньшие шаблоны соседства. Подобный подход к *моделированию* структур ***ОСнР*** на основе ***ОС*** позволяет осуществлять весьма простую их компьютерную реализацию**.** В качестве данного типа ***ОСнР*-**моделей**,** допускающих для их симулирования существенно более простые множества *подиндексов***,** образующих *переменный индекс* соседства в *симулирующих* их классических ***ОС*-**моделях**,** рассмотрим следующий довольно простой пример. Локальную блочную функцию $\Psi^{(2)}$ такой ***ОСнР*-**модели определяем параллельными блочными подстановками вида: $\Psi^{(2)}$***: xy*** $\Rightarrow$ $\{$***x+y (mod a)***$\}$***y; x,y***$\in$***A*.** Нетрудно убедиться**,** определенное такой ***ЛБФ*** отображение $\Psi^{(2)}: A^2 \rightarrow A^2$ является взаимно однозначным**,** а структура ***ОСнР*** в целом **2-***моделирует* однородную структуру ***1-ОС*,** определенную в том же самом ***А*-**алфавите**,** но с *переменным индексом* соседства**,** зависящим от координаты единичного ***k*-**автомата Z^1**-**пространства X_{2k}={*0,1*} и X_{2k+1}={*0,1,2*} ***(k=0, ±1; ±2;...)*,** и линейными ***ЛФП*** соответственно следующего весьма простого вида, а именно:

$$\sigma^{(2)}_{2k}(x,y) = x+y \ \ (mod\ a)\,, \qquad \sigma^{(3)}_{2k+1}(x,y,z) = x+y+z \ \ (mod\ a)\,;\ \ x,y,z \in A \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

При сделанных предположениях можно показать [90]**,** что определенная таким образом модель ***ОСнР*** обладает свойством *универсальной воспроизводимости* конечных ***КФ*** и ее динамика является полностью обратимой**.** В общем виде имеет место следующий результат.

<u>Предложение 18</u>. Для каждого целого d≥1 существуют структуры d-ОСнР, которые обладают свойством универсальной воспроизводимости конечных конфигураций, чья динамика является полностью обратимой.

Между тем, в настоящее время данный вопрос не является достаточно проработанным и требует дальнейшего изучения аналогичного случаю классических ***ОС*-**моделей. В частности, в качестве иллюстрации приведем пример структуры ***ОСнР = <Z¹,A,2,Ψ⁽²⁾,Ξ>***, для которой ***A***={*0,1*}, а ***ЛБФ*** определяется параллельными блочными подстановками вида: $\Psi^{(2)}$ **=** {***00*** $\Rightarrow$ ***00*, *01*** $\Rightarrow$ ***11*, *10*** $\Rightarrow$ ***10*, *11*** $\Rightarrow$ ***01***}**.** Далее приведен небольшой фрагмент генерации истории конфигурации ***co = □1011□*** в среде эквивалентной данной ***ОСнР*-**модели ***ОС*-**модели в *прямом***,** тогда как в среде модели ***ОСнР*** в *обратном* порядках **(***с учетом блочной переразметки***).** Данный пример достаточно прост и каких-либо дополнительных пояснений не требует.

Генерация истории co-КФ в среде ОС (вперед) и в среде ОСнР (обратно)																							***t***
....																	....						....
						...	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	-8
Генерация обратной						...	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	-7
истории из начальной						...	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	-6
КФ co=□1011□ в среде						...	...	..	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	-5
ОСнР-модели с учетом						...	...	..	..	..	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	-4
блочной перекоммутации								..	..	..	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	-3
однородного Z¹-пространства модели										..	..	..	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	-2
										..	..	..	..	..	0	1	1	1	1	1	0	0	-1
...	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	..	X
										..	..	..	..	..	0	0	1	0	1	1	0	0	0
Генерация истории КФ, эквивалентной											..	..	..	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
ОСнР-модели классической ОС-моделью;										..	..	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	2
один шаг ОС-модели соответ-							...	..	..	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	3
ствует двум шагам						...	...	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	4
ОСнР-модели					...	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	5
...	...	...	...	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	6
...	...	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	7
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	8
....																	....						....

Таким образом, в отличие от случая классических ***ОС***-моделей, рассмотренный выше феномен универсальной воспроизводимости по Муру конечных ***КФ*** в которых непосредственно связан с существованием неконструируемости типа ***НКФ-1***, т.е. отсутствием согласно нашего понимания (*см. определение* **12**) *обратимости динамики*, тогда как в случае ***ОСнР***-моделей характерно наличие феномена *универсальной* воспроизводимости по Муру конечных ***КФ*** при необходимости ***полной*** *обратимости динамики*. При этом, в рамках этого класса ***ОСнР***-моделей можно наблюдать весьма интересный феномен, а именно.

Предложение 19. Динамика самовоспроизводящихся конечных КФ в обратимой модели ОСнР на разбиении инвариантна относительно времени – в этой модели каждая конечная КФ является самовоспроизводящейся в смысле Мура в прямом и в обратном направлениях временной шкалы.

Следовательно, универсальная воспроизводимость для класса ***ОСнР***-моделей ***инвариантна*** по отношению к ходу течения времени, иллюстрируя принципиальную возможность ***«заглянуть»*** как в будущее, так и в прошлое истории каждой конечной ***КФ***. Между тем, сама закономерность *воспроизведения* копий произвольной конечной ***КФ*** в такого типа линейных ***ОСнР***-моделях будет значительно сложнее поддаваться количественной оценке, чем в случае классических линейных ***ОС***-моделей [90], характеризуемых общим для них свойством *универсальной* воспроизводимости конечных ***КФ***. Хотя при рассмотрении обобщенного класса *линейных* классических ***ОС***-моделей, представленных выше, также в ряде случаев встречаются определенные затруднения. Здесь же вполне уместно упомянуть еще об одной интересной проблеме существования ***ОСнР***-моделей, *удваивающих* произвольную конечную ***КФ***. Аналогично случаю классических ***ОС***-моделей здесь имеет место отрицательный результат [90]: ***Не существует ОСнР-модели, которая удваивает произвольную конечную конфигурацию, определенную в том же самом А-алфавите ОСнР.*** Но доказательство данного результата оказалось существенно более сложным, чем в аналогичном случае для классических ***ОС***-моделей. Поэтому для изучения динамики ***ОСнР***-моделей весьма широко используются средства компьютерного симулирования [536].

Рассмотрев вопрос *универсальной* воспроизводимости по Муру конечных ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях и ***ОСнР***, вкратце представим еще одну *параллельную* систему переработки слов, которую вполне можно ассоциировать с двумя предыдущими структурами. Рассмотрим класс грамматик с *параллельными подстановками* в качестве правил вывода. Ниже будет отмечено, что требование параллельного применения изотонных продукций в т.н. *изотонных структурных грамматиках* ***(ИСГ)*** приводит нас к понятию *параллельных грамматик* ***(ПГ)***. Между тем, так как длины правых частей параллельных продукций ***(ПП)*** следующего вида:

$$X_1^k X_2^k X_3^k X_4^k \dots X_{m_k}^k \;\Rightarrow\; Y_1^k Y_2^k Y_3^k Y_4^k \dots Y_{n_k}^k$$
$$(X_j^k, Y_q^k \in A;\; j = 1..m_k;\; q = 1..n_k;\; k = 1..p) \qquad (GS)$$

могут превышать ***1***, то для устранения неоднозначности при одновременном применении ***ПП*** к перерабатываемым грамматикой словам (*конечным конфигурациям* ***1-ОС***) задается специальная функция ***W*** однозначного *выбора состояния*, а именно:

$$W(h_1, h_2, h_3, \dots, h_v) \in A \qquad h_k \in A=\{0,1,2, \dots, a\text{-}1\}; \quad (k=1 .. v;\; 1 \le v \le r)$$

позволяющая в точках неопределенности выбирать на основе кортежей $<h_1, h_2, \dots, h_v>$ состояний $h_k \in A=\{0,1,2, \dots, a\text{-}1\}$; $(k=1 .. v,\; 1 \le v \le r)$ единственное для данной конкретной *неопределенности*.

В качестве одного такого класса ***ИСГ*** рассмотрим ***обобщенную*** структуру ***1-ОС***, ***ЛФП*** которой определяется ***ПП*** вышеуказанного вида при условии $m_k = n_k$; $m_k > 1$ и наличии среди ***ПП (GS)*** подстановки вида: ***000 ... 00 ⇒ 000 .. 00*** (*при* $m_k > n_k = 1$ *имеет место классическая структура* ***1-ОС***), тогда как функция ***W*** однозначного выбора состояния для подобным образом определенной ***обобщенной*** структуры ***1-ОС*** принимает следующий вид, а именно:

$$W(h_1, h_2, h_3, ..., h_v) = \sum_k h_k \; mod \; a; \quad h_k \in A; \quad (k=1 \,..\, m_k) \qquad \textbf{(AK)}$$

Указанная *нулевая* подстановка является аналогом состояния «*покоя*» в классических структурах. Поскольку ***ЛФП*** данного ***обобщенного*** типа ***1-ОС*** каждую ***КФ ШС***, соответствующего индексу соседства $X=\{0,1, ..., m_k - 1\}$, заменяет на блочную ***КФ*** той же длины m_k согласно указанным ***ПП***, для любого единичного автомата структуры возникает *неопределенность* при выборе состояния в следующий момент времени, разрешаемая ***W***-функцией выбора ***(AK)***. При таком определении обобщенной ***1-ОС*** ее ***ЛФП*** может определять и *обратимое* отображение конфигураций блоков размера m_k при условии его взаимной однозначности, которая алгоритмически разрешима.

Результаты многочисленных компьютерных экспериментов, обеспечивших анализ этого класса *обобщенных* ***1-ОС*** на предмет наличия для них свойства *универсальной воспроизводимости* по Муру конечных ***КФ***, позволили нам сформулировать следующее предположение, а именно:

Обобщенные структуры 1-ОС, ЛФП которых определяются параллельными подстановками вида (GS), являющимися взаимно однозначными отображениями (исключая тождественные), с W-функцией выбора (AK) обладают свойством универсальной воспроизводимости по Муру конечных конфигураций. Вполне вероятно обобщение и на высшие размерности структур.

Для случая бинарного алфавита $B=\{0,1\}$ и $X=\{0,1\}$ данный результат подтвержден теоретически, тогда как для более общих типов структур данного класса результаты носят эмпирический характер. В частности, для экспериментов подобного типа может оказаться полезной небольшая ***Maple***-процедура ***TBB(L,PP,m,N,M)***, в качестве формальных аргументов которой выступают: ***L*** – начальная ***КФ*** $c_o=x_1x_2 \,...\, x_n$ в форме списка $[x_1,x_2, ..., x_n]$; ***PP*** – таблица вида table$([[x^1{}_1, ..., x^1{}_p] = [y^1{}_1, ..., y^1{}_p], ..., [x^h{}_1, ..., x^h{}_p] = [y^h{}_1, ..., y^h{}_p]])$ $\{h=a^p, x_j,y_j \in A\}$, определяющая подстановки ***(GS)***; ***m*** – мощность ***A***-алфавита структуры; ***N*** – число копий ***КФ*** c_o, требуемых сгенерировать; ***M*** – длина рабочей области Z^1-пространства структуры. Вызов процедуры ***TBB*** возврашает **2**-элементный список, второй элемент которого определяет количество сгенерированных копий начальной ***КФ*** c_o, тогда как первый – использованное для этого количество шагов *обобщенной* структуры.

```
> TBB := proc(L::list, PP::table, m::posint, N::posint, M::posint)
local A, a, b, c, k, p, t, h, u, j;
   assign(h = nops(lhs(op(2, eval(PP))[1])), t = 0); assign(A = Array(1 .. h, 1 .. M),
      c = 1/2*M - round(1/2*nops(L)),  p = cat("", seq(L[k], k = 1 .. nops(L))));
   for k to nops(L) do A[1, c + k] := L[k] end do;
   do
      for k to M - h + 1 do  u := PP[[seq(A[1, k + j], j = 0 .. h - 1)]];
         seq(assign('A[j, k + j - 1]' = u[j]), j = 1 .. h)
      end do;
      for k to M do A[1, k] := add(A[j, k], j = 1 .. h) mod m  end do;
      a := cat("", seq(A[1, k], k = 1 .. M));  assign('b' = nops(Search2(a, {p})), 't' = t + 1);
      if N <= b then return [t, b] end if
   end do
end proc:
> PP := table([[0,0]=[0,0], [0,1]=[1,0], [1,0]=[1,1], [1,1]=[0,1]]):
> TBB([1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1], PP, 2, 67, 2500);  ⇒   [1008, 85]
```

Приведенный выше фрагмент представляет исходный код процедуры и пример ее применения для анализа ***обобщенной*** структуры ***1-ОС*** с бинарным алфавитом $B=\{0,1\}$, индексом соседства $X=\{0,1\}$ и ***ПП (GS)*** следующего вида, а именно: ***00 ⇒ 00, 01 ⇒ 10, 10 ⇒ 11, 11 ⇒ 01***. Для понимания принципов реализации и функционирования процедуры ***TBB*** вполне достаточно знакомства с математическим пакетом ***Maple*** в объеме, например, наших книг [97-118]**.**

Для экспериментального исследования *классических* ***d–OC (d=1, 2)*** нами наряду со специальными средствами был создан целый ряд относительно небольших процедур в среде известных пакетов ***Mathematica*** и ***Maple*****.** Большинство из процедур, созданных в среде ***Maple*****,** включая упомянутые в настоящей монографии, включены в состав большой библиотеки новых программных средств для пакета ***Maple*****,** отмеченной сетевой наградой *Smart Award* от *Smart DownLoads Network***,** которая на сегодня весьма широко используется в ***СНГ*** и за ее пределами. Библиотека версии ***2.2013*** для ***Maple*** существенно расширяет диапазон и эффективность использования ***Maple*** на платформах *Windows* благодаря находящимся в ней средствам в *трех* основных направлениях**:** ***(1)*** устранение ряда основных дефектов и недостатков, ***(2)*** расширение возможностей целого ряда стандартных средств, и ***(3)*** пополнение системы рядом новых средств, расширяющими возможности ее среды программирования, включая средства, улучшающие также уровень совместимости релизов ***6–12*** системы. Основное внимание было уделено дополнительным средствам, созданным в процессе использования пакета ***Maple*** релизов ***4–11*****,** которые по ряду параметров существенно расширяют возможности системы и облегчают работу с ней. Текущая версия библиотеки содержит средства ***(****более* ***750)*****,** ориентированные на основные типы вычислений и обработки информации. Данная библиотека содержит специальные средства для работы с *классическими* ***ОС–***моделями. Большой опыт использования этой библиотеки в целом ряде университетов и научно-исследовательских организаций ***СНГ*** и в других странах подтвердил ее высокие эксплуатационные характеристики при программировании различных приложений в системе компьютерной алгебры ***Maple*****.**

Таким образом, свойство *универсальной воспроизводимости* присуще достаточно широкому классу систем параллельной переработки конечных слов в конечных алфавитах. Поэтому дальнейшие исследования в данном направлении представляются нам достаточно интересными.

Глава 4.
Проблема сложности конечных конфигураций в классических однородных структурах

Сложность во всей своей общности является *одним* из наиболее интригующих и неопределенных понятий современного естествознания. На наш взгляд, интуитивная сущность данного понятия в значительной степени является главной причиной. В частности, наиболее фундаментальной проблемой развития является понимание того, как система может самоусложняться и насколько большой должна быть для этого сложность исходной системы. Одной из сложностей в решении данной грандиозной во многих отношениях проблемы является отсутствие удовлетворительной ***меры сложности.*** Вполне возможно, что к общему понятию сложности единого подхода просто не существует, хотя в этом направлении и делаются попытки. Исследования в этом направлении чрезвычайно желательны. В свете же использования классических ***ОС***-моделей как формальной основы моделирования в биологии развития, а также исследования параллельных дискретных динамических систем вопросы, связанные с понятием сложности в ***ОС***-моделях, представляются *весьма* актуальными. Особую актуальность данной проблематике придает то обстоятельство, что ***ОС***-модели находят все более и более широкое применение в качестве концептуальных моделей пространственно-распределенных систем, из которых физические системы представляются нам наиболее интересными [5,9,128,143-145,149,150,157,185,187,201,203,209,218,225,536]. В данной главе представлены наши основные результаты исследований по *сложности* конечных конфигураций в еlассических ***ОС***-моделях и связанных с ней вопросов.

Для формального моделирования разнообразных дискретных процессов, феноменов и объектов в среде *классических* ***d-ОС (d≥1)*** наибольший интерес представляет именно ***динамика*** начальных конечных конфигураций. Действительно, некоторый моделируемый процесс представляется в динамике классической ***d-ОС*** соответствующей ***историей*** начальных конечных конфигураций. В данном контексте само собой напрашивается вопрос ***сложности*** конечных ***КФ***, составляющих историю моделируемого в *классической* ***d-ОС*** процесса или объекта. В настоящее время известны *три* основных подхода к определению понятия ***«количество информации»***, ассоциированного с понятием сложности конечных объектов: ***комбинаторный***, ***вероятностный*** и ***алгоритмический***, базирующийся на теории рекурсивных функций и абстрактных автоматов. Например, впервые в рамках алгоритмического подхода ***А.Н. Колмогоров*** определил относительную сложность как ***минимальную длину*** программы вывода некоторого конечного объекта ***А*** из конечного объекта ***В*** (*сложность объекта **А** по отношению к объекту **В***). При этом, в качестве представителей объектов сравнения ***А.Н. Колмогоров*** выбрал их бинарные номера в некоторой формальной нумерации, тогда как в качестве представителей программ их вывода – программы работы соответствующих машин Тьюринга [257].

Предложенный нами подход к определению ***сложности*** конечных ***КФ*** на базе ***ОС***-аксиоматики также по сути своей является алгоритмическим, но отличается от подхода ***А. Н. Колмогорова*** [5, 9,56,68-73,82,83,88,90]. Сущность данного подхода к определению понятия ***сложности*** конечных ***КФ*** состоит в оценке трудоемкости генерации любой конечной ***КФ*** из некоторой примитивной ***КФ*** $c_p \in C(A,d,\phi)$ (*например*, c_p=□1□ *для* ***1-ОС***) посредством *конечного* числа ***ГФП*** $\tau^{(n_k)}$ из некоторого фиксированного множества функций G_f, которое будем называть ***базовым.*** В настоящей главе вводится определение понятия ***сложности*** конечных конфигураций на основе ***ОС***-аксиоматики и приводится ряд интересных результатов, с ним связанных. Однако, для строгого определения понятия сложности нам понадобится ряд фундаментальных результатов по динамике конечных конфигураций как в классических, так и в полигенных ***ОС***-моделях [5,88,90,536].

Проблема неконструируемости имеет место как для моногенных (*глава* **2**), так и для полигенных ***ОС***-моделей. Во втором случае данная проблема известна как проблема *полноты* и представляет собой следующий вопрос: ***Может ли произвольная конечная конфигурация быть сгенерирована из заданной примитивной КФ c_p посредством конечной последовательности ГФП полигенной ОС-модели?*** Этой проблемой занимался целый ряд исследователей, получивших немало весьма интересных результатов в данном направлении. Тогда как, завершил решение *проблемы полноты* следующий важный результат ***А. Маруока*** и ***М. Кимура*** [244,245,536].

<u>Теорема 63</u>. Любую ненулевую d-мерную КФ $c\in C(A,d,\phi)$ можно сгенерировать из примитивной КФ $c_p\in C(A,d,\phi)$ некоторой конечной последовательностью ГФП $\tau^{(n_k)}$ полигенной d-ОС ($d\geq 1$).

Проблема полноты в определенной мере характеризует конструктивные возможности *полигенных* ***ОС***-моделей и ее положительное решение доказывает достаточно широкие возможности такого класса структур по генерации конечных ***КФ.*** Действительно, опираясь на результат теоремы **63,** показано, что из любой ненулевой ***d***-мерной конфигурации $c\in C(A,d,\phi)$ посредством конечной последовательности ***ГФП*** полигенной ***d-ОС*** можно сгенерировать [90] любую наперед заданную конечную ***КФ*** $c^*\in C(A,d,\phi)$. Между тем, из результатов ***М. Кимура*** и ***А. Маруока*** непосредственно вытекает следующий результат, а именно.

<u>Предложение 20</u>. Любая конечная d-мерная конфигурация в полигенной структуре d-ОС ($d\geq 1$) может быть сгенерирована из начальной примитивной конечной КФ $c_p\in C(A,d,\phi)$ посредством применения к ней некоторой конечной последовательности d-мерных ГФП $\tau^{(n_k)}$ из некоторого фиксированного (базового) G_f-множества функций.

Более того, наряду с сугубо теоретическим данный результат представляет также значительный прикладной интерес, например, в системах обработки и хранения *изобразительной* информации различного типа (*например, в картинных базах данных*), а также в различных системах *кодирования* и *декодирования* информации [5,9,83,88,90,92,132,135,146,190,360,371,536,567].

Так, в системах обработки, хранения и передачи различного рода изображений, компьютерной графике, картографии и ряде других важных приложений значительный интерес представляет проблема компактного представления ***d***-мерных конфигураций (*дискретных изображений*). Так, на основе возможности генерации в полигенных ***ОС***-моделях произвольных конечных ***КФ*** c^* из некоторой примитивной ***КФ*** c_p за конечное количество применения к ней ***ГФП*** из некоторого *фиксированного* множества G_f ***d***-мерных глобальных функций τ_q ($q=1..m$) можно записать общее правило вывода конфигурации в следующем вполне очевидном виде, а именно:

$$c_p\tau_{j_1}^{p_1}\tau_{j_2}^{p_2}\tau_{j_3}^{p_3}\tau_{j_4}^{p_4}...\tau_{j_h}^{p_h}=c;\quad c_pW=c^*;\quad \tau_{j_1}^{p_1}\in G_f;\quad k=1..h \qquad (37)$$

где p_j – кратность ***ГФП*** τ_{jk} в ***W***-цепочке вывода. Тогда ввиду соотношения ***(37)*** каждая ***d***-мерная конфигурация $c^*\in C(A,d,\phi)$ получает компактное *линейное* представление ***(Des)*** следующего вида, а именно:

$$Des(c) = p_1*j_1*p_2*j_2*p_3*j_3* ... *p_h*j_h$$

которое, на наш взгляд, вполне может быть существенно компактнее обычного описания ***КФ с****, особенно в случае высокой ее размерности и большого размера. Если теперь выбрать некоторые *взаимно однозначные* представления для значений p_j, j_k ***(k=1..h)*** и маркера-разделителя **(*)**, то для значения ***Des(c)*** можно получить взаимно однозначное *бинарное* представление $Des(c)=b_1b_2 \ldots b_u$ $(b_1=1,\ b_v\in\{0,1\},\ v=2..u)$, т.е. *бинарная* величина ***Des(c)*** соответствует некоторому *десятичному* числу ***M=M(c,W)***. Таким образом, число ***М*** **–** функция двух переменных: кодируемой *конечной* ***с*-КФ*** и строки ***(W)*** в цепочке вывода ее из некоторой *примитивной* c_p***-КФ (37)***. Пусть теперь $M_\#(c)$ будет произвольным числовым представлением $c^*\in C(A,d,\phi)$ (*согласно общей для всех* ***d****-мерных конечных* ***КФ*** *процедуры кодирования)* и $M(c)=min_W\ M(c,W)$. Предположим, что для любого $M_\#(c)$ величина $M_\#(c)/M(c)$ – растущая функция для «*почти всех*» конечных ***КФ*** $c^*\in C(A,d,\phi)$. Отметим, что такое предположение хорошо согласуется с нашими современными представлениями о самых общих принципах функционирования развивающихся систем**:** ***В основе развивающихся систем лежит скорее сама программа развития, чем полное описание развитой системы.*** И, пожалуй, именно данная проблема достаточно важна и перспективна со многих точек зрения в плане дальнейших более детальных проработок в этом направлении.

С проблемами ***сложности*** конечных ***КФ*** и ***полноты*** в ***ОС***-моделях можно естественным образом увязать и более *прикладную* проблему представления и хранения информации в *картинных базах данных* ***(КБД)***, в которых информация представлена не числами и символами, а **2-** и **3-**мерными изображениями *(картинами)* различной природы [5]**.** Такие ***КБД*** представляют большой интерес для многих приложений в медицине, картографии, фотографии, геодезии и т.д. Очень сложной здесь является проблема компактного представления и обработки данного типа информации. В этом плане представляется весьма перспективным использование генерирующих возможностей классических и полигенных ***ОС***-моделей**,** когда довольно представительные множества *конечных* ***КФ*** могут определяться только ограниченным количеством глобальных функций с алгоритмом их применения к некоторым *базовым* простым конфигурациям**,** позволяющим генерировать из них любые картины из требуемых множеств. Данный подход заслуживает самого пристального внимания, учитывая перспективы развития вычислительной техники *параллельного* действия на основе вычислительных ***ОС***-моделей [376], позволяющих производить обработку изображений в режиме реального времени [536].

Возвращаясь к результату теоремы ***63,*** отметим, что, с другой стороны, имеет место следующий фундаментальный результат [54-56], характеризующий динамические свойства *классических* ***ОС***-моделей и в значительной мере продолжающий результаты предыдущей главы книги по общей проблеме существования *универсальных* ***КФ*** для классических ***ОС***-моделей. Более того, данный результат можно даже рассматривать как прямое следствие результатов теорем ***55*** и ***56*** (глава ***3)***, легко получаемое на их основе, а именно.

<u>Теорема 64</u>. Для любого конечного А-алфавита не существует конечных множеств d-мерных КФ $c_k\in C(A,d,\phi)$ ***и ГФП*** $\tau_k^{(n_k)}$***, определенных в том же самом конечном А-алфавите, таких, что имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:***

$$\bigcup_k < c_k > [\tau_k^{(n_k)}] = C(A,d,\phi) \qquad (k = 1..p)$$

Нами дано несколько вариантов доказательства теоремы ***64,*** с которыми можно ознакомиться, в частности, в [54-56]. Теоремы ***63*** и ***64*** позволяют подвести строгое математическое основание под наше понятие *сложности конечных* ***КФ*** на основе ***ОС***-аксиоматики, а также под целый ряд других результатов в данном направлении. В частности, из теоремы ***64*** следует, что даже и полигенные ***ОС***-модели не являются *конечно* аксиоматизируемыми формальными системами, т.е. *невозможно* определить конечное множество ***КФ*** (*аксиом*), из которого можно было бы вывести посредством конечного множества ***ГФП*** (*правил вывода*) *все* множество ***С(А,d,ϕ)*** *конечных* ***КФ***. Перейдем теперь непосредственно к определению понятия сложности конечных ***КФ*** на основе ***ОС***-аксиоматики, представляющего большой как теоретический, так и гносеологический интерес.

Предположим теперь, что G_f – конечное множество ***d***-мерных ***ГФП***, заданных в ***А***-алфафавите, на основе которого за конечное число шагов можно сгенерировать из некоторой примитивной ***КФ*** $c_p \in C(A, d, \phi)$ ***любую*** конечную ***с-КФ***, т.е. существуют следующие правила вывода конечных конфигураций из некоторой примитивной c_p-конфигурации, а именно:

$$c = c_p\tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}\tau_3^{m_3} \ldots \tau_n^{m_n} \qquad (\tau_k \in G_f;\ \tau_j \neq \tau_{j+1};\ k = 1..n;\ j = 1..n-1) \tag{38}$$

где m_k – кратность применения ***ГФП*** $\tau_k \in G_f$ ***(k=1..n)***. В этом случае будем говорить, что конечная ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ генерируется из примитивной ***КФ*** $c_p \in C(A,d,\phi)$ по крайней мере за $r = \Sigma_k m_k$ шагов ***ГФП*** $\tau_k \in G_f$ ***(k=1..n)***. В качестве ***примитивной*** можно, в частности, выбирать ***КФ*** вида c_p=□1□ для *классических* ***1-ОС***. При этом, две произвольные ***ГФП*** $\tau_i, \tau_j \in G_f$ полагаются *различными* $(\tau_i \neq \tau_j)$ тогда и только тогда, когда имеет место следующее соотношение $(\exists c \in C(A,d))(c\tau_i \neq c\tau_j)$. Если в цепочке вывода ***(38)*** существует ***(n-1)*** пар *различных* ***ГФП*** $<\tau_i, \tau_j>$ ***(j=1..n-1)***, то будем говорить, что в *цепочке генерации* конфигураций $c \in C(A,d,\phi)$ из *примитивной* ***КФ*** c_p существует ***(n-1)*** уровней L_k, которые определяются следующей ***сигнализирующей*** бинарной функцией, а именно:

$$L_k = \begin{cases} 1, & if\ \tau_k \neq \tau_{k+1} \\ 0, & otherwise \end{cases} \qquad k = 1..n-1$$

Следующая диаграмма (рис. 20) иллюстрирует вышеописанный процесс *генерации произвольной* конечной ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ из некоторой примитивной c_p***-КФ***. В основу приводенной диаграммы положен процесс генерации конечных ***КФ*** из некоторой фиксированной примитивной ***КФ*** c_p в соответствии с вышеуказанными правилами ***(38)***.

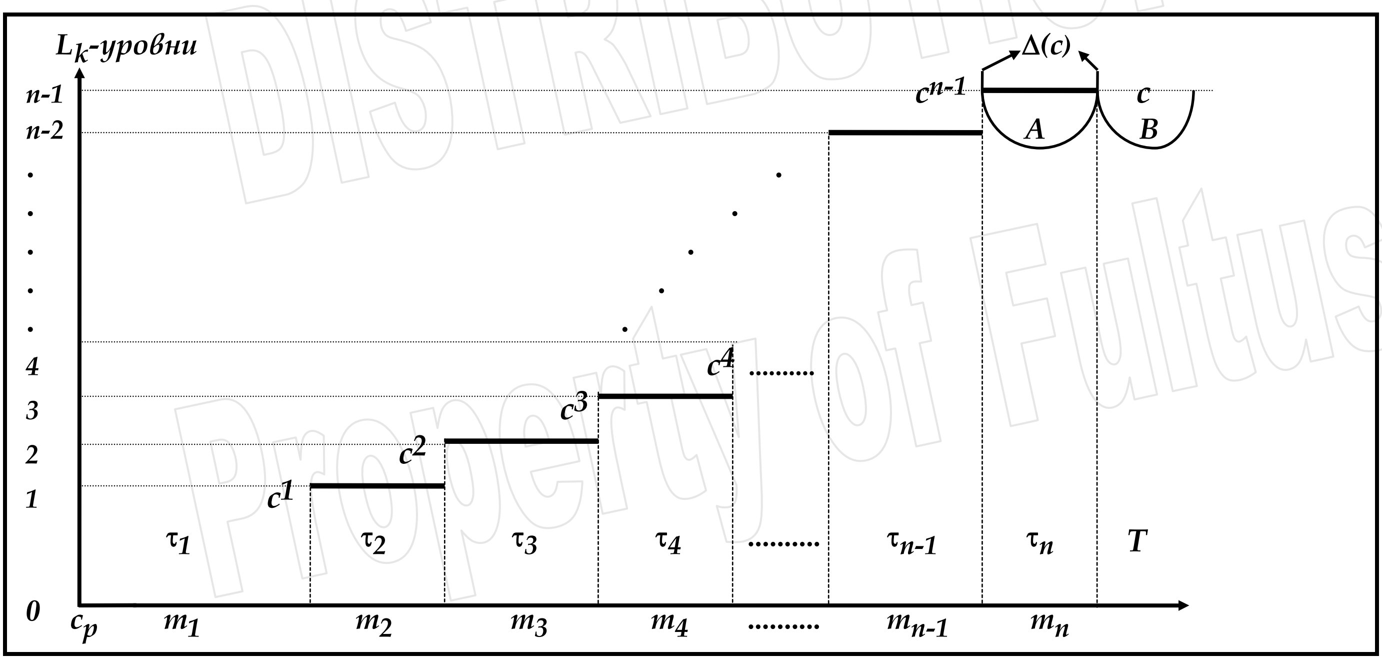


Рис. 20. Диаграмма, поясняющая оптимальную стратегию вывода произвольной конечной конфигурации $c \in C(A,d,\phi)$ [***оптимальный OS(c)-граф вывода***].

Следует отметить, что представленная выше диаграмма может служить в качестве достаточно хорошей иллюстрации для многих исследований, связанных с вводимым понятием сложности конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях (рис. ***20***). С учетом сказанного ***сложность*** произвольной конечной конфигурации $c \in C(A,d,\phi)$ $(d \geq 1)$ может быть определена следующим образом.

<u>Определение 16</u>. Сложность (SL) произвольной конечной конфигурации $c \in C(A,d,\phi)$ для $d \geq 1$ ***на основе ОС-аксиоматики вычисляется по следующей общей формуле, а именно:***

$$SL(c) = \min_{\tau_k \in G_k} \prod_{k=1}^{n-1} p_k^{m_k} \tag{39}$$

где p_k ***– k-е простое число и*** m_k ***определяется из цепочек генерации (38) конечных конфигураций полигенной ОС-модели.***

Суть данного понятия *сложности* базируется на результатах теорем ***63*** и ***64***, которые утверждают (*с одной стороны*) о возможности генерации любой конечной ***КФ*** в *полигенной* ***d-ОС*** из некоторой начальной примитивной конфигурации $c_p \in C(A,d,\phi)$, а также (*с другой стороны*) о невозможности определения *конечных* множеств начальных конечных ***КФ*** и глобальных функций классической ***d-ОС***, в совокупности генерирующих ***все*** множество $C(A,d,\phi)$ $(d \geq 1)$ конечных конфигураций. И на основе данного определения был получен ряд важных свойств конечных ***КФ*** в классических и полигенных ***ОС***-моделях, характеризующих их относительно введенного понятия ***сложности*** [3-5,9,10,41,53-56,88,90]. Ряд результатов в данном направлении представляет следующая важная теорема, имеющая целый ряд достаточно интересных приложений как в теоретическом, так и в прикладном аспектах ***ТОС***-проблематики.

<u>Теорема 65</u>. Для каждого целого $d \geq 1$ ***множество*** $C(A,d,\phi)$ ***всех d-мерных конечных КФ содержит конфигурации любой наперед заданной сложности относительно любого конечного базового*** G_f***-множества d-мерных ГФП, определенных в некотором конечном А-алфавите классической ОС-модели.***

Из данной теоремы следует, что как бы мы ни определяли конечное базовое G_f-множество, все еще будут существовать относительно него в множестве $C(A,d,\phi)$ конфигурации любой наперед заданной сложности. Другие наиболее специфические свойства введенного понятия сложности конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях и интересные следствия из них можно найти в работах [5,9,10,41,53-56,88,90]. На основе теоремы ***65*** и ряда других наших результатов в данном направлении можно получить и результат, играющий весьма важную роль как для изучения динамических свойств *классических* ***ОС***-моделей, так и для дальнейшего развития самого понятия ***сложности*** конечных конфигураций, соотнесенного с базовой концепцией ***ОС***-моделей [5,53-56,88,90,536].

<u>Теорема 66</u>. Для любой размерности $d \geq 1$ ***существуют ГФП*** $\tau \notin G_f$, ***генерирующие из заданной КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ ***ограниченой сложности конфигурации любой наперед заданной сложности в смысле определения 16.***

Теорема утверждает, что если ***ГФП***, составляющие базовое G_f-множество, генерируют конечные ***КФ*** только ограниченной сложности, то посредством ***ГФП*** τ_j, не входящих в выбранное базовое множество, можно сгенерировать конечные ***КФ*** сколько угодно большой сложности. Результат данной теоремы породил целый ряд интересных вопросов, одним из которых является вопрос о числе конфигураций одной и той же сложности относительно заданного *базового* G_f-множества. В значительной степени ответ на данный вопрос позволяет охарактеризовать и введенное нами понятие сложности конечных конфигураций в общем контексте понятия «***сложности***» в целом. Следующий довольно важный результат позволяет в значительной степени прояснить данный весьма интересный вопрос [53-56,88,90].

Теорема 67. Существует бесконечное число базовых G_f-множеств d-мерных ГФП, определенных в A-алфавите, относительно каждого из которых имеются бесконечные множества конечных конфигураций одной и той же сложности в смысле определения 16.

Результат теоремы ***67*** позволяет решить целый ряд весьма интересных вопросов, поставленых в наших работах [1,3]. Детальное изучение *базового* G_f-множества, используемого в определении ***16*** понятия сложности конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях, и свойств составляющих его ***ГФП*** τ_j позволяют довольно существенно прояснить не только новые свойства введенного понятия сложности, но и предоставит в наше распоряжение достаточно эффективный аппарат исследования динамики ***ОС***-моделей как *классических*, так и *полигенных*, а в целом ряде случаев и недетерминированных. Так, в частности, весьма важно исследовать минимальное базовое G_f-множество, содержащее как можно меньшее число ***ГФП.*** Исследуя проблему полноты в *полигенных* ***ОС***-моделях, ***А. Маруока*** и ***М. Кимура*** представили конструктивное доказательство существования *базового* G_f-множества (теорема ***63)***; однако, при этом они не использовали оптимизирующей техники. В общем случае детальное исследование *базовых* G_f-множеств *глобальных функций перехода* пока отсутствует, тогда как для более узкого класса бинарных одномерных ***ОС***-моделей получен целый ряд интересных результатов [5,53-56,88,90] в данном направлении, а именно.

Теорема 68. Существует минимальное базовое G_f-множество, содержащее только 4 бинарных 1-мерных ГФП; по меньшей мере одна из них обладает неконструируемостью типа НКФ-1. По отношению к минимальному базовому G_f-множеству одномерных бинарных ГФП существуют бесконечные множества конечных конфигураций одной и той же сложности.

Данный результат в определенной мере переносит результат предыдущей теоремы ***67*** на случай минимальных базовых G_f-множеств и метод ее доказательства [73] оказывается весьма полезным при выводе следующей интересной теоремы, имеющей немало достаточно важных приложений [82,83,90] при изучении динамики классических ***ОС***-моделей.

Теорема 69. Существуют минимальные базовые G_f-множества 1-мерных ГФП $\tau_k^{(n_k)}$ в бинарном B-алфавите, по отношению к каждому из которых имеются бесконечные множества функций $\tau_k^{(n_k)}$ того же класса и КФ $c_k \in C(B,\phi)$ ($B=\{0,1\}$) таких, что последовательности КФ $<c_k>[\tau_k^{(n_k)}]$ содержат конечные КФ любой наперед заданной сложности. Однако, не существует конечного базового G_f-множества 1-мерных бинарных ГФП $\tau_k^{(n_k)}$, относительно которого произвольная последовательность $<c>[\tau^{(n)}]$ ($c \in C(B,\phi)$; $\tau^{(n)} \notin G_f$) содержала бы бинарные конечные КФ только ограниченной сложности.

Теорема ***69*** позволяет получить ответ на целый ряд вопросов и несколько глубже выявлять суть введенного понятия *сложности конечных* ***КФ*** относительно ***ОС***-аксиоматики [76]. В данной связи следует отметить, что понятие *сложности* алгоритма зависит как от самой концепции алгоритма, так и от его конкретной реализации. Единого, устоявшегося уточнения к настоящему моменту не существует. Поэтому и результаты, связанные с оценкой сложности алгоритмов, могут иметь существенно различный характер. Так, например, сложность нормального алгоритма Маркова определяется длиной записи всех его формул подстановок, а под *сложностью* машины Тьюринга обычно понимают *произведение* числа внутренних состояний ***КА*** и символов алфавита внешней ленты. В рамках этого определения произвольную функцию алгебры логики от ***n*** переменных можно реализовать нормальным алгоритмом со сложностью порядка ***2n*** и машиной Тьюринга со сложностью порядка $2^n/n$. С другой стороны, определяя сложность классической структуры ***d-ОС***$=<Z^d,A,\tau^{(n)},X>$ как произведение dxnxa, нетрудно убедиться, что каждая функция алгебры логики от ***n*** переменных реализуется соответствующей классической ***1-ОС*** со сложностью ***2n.***

Таким образом, само понятие *сложности* существенно влияет на сравнительные характеристики различных классов алгоритмов. Следовательно, *концептуальной* основе *сравниваемых* алгоритмов следует уделять самое принципиальное внимание [5,54-56,88,90,536].

Понятие сложности описания алгоритма используется, как правило, при уточнениях вопроса о том, какова *минимальная* сложность алгоритма, генерирующего тот либо иной конечный объект. Данную *минимальную* сложность очень часто называют просто *сложностью конечного* объекта (*при конкретном уточнении понятия сложности описания алгоритма*). Как уже отмечалось, определение сложности конечных объектов X впервые было предложено ***А.Н. Колмогоровым.*** Оказывается, что между сложностью $K(X)$ по ***Колмогорову***, сложностью $M_q(X)$ этих же конечных X-объектов, выражаемой через *длину изображения* нормального алгоритма Маркова в q-буквенном алфавите, и сложностью $s = T_q(X)$, выражаемой числом внутренних состояний машины Тьюринга ($MT^s{}_q$) с q-буквенным *внешним* алфавитом, существуют асимптотически точные соотношения, а именно:

$$M_q(X) = K(X)/log_2q \qquad\qquad T_q(X) = K(X)/(q-1)log_2K(X)$$

Предложенный нами подход позволяет оценивать сложность $A(X)$ таких конечных объектов, как конечные ***КФ*** в ***ОС***-моделях. Было бы весьма интересным установить также зависимости между алгоритмическими сложностями $K(X)$, $M_q(X)$, $T_q(X)$ и $A(X)$ объектов, определяемых ***1***-мерными конечными ***КФ*** в произвольном A-алфавите. В основу установления данной зависимости может быть положен метод моделирования классических одномерных ***ОС*** машинами Тьюринга и/или нормальными алгоритмами Маркова. Однако здесь следует учитывать целый ряд существенных моментов, связанных с упомянутыми выше *концептуальными* обстоятельствами [54-56,88,90,567].

Выше отмечалась определенная аналогия между понятиями сложности $K(X)$ конечных объектов по ***А. Колмогорову*** и сложности $A(X)$ конечных ***КФ*** из множества $C(A,d,\phi)$. Оба данные подхода к понятию сложности являются ***алгоритмическими***, однако между ними имеются и существенные различия. Например, один из результатов ***А.Н. Колмогорова*** в данном направлении гласит, что: ***$MT^s{}_q$ с постоянной программой работы может печатать на своей выходной ленте бинарные слова лишь ограниченной сложности.*** Для случае нашего понятия $A(X)$-сложности имеет место совершенно иная картина, в основе которой лежат следующие соображения, а именно.

Рассмотрим множество M всевозможных бинарных слов вида, а именно: $c = 0^nb0^m$ при $(n, m \geq 0)$, $b \in C(B,\phi)$, $B=\{0,1\}$. Очевидно, $C(B,\phi) \subset M$, а при $m=n=0$ $M \equiv C(B,\phi)$. С другой стороны, множества M и $C(B,\phi)$ относительно сложности входящих в них бинарных слов эквивалентны, ибо, генерируя из некоторого *начального* слова (*конфигурации*) соответствующее слово $b \in C(B,\phi)$, ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ структуры генерирует и все сопутствующие ему слова вида $c=0^nb0^m$ $(n,m\geq 0)$, и наоборот. Это очень хорошо согласуется с таким вполне естественным предположением, что сложность любой части объекта не может превышать сложности всего объекта. Нетрудно теперь определить машину Тьюринга $MT^B{}_q$ при $B=\{0,1\} \cup \{\#$ – *пустой символ*$\}$, начинающей работу с пустой лентой и последовательно порождающей все бинарные представления чисел натурального ряда, среди которых находятся также все конечные бинарные ***КФ*** из $C(B,\phi)$-множества. Программа работы $MT^B{}_q$ не меняется в течение всего времени своего выполнения и состоит в реализации алгоритма *сложения по* (*mod* **2**). Но тогда на основе вышеприведенного результата ***А.Н. Колмогорова*** можно заключить, что все бинарные слова, печатаемые на выходной ленте такой $MT^B{}_q$, имеют ограниченную сложность. Тогда как на основе нашего подхода к определению сложности *конечных* ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях можно сделать вывод, что $C(B,\phi)$-множество содержит бинарные конечные ***КФ*** любой наперед заданной сложности. Суть такого различия состоит в следующем.

Нетрудно убедиться, что существует весьма принципиальное различие между порождающими возможностями машин Тьюринга и *полигенными* ***1-ОС*** относительно понятий сложности $K(X)$ и

A(X), которое лежит в основе определения обоих понятий сложности конечных объектов. Если согласно своего определения машины Тьюринга ***(МТ)*** генерируют *последовательности* символов из ***А***-алфавита (*в частности*, *бинарные слова*) на выходной ленте, используя при этом ***S***-алфавит внутренних состояний конечного автомата (*устройства управления* ***МТ***), то функционирование *классических* ***1-ОС***, используемых на каждом шаге *полигенной* ***ОС***-модели, полностью определено в едином ***А***-алфавите. Таким образом, если выход $MT^A{}_q$ определен лишь в ***А***-алфавите *выходной* ленты, используя для целей генерации последовательностей символов символы в расширенном $A \cup S$-алфавите, то выход *классической* либо *полигенной* ***ОС***-модели определяется сугубо в рамках ***А***-алфавите, а не в каком-либо его расширении. Вышеприведенные соображения позволяют нам лучше прояснить сущность имеющихся различий в ряде ***А.Н. Колмогорова*** и наших результатов по ***сложности*** конечных объектов, определяемой алгоритмическим путем. Несколько детальнее данный вопрос рассматривается в главе ***6***. Таким образом, в рамках собственной аксиоматики полигенные ***ОС***-модели могут генерировать конечные объекты-конфигурации сколько угодно большой сложности в смысле определения ***16***. Данные различия еще раз акцентируют вопрос на самой сути аксиоматики понятия ***сложности*** в целом [536].

При доказательстве теорем ***67-69*** существенно использовались понятие минимального базового G_f-множества и некоторые динамические свойства входящих в него *глобальных функций перехода*. Поэтому, вполне уместно представить более детальные свойства подобных *минимальных* базовых множеств, принимая во внимание их важность с точки зрения дальнейших исследований более глубоких свойств динамики ***ОС***-моделей. Мы ограничиваемся случаем бинарных полигенных ***1-ОС***, множеством конечных *бинарных* ***КФ*** $C(B,\phi)$ и ***ГФП*** $\tau_k(^{n}k)$, определяемых соответствующими им локальными функциями перехода согласно следующим параллельным подстановкам:

		(a)	(b)	(c)
000	⇒	0	0	0
001	⇒	1	1	1
010	⇒	0	1	0
011	⇒	1	0	0
100	⇒	0	1	1
101	⇒	1	0	1
110	⇒	1	1	0
111	⇒	0	0	0

		(d)
00	⇒	0
01	⇒	1
10	⇒	1
11	⇒	1

(40)

С учетом сделанных предположений имеет место следующий весьма важный результат [5,45,54-56,90], характеризующий ***ГФП*** минимального базового G_f-множества для одномерного *бинарного* случая полигенных ***ОС***-моделей, а именно.

<u>Теорема 70</u>. Минимальное базовое G_f-множество содержит четыре одномерные бинарные ГФП, соответствующие ЛФП которых определяются параллельными подстановками (40.a-d); при этом, составляющие G_f-множество ГФП τ_k обладают типами неконструируемости согласно табл. 6. Минимальное базовое G_f-множество для одномерного небинарного случая состоит из ГФП τ_k, обладающих НКФ и/или НКФ-1, НКФ-2 и, возможно, НКФ-3.

Таблица 6

ЛФП\НКФ	НКФ	НКФ-1	НКФ-2	НКФ-3
(40.a)	нет	есть	нет	нет
(40.b)	нет	есть	нет	нет
(40.c)	есть	есть	нет	нет
(40.d)	есть	нет	есть	есть

Выбор в качестве *минимального* базового $\boldsymbol{G_f}$-множества ***ГФП***, определяемых ***ЛФП*** с *параллельными* подстановками ***(40.a-d)***, обоснован в работе [54] и в виду его громоздкости здесь не приводится. Более того, показывается [88,90], что не существует $\boldsymbol{G_f}$-множества одномерных бинарных ***ГФП***, определяемых ***ЛФП*** с простейшим индексом соседства ***X***=$\{\boldsymbol{0,1}\}$, которое можно было бы выбрать в качестве *минимального базового*. В *минимальном базовом* $\boldsymbol{G_f}$-множестве, ***ГФП*** которого определены ***ЛФП*** с *параллельными* подстановками ***(40.a-d)***, первые две функции ***(40.a-b)*** множества реализуют *перевертыши* соответственно дефекта ***1*** и ***3***, принадлежа *изолированной* полугруппе относительно операции *композиции* ***ГФП*** [53], обладающей рядом довольно интересных свойств относительно *динамики* генерируемых ими *конечных* и *бесконечных* конфигураций. Ниже данный вопрос будет рассмотрен несколько детальнее. Рассмотрим теперь вопрос наличия типов *неконструируемости* для составляющих $\boldsymbol{G_f}$-множество ***ГФП*** $\tau_k^{(n_k)}$, во многом определяющих динамику конечных ***КФ*** относительно данных глобальных функций перехода классических однородных структур.

На основе параллельных подстановок ***(40.a)***, определяющих ***ЛФП (ГФП)*** *бинарной* классической ***1-ОС*** с индексом соседства ***X***=$\{\boldsymbol{0,1,2}\}$, нетрудно убедиться, что эта структура не обладает парами ***ВСКФ***, а значит, ***НКФ*** и ***НКФ-3***. Вместе с тем, для нее существуют ***НКФ-1*** простого вида ***c***=□***11***□. Рассмотрим теперь произвольную ***КФ*** $c \in C(B,\phi)$ с определением для нее допустимости в качестве предшественника ***КФ*** $c` \in C(B,\infty)$, что должно определять наличие или отсутствие для структуры неконструируемости типа ***НКФ-2***, а именно:

$$
\begin{aligned}
&c` = ...111111\ \ 0\ \ x_2 y_5 \,.....\, y_m y_{m+1} y_{m+2} ..... \\
&c\ = ...\square 1 x_2 x_3 x_4 x_5 \,....\, x_m 1 \square ....; \qquad x_k, y_k \in B=\{0,1\} \quad (k=2\ ..\ \infty)
\end{aligned}
\tag{41}
$$

На основе параллельных подстановок ***(40.a)*** несложно убедиться, что для определенной выше структуры каждая ***КФ*** $c \in C(B,\phi)$ имеет по крайней мере ***c`***-предшественника вида ***(41)*** из $C(B,\infty)$-множества, т.е. структура согласно определения ***4*** не обладает конфигурациями типа ***НКФ-2***.

На основе ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$, определенной параллельными подстановками ***(40.b)***, *бинарной* классической ***1-ОС*** с индексом соседства ***X***=$\{\boldsymbol{0,1,2}\}$, нетрудно убедиться, что для такой структуры отсутствуют пары ***ВСКФ***, а значит ***НКФ*** и ***НКФ-3***. Вместе с тем, эта структура согласно теоремы ***29*** обладает *неконструируемостью* типа ***НКФ-1*** (*например*, ***c***=□***1***□). Повторяя теперь предыдущие рассуждения для случая ***ЛФП (40.a)***, убеждаемся, что и для рассматриваемой *бинарной* структуры отсутствует неконструируемость типа ***НКФ-2***.

На основе ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$, определенной параллельными подстановками ***(40.c)***, *бинарной* классической ***1-ОС*** с индексом соседства ***X***=$\{\boldsymbol{0,1,2}\}$, несложно убедиться, что данная структура обладает типом неконструируемости ***НКФ*** уже на блочной ***КФ*** вида $\boldsymbol{c_b}$***=111***, а также ***НКФ-1*** уже вида ***c***=□***11***□, что веьма легко доказывает попытка определения для нее допустимых типов ***c`***-предшественников. Однако, с другой стороны, предположим теперь, что произвольная конечная ***c-КФ*** все же имеет ***c`***-предшественника, но только из множества $C(B,\phi)$, а именно:

$$
\begin{aligned}
c'' &= ...\square 1 x_2 x_3 x_4 x_5 \,......\, x_m 1 \,|\, 011111... \\
c` &= ...\square 1 x_2 x_3 x_4 x_5 \,......\, x_m 1 \,|\, \square \\
c &= ...\square 10\, y_3 y_4 y_5 \,......\, y_m 1 \,|\, \square
\end{aligned}
$$

Но тогда на основе параллельных подстановок ***(40.c)*** довольно легко сконструировать для нее из ***c`***-предшественника и ***c″***-предшественника из множества $C(B,\infty)$. Следовательно, таким образом определенная бинарная ***1-ОС*** не обладает ***НКФ-2*** и ***НКФ-3***. Наконец, *бинарная классическая* ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства ***X***=$\{\boldsymbol{0,1}\}$, определенная ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ ***(40.d)***, обладает ***НКФ*** уже на блочных ***КФ*** вида $\boldsymbol{c_b}$***=010*** и ***НКФ-3***, например, вида ***c***=□***1***□. С другой стороны, данная структура не должна обладать ***НКФ-1***, т.к. для каждой ***КФ*** $c^* \in C(B,\infty)$, как несложно заметить, выполняется соотношение $c^*\tau^{(2)} \in C(B,\infty)$, т.е. $C(B,\infty)$ замкнуто относительно $\tau^{(2)}$. Следовательно, определенная таким образом однородная структура обладает свойством неконструируемости типа ***НКФ-2.***

Приведем теперь конструктивное доказательство того момента, что невозможно определяющее соотношение теоремы ***64,*** лежащее в основе понятия сложности *конечных* ***КФ*** в ***ОС***-моделях, при условии, что в качестве ***ГФП*** $\tau_k^{(n_k)}$ ***(k=1..p)*** взяты функции, определяемые ***ЛФП*** с *параллельными* подстановками ***(40.a-d),*** т.е. рассмотренные выше функции нашего минимального ***базисного*** G_f-множества. Согласно сказанного ***ГФП, ЛФП*** которых определены *параллельными* подстановками ***(40.a-c),*** обладают неконструируемостью типа ***НКФ-1;*** в качестве примера этого типа ***КФ*** можно положить соответственно c^a=□11□, c^b=□1□ и c^c=□11□. Более того, можно показать, что в качестве ***НКФ-1*** для ***ЛФП,*** определяемой параллельными подстановками ***(40.b),*** является и ***КФ*** $c^{`b}$=□11□. Итак, каждая из первых трех функций G_f-множества обладает общим множеством ***НКФ-1*** уже вида $GSA=\{c_m$=□110^{m}11□$\,|\,m\geq 3\}$. С другой стороны, для четвертой ***ГФП*** G_f-множества, чья ***ЛФП*** определяется параллельными подстановками типа ***(40.d),*** любая ***КФ*** c=□$1x_2x_3...x_k0^px_{k+p+1}...x_m1$□ $x_j \in B$ ***(j=2..m)*** за ***(p-1)*** шагов переводится в ***сплошную*** (*не содержащую внутри себя* ***0***-*состояний*) ***КФ*** длины ***m+p,*** где ***p*** – *максимальная* длина нулевого отрезка автоматов, составляющих *исходную* ***КФ c;*** точнее, начиная с ***n=m+p,*** каждая ***КФ*** $c\tau_d^{(2)n}$ будет *сплошной* конфигурацией.

Таким образом, использование в определяющем соотношении (теорема ***64)*** первых трех ***ГФП*** из *минимального базового* G_f-множества при любом конечном наборе c_k ***(k=1..v)*** конечных начальных ***КФ*** оставляет нереализованным по крайней мере *бесконечное* ***GSA***-множество конечных ***КФ.*** Но тогда ввиду вышеотмеченного свойства четвертой ***ГФП*** из G_f-множества поглощать ***0***-состояния конечных ***КФ*** невозможно генерировать *бесконечное* ***GSA***-множество ***КФ*** при любых начальных ***КФ*** из $C(B,\phi)$-множества. Следовательно, определяющее соотношение (теорема ***64)*** невозможно при условии использования в качестве ***ГФП*** $\tau_k^{(n_k)}$ функций из минимального *базового* множества G_f. Таким образом, определенное четырьмя вышеуказанными ***ГФП*** G_f-множество действительно является *минимальным базовым.* В частности, любая конечная конфигурация $c_m \in GSA$ может быть сгенерирована из *примитивной* ***КФ*** c_p=□1□ последовательностью ***ГФП*** τ_d^m из G_f-множества вида $c_m=c_p\tau_d^m\tau_c\tau_d$, где ***ГФП*** τ_x определяется ***ЛФП*** с параллельными подстановками вышеуказанного вида ***(40.x;*** $x \in \{a,b,c,d\}$***).*** Результат теоремы ***70*** позволяет решить ряд проблем из монографии [5]; он может быть использован для исследования проблемы сложности одномерных конечных ***КФ*** в произвольном ***А***-алфавите [54-56,88]. В частности, на основе результатов данной теоремы можно дать наиболее простое обоснование введенного понятия сложности конечных ***КФ*** в одномерном *бинарном* случае. Результат этого обоснования принимает форму следующей теоремы [54,86,90], представляющей также и важный самостоятельный интерес в качестве составляющей аппарата исследования классических ***ОС***–моделей. И действительно, данный результат неоднократно был использован при исследованиях различного рода *динамических* свойств классических ***d-ОС (d≥1).*** В частности, в полной мере это относится к исследованиям *порождающих* возможностей структур, определяемых ими параллельных грамматик, проблеме сложности и декомпозиции ***ГФП*** и др.

<u>Теорема 71</u>. Любая одномерная бинарная конфигурация $c^{**} \in C(B,\phi)$ ***монотонно генерируется из примитивной КФ*** c_p = □1□ ***посредством ГФП*** $\tau_{jk}^{(n_k)}$ ***из некоторого фиксированного конечного множества GSV. В то же самое время не существует конечной системы пар*** $\{c_k, \tau_{jk}^{(n_k)}\}$ ***таких, что имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:***

$$\bigcup_k < c_k > \left[\tau_{j_k}^{(n_k)}\right] = C(B,\phi); \quad c_k \in C(B,\phi) \quad (n_k \in \{2,3\}; \quad j_k \in \{0,1,2,3\}; \; k = 1\,..\,p)$$

Множество GSV бинарных глобальных функций может быть выбрано в качестве базового G_f-множества, относительно которого определяется понятие сложности одномерных бинарных конечных конфигураций в классических ОС-моделях.

Следует отметить, что результат этой теоремы обобщается и на случай произвольного алфавита ***A*** внутренних состояний единичных автоматов *одномерной* ***ОС***-модели [90]. Более того, на основе данного результата могут быть даны и более простые, а в целом ряде случаев и конструктивные доказательства предыдущих теорем главы, а также получены другие интересные результаты по *сложности* конечных ***КФ*** в *бинарных* ***1-ОС*** [54-56]. При этом, первая часть теоремы ***71*** может быть существенно улучшена, а именно, имеет место следующий *основной* результат, представляющий определенный интерес для самой теории как классических, так и полигенных ***ОС***-моделей [90].

<u>*Теорема 72*</u>***.*** ***В качестве конечной системы пар*** $\{c_k, \tau_{jk}^{(n_k)}\}$ ***предыдущей теоремы 71 может быть выбрана такая система пар, в которых каждая ГФП*** $\tau_{jk}^{(n_k)}$ ***представляет собой произвольную композицию конечного числа функций из множества GSV. Существуют подмножества внутри множества С(В,ϕ) всех конечных бинарных одномерных конфигураций (мощности в среднем 3/4 от мощности всего множества С(В,ϕ)), которые не смогут быть сгенерированы посредством конечного числа пар {КФ, ГФП} следующего вида, а именно:*** $\{c_k, \tau_k^{(n_k)}\}$ ***(***$c_k \in C(B,\phi)$***; k = 1 .. p).***

В целом ряде случаев систему пар $\{c_k, \tau_k^{(n_k)}\}$ $c_k \in C(B,\phi)$ в формулировках теорем ***71*** и ***72*** можно использовать в эквивалентной форме, полагая $(\forall k)(c_k \equiv c_p = \square 1 \square)$, т.е. можно использовать единую примитивную c_p-***КФ*** ***(k=1..m).*** Действительно, нетрудно убедиться, что для каждой ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ можно указать ***ГФП*** $\tau_c^{(h_c)}$ в том же самом ***А***-алфавите такую, что $c_p \tau_c^{(h_c)} = c$. Следовательно, для конечной системы пар $\{c_k, \tau_k^{(n_k)}\}$ существует эквивалентная ей *(в смысле множества генерируемых конечных* ***КФ****)* система пар вида: $<c_p, \{\tau_k^{(n_k)}\} \cup \{\tau_k^{(h_k)} \mid k=1 .. m\}>$, где ***ГФП*** $\tau_k^{(h_k)}$ такова, что имеет место соотношение $c_k = c_p \tau_k^{(h_k)}$ ***(k=1..m).*** Данный подход позволяет унифицировать множество начальных c_k-***КФ*** системы пар образующих, смещая основной акцент на конечное множество базовых ***ГФП.*** С учетом сказанного, соответствующим образом модифицируются *формулировки* теорем ***71***, ***72*** и, в первую очередь, упрощается сам вид определяющего соотношения основной теоремы ***64.*** Вместе с тем, обе эквивалентные формы указанного соотношения имеют также свои преимущества в теоретических исследованиях по динамике ***ОС***-моделей. Наиболее же наглядно данный момент проявляется в случае использования введенного нами понятия ***A(X)***-сложности конечных ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях и полученных на его основе результатов как аппарата исследования динамических свойств как классических, так и полигенных ***ОС***-моделей. Следует отметить, что проблема ***сложности*** конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях, несмотря на представленные выше и целый ряд других результатов, имеет и целый ряд открытых вопросов и перспективных направлений для дальнейшего исследования [5,7-9,11,54-56,88], требующих своего разрешения с различных точек зрения.

В заключение раздела целесообразно остановиться на двух принципиально различных подходах к определению понятия *сложности* конечных ***КФ*** в *классических* ***ОС***-моделях, а именно: ***блочном*** и ***конфигурационном,*** суть которых уже вкратце отмечалась в разделах ***3.1-3.2.*** Прежде всего, под *конфигурационной* сложностью понимается возможность ***ОС***-модели либо совокупности моделей сгенерировать множество всех конечных конфигураций из одной либо конечного множества ***GS*** начальных конечных конфигураций. В рамках определения ***16*** и базирующейся на нем теоремы ***65*** следует, что для каждого целого ***d≥1*** множество ***C(A,d,ϕ)*** всех ***d***-мерных *конечных* ***КФ*** содержит конфигурации *любой* наперед заданной сложности относительно любого конечного базового G_f-множества ***d***-мерных ***ГФП,*** определенных в некотором конечном ***А***-алфавите классической ***ОС-***

модели. Из данного результата следует, что как бы мы не определили *конечное базовое* множество G_f все еще будут существовать относительно него во множестве ***C(A,d,ϕ)*** конфигурации любой наперед заданной сложности. Совершенно иная картина является вполне допустимой в случае определения ***блочной*** сложности, когда во внимание принимается существенно более широкая возможность генерации классической ***ОС***-моделью не конечных ***КФ*** вида $c=□hx_1x_2x_3...x_nh□$ [□ – *бесконечная* ***0****-конфигурация;* $x_j \in A$, $j=1..n$; $h \in A\backslash\{0\}$], а блочных конфигураций, т.е. конфигураций конечных блоков $<x_1x_2x_3...x_n>$ $\{x_j \in A,\ j=1..n\}$ единичных автоматов. При данном подходе вполне реальна совершенно другая ситуация. Проиллюстрируем суть подобных различий на примере простой бинарной ***1-ОС*** с характеристическим номером ***120, ГФП*** которой определяется ***ЛФП*** с параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$000 \rightarrow 0 \quad 001 \rightarrow 1 \quad 010 \rightarrow 1 \quad 011 \rightarrow 1 \quad 100 \rightarrow 1 \quad 101 \rightarrow 0 \quad 110 \rightarrow 0 \quad 111 \rightarrow 0$$

Как уже отмечалось, данная ***1-ОС*** не обладает *неконструируемостью* типа ***НКФ (НКФ-3)***, обладая неконструируемостью типа ***НКФ-1***, например, вида $c^*=□10x_1x_2...x_n1□$ $\{x_j \in B=\{0,1\},\ j=1..n\}$. Данное утверждение легко доказывает следующее рассуждение. Так как определенная ***1-ОС*** не обладает неконструируемостью ***НКФ***-типа, то *произвольная* конечная ***КФ*** c^* будет иметь *предшественника* по меньшей мере из множества ***C(B,1,ϕ)***. Пусть такой предшественник c^{-1} имет нижеследующий простой вид, а именно:

c^{-1} =	□	0	0	1	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	y_2	.....	y_n	1	□
$c^{-1}\tau^{(3)} = c^{**}$ =	□	1	1	x_o	x_1	x_2	.....	x_n	1	□

где y_k, $x_j \in B=\{0,1\}$, $j=0..n$, $k=2..n$. Несложно убедиться, что конечный предшественник c^{-1} будет не в состоянии сгенерировать ***КФ*** требуемого вида c^*, а генерируемая им ***КФ*** c^{**} будет начинаться всегда с префикса ***«11»***. Следовательно, каждая конфигурация вида $c^*=□10x_1x_2 ... x_n1□$ будет для рассматриваемой структуры ***НКФ-1***, имея предшественников c^{-1} только из множества ***C(B,1,∞)***. Более того, данная структура не обладает также и неконструируемостью типа ***НКФ-2***, что легко доказывается нижеследующими весьма простыми рассуждениями, а именно:

c'=	.....	.....	.....	.....	y'_{n-1}	y'_n	0	1	1	1	.....
c^{-1}=	.....	.....	.....	.....	y_{n-1}	y_n	1	0	0	0	.....
$c'\tau^{(3)} = c^{-1}\tau^{(3)} = c^*$ =	□	1	x_1	.....	x_{n-1}	x_n	1	0	0	0	.....

Предполагая теперь, что произвольная конечная ***КФ*** c^* имеет *предшественника* c^{-1} только лишь из множества ***C(B,1,ϕ)***, несложно определить для нее и ***КФ*** c' из множества ***C(B,1,∞)***, для которой справедливо соотношение $c'\tau^{(3)} = c^*$, т.е. каждая конечная ***КФ*** относительно данной ***1-ОС*** имеет *предшественника* как из множества ***C(B,1,ϕ)***, так и из множества ***C(B,1,∞)***, что и подтвержает вывод об отсутствии для структуры неконструируемости типа ***НКФ-2.***

Наличие для данной *бинарной* структуры ***1–ОС*** неконструируемости типа ***НКФ–1*** следует уже из того факта, что при отсутствии для нее ***НКФ (НКФ–3)*** множество ***C(B,1,∞)*** является незамкнутым относительно глобального отображения, индуцируемого ***ГФП*** $\tau^{(3)}$ структуры (*см. теорему* ***15***).

С учетом вышесказанного и вида ***ЛФП*** рассматриваемой ***1-ОС*** можно показать, что для данной структуры существует *бесконечное* множество конфигураций типа ***НКФ-1*** $\left\{c_1^j\right\}(j=1..\infty)$, которые в совокупности генерируют все множество ***C(B,1,ϕ)*** конечных конфигураций ***(η)***. Следовательно, множество ***НКФ-1*** структуры с характеристическим номером ***120*** генерирует множество ***C(B,1,ϕ)*** всех конечных конфигураций, а именно:

$$\tau^{(3)}:\begin{cases} c_1^1 \to c_2^1 \to c_3^1 \to c_4^1 \to \ldots \to c_k^1 \to \ldots \\ ======================= \\ c_1^j \to c_2^j \to c_3^j \to c_4^j \to \ldots \to c_k^j \to \ldots \\ ======================= \end{cases} \qquad (\eta)$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \left\langle c_1^j \right\rangle \left[\tau^{(3)}\right] = C(B,1,\phi); \quad (\forall k,j)\Big(k \neq j \to \left\langle c_1^k \right\rangle \left[\tau^{(3)}\right] \cap \left\langle c_1^j \right\rangle \left[\tau^{(3)}\right] = \varnothing\Big)$$

Более того, как отмечалось ранее, полученные нами результаты компьютерных экспериментов с этой структурой в сочетании с некоторыми теоретическими, базирующимися на динамических свойствах классических ***1-ОС***, обусловленных наличием в них неконструируемости типа ***НКФ-1*** при отсутствии ***НКФ (НКФ-3)*** и ***НКФ-2***, позволили нам сформулировать следующее достаточно интересное предположение, а именно: ***Для классической бинарной 1-ОС с характеристическим номером 120 каждая конечная конфигурация является самовоспроизводящейся в смысле Мура, одновременно генерируя при этом все конечные блочные КФ*** [88]. Так, в случае положительного ответа мы получаем не только пример достаточно простой бинарной ***ОС***-модели, обладающей свойством *универсальной воспроизводимости* в смысле Мура *конечных* конфигураций, но и пример структуры, для которой любая конечная конфигурация генерирует ***все*** множество ***блочных КФ***. Проведенные нами и другими исследователями компьютерные эксперименты склоняют нас к мысли о справедливости указанного предположения, между тем, теоретического подтверждения получить пока не удалось, чему в немалой степени способствует также и псевдостохастический характер динамики генерируемых структурой последовательностей конфигураций [88,90].

Справедливость приведенного предположения еще раз достаточно наглядно проиллюстрирует существенность различий как между *универсальными конечными* и *блочными* ***КФ***, генерируемыми классическими ***ОС***-моделями, так и между нашим подходом к определению сложности *конечных* ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях и подходом ***А. Колмогорова*** к определению сложности *конечных* объектов. В частности, возможность генерируемости в ***1-ОС*** с номером ***120*** всех блочных ***КФ*** из произвольной начальной ***КФ*** могла бы быть некоторым *аналогом* генерации машиной Тьюринга последовательности бинарных слов ограниченной сложности [260].

Большое значение проблема *сложности* конечных ***КФ*** в ***ОС***-моделях имеет не только в контексте исследования их как некоторых формальных дедуктивных систем, но и в случаях погружения в них развивающихся систем клеточной организации и их отдельных феноменов. В таком случае данная проблема имеет самое непосредственное отношение к вопросу исследования сложности самоорганизующихся биологических клеточных систем, что весьма актуально для современной биологии развития. Ведь до сих пор при кибернетическом исследовании биологии развития мы не имеем достаточно удовлетворительного подхода к вопросу оценки *сложности* развивающихся биологических систем. И наш математический подход в данном направлении сможет оказаться достаточно плодотворным и перспективным. Таким образом, представленные здесь результаты (*наряду с другими нашими результатами по проблеме сложности конечных* ***КФ*** *в* ***ОС***-*моделях*) в целом не только формируют собственно проблематику и решают целый ряд основных ее задач, но и формулируют ряд открытых вопросов и достаточно перспективных направлений дальнейших исследований, представляющих значительный самостоятельный интерес как для теоретических, так и для прикладных аспектов проблематики ***ОС***-моделей в целом.

Теория *сложности вычислений* в значительной мере базируется на следующем вопросе, а именно: ***Каким образом количество ресурсов, привлекаемых некоторым вычислительным устройством для вычисления заданной функции, зависит от входных данных?*** В зависимости от конструкции этого устройства можно уточнять понятие самого ресурса. Например, если устройство – машина Тьюринга, то можно спросить, сколько времени потребуется для вычисления функции, а также какое количество ячеек ленты окажется задействованным при *данном* вычислении. Тогда как для машины Шенфилда можно спросить про время вычисления, а также и про максимальное число, которое будет содержаться в регистрах машины в ходе вычислений. Для иных вычислительных устройств возможны и другие постановки вопроса о количестве затребованных ресурсов: число переходов, которые программа выполняет в ходе вычисления, общее количество проходов для всех циклов и т.д. Несмотря на то, что все эти вопросы весьма специфичны и их осмысленность зависит от того, какое конкретное устройство мы выбираем для вычислений, в них есть и нечто общее. В случае выбора вычислительной ***ОС***-модели, *вычисляющей (генерирующей)* конфигурации из заданных начальных конфигураций вопрос сложности конечной конфигурации, заданной в алфавите такой модели, вполне естественно формулируется следующим образом, а именно:

Каким количеством глобальных функций перехода $\tau^{(n_j)}$ из фиксированного базового множества SVG ГФП можно сгенерировать искомую конфигурацию $c^* \in C(A,d,\phi)$ из некоторой примитивной конфигурации $c_p \in C(A,d,\phi)$?

Именно в основе введенного нами понятия ***сложности*** конечных конфигураций в аксиоматике структур ***d–ОС*** $(d \geq 1)$ и лежит данный вопрос. Подобно случаю перечисленных вычислительных моделей и ресурсов, определяющих вычислительную сложность, нами в качестве таких ресурсов выбраны некоторое базовое множество ***SVG ГФП*** $\tau^{(n_j)}$, посредством которых генерируется та или иная конечная конфигурация $c^{\#\#} \in C(A,d,\phi)$, и количество требуемых для этого шагов генерации, вообще говоря. При данном подходе был получен целый ряд достаточно серьезных результатов, характеризующих таким образом определенное понятие сложности конечных конфигураций; с другой стороны, в этом направлении остаются довольно интересные вопросы для исследования.

Полученные нами результаты по проблеме *сложности конечных* ***КФ*** в контексте ***ОС***-аксиоматики позволяют, в определенной мере, лучше прояснять суть самого понятия сложности, зависящего от используемой аксиоматики. Например, в аксиоматиках *классических* и *полигенных* ***ОС***-моделей существуют *бинарные* конечные ***КФ*** любой сколь угодно большой сложности, тогда как в другой аксиоматике (*например, в аксиоматике* ***А.Н. Колмогорова***) все *бинарные конечные* слова могут иметь только ограниченную сложность. Следовательно, по всей видимости, не существует *абсолютного* понятия *сложности* как произвольных конечных объектов, так и понятия сложности вообще; т.е. само понятие ***сложности*** носит в значительной мере относительный аксиоматический характер. Подобно рассмотренному случаю *классических* ***ОС***-моделей и для ***ОСнР***-моделей можно вполне естественным образом определить понятие *сложности* конечных ***КФ***, базирующееся на аналоге теоремы ***64*** [5,8-10,54,536]. Большинство представленных результатов по *сложности* конечных ***КФ*** непосредственно переносится и на класс однородных структур ***ОСнР*** на разбиениях, играющих достаточно важную роль в качестве превосходной среды физического моделирования, наряду с симулированием и исследованием довольно широкого *класса* пространственно-распределенных динамических систем. С основными вопросами теории данного класса структур читатель может ознакомиться в работах [8-10,54-56,88,90,150-152,268,273,536], ряд результатов по ней приводится и в настоящей монографии.

Глава 5.
Параллельные формальные грамматики и языки, определяемые однородными структурами (классическими и других типов ОС-моделями)

Теория формальных грамматик ***(ТФГ)*** занимает центральное место в математической *лингвистике***,** т.к. именно она предоставляет средства для исследования собственно функционирования *языка***.** Вместе с тем, она выделяется среди других разделов математической лингвистики существенно большей сложностью своего аппарата *(сходного с аппаратом теории алгоритмов и аппаратом общей теории автоматов***,** *с которыми имеет немало точек соприкосновения и пересечения)* и существенно большей сложностью возникающих в ней математических проблем. Формальные грамматики наиболее хорошо изученных типов представляют собой системы**,** позволяющие порождать или распознавать множества цепочек, интерпретируемых, обычно, как множества грамматически правильных предложений некоторых формальных *языков***,** а также сопоставлять входящим в эти множества цепочкам описания их синтаксической структуры в терминах систем составляющих или деревьев подчинения [162,163,389,390,536,567].

Математическое значение ***порождающих грамматик*** определяется тем, что они представляют собой одно из средств эффективного задания множеств слов. Класс *формальных* языков, которые порождаются *произвольными* грамматиками, совпадает с классом всех рекурсивно-перечислимых множеств. Особый интерес с данной точки зрения здесь представляют формальные грамматики *классической иерархии* ***Хомского*** [389]. В этой связи приобретает существенное значение изучение классов абстрактных автоматов, эквивалентных тем или иным классам формальных грамматик, т.е. описывающих те же формальные языки. В частности, например, ***автоматные*** грамматики эквивалентны *конечным автоматам*, ***контекстно-свободные –*** *автоматам с магазинной памятью* и ***контекстно-зависимые –*** *линейно ограниченным машинам Тьюринга*, т.е. таким машинам, которые перерабатывают каждое слово, не выходя за пределы того участка внешней ленты, где записано входное слово. Кроме грамматик ***Хомского*** на сегодня существует целый ряд иных интересных с одной или другой точки зрения видов формальных грамматик, предназначенных для описания множеств слов и других объектов, из которых в последние годы особое внимание привлекают параллельные формальные грамматики, предоставляющие достаточно эффективные средства для лингвистического описания ряда важных параллельных процессов и объектов [536].

Как уже отмечалось, ***ТФГ*** довольно тесно примыкает к теории абстрактных автоматов. Поэтому изучение динамики ***ОС-***моделей также и с точки зрения формальных грамматик представляет несомненный интерес. При этом, теория *параллельных формальных грамматик* может быть весьма успешно использована не только в создании теории параллельного программирования, а также архитектур вычислительных систем высокопараллельного действия новых поколений, но и при создании лингвистической основы для описания динамики пространственно-распределенных систем клеточной природы [3-5,7-10,32,59,60,71,75,80,86,162,163,233]. Поэтому, с целью изучения языков, генерируемых классическими ***ОС-***моделями, нами в ***1974 г.*** были введены формальные параллельные грамматики, названные τ_n*-грамматиками* [31,32]. При этом, в основном изучались

τ_n-грамматики, определяемые классическими и недетерминированными одномерными ***1-ОС***, однако подобный подход может быть распространен и на случай ***d-ОС (d≥2)***, а также некоторые другие типы структур, отличные от вышеуказанных [5,54-56,88,90,536,567].

При данном подходе *классические* ***ОС***-модели можно рассматривать как *формальные параллельные грамматики* ***(ФПГ)***, не использующие *нетерминальных* символов и вывод в которых выполняется *абсолютно параллельным* образом. Такого типа грамматики подобны хорошо известным системам ***А. Линденмайера*** (***L****-системам*) и могут быть довольно успешно использованы для формального лингвистического описания многих параллельных дискретных процессов и динамики объектов клеточной природы [136,163,233,251,265,336,338]. Ниже достаточно детально на содержательном уровне проводится рассмотрение τ_n-грамматик в соответствии с традициями ***ТФГ***, в результате чего читатель получает целый ряд важных характеристик такого класса *формальных параллельных грамматик*. На основе результатов рассмотрения, в частности, показывается, что традиционный подход к созданию параллельных языков программирования для вычислительных ***ОС***-моделей, пожалуй, не позволит создавать действительно высокоэффективное параллельное программное обеспечение, использующее очень высокую степень *распараллеливания* вычислений и обработки, допускаемую данными моделями управления и обработки информации.

Неформально *параллельные* τ_n*-грамматики* вводятся следующим образом, а именно. По аналогии с основными понятиями ***ТФГ*** алфавит ***А*** внутренних состояний *единичного* автомата *классической* ***1-ОС*** называется *алфавитом* τ_n-грамматики, ***ЛФП*** структуры определяет множество *параллельных продукций* или *правил вывода* грамматики, начальная ***КФ*** структуры – *аксиому* и порождаемые из нее конечные ***КФ*** – *слова* языка, определяемого *параллельной* τ_n*-грамматикой*. Подобно обычной грамматике в ***ОС***-модели из начальной ***КФ со*** (*аксиомы*) выводятся посредством ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ (*правил вывода*) новые ***КФ*** (*слова языка*). Между тем, между *традиционными* формальными грамматиками и *параллельными* τ_n*-грамматиками* имеются два весьма существенных отличия, а именно:

- *правила вывода в формальной* τ_n*-грамматике применяются одновременно и абсолютно параллельным образом;*
- *в* ***А****-алфавите формальной* τ_n*-грамматики не делается каких-либо различий между терминальными и нетерминальными символами*.

В ***ТФГ*** *формальный* язык определяется как множество всех терминальных слов, генерируемых из *аксиомы* посредством *правил вывода* грамматики. Аналогичным образом определяется ***L***(τ_n)*-язык* как множество всех *конечных* ***КФ*** (*слов*), генерируемых из *начальной* ***КФ*** (*аксиомы*) одновременным применением *параллельных подстановок*, определяющих ***ЛФП***, ко всем символам каждой текущей ***КФ*** (*слове*). А так как ***ЛФП*** структуры взаимно однозначно определяет ее ***ГФП***, то под *правилами вывода* в формальной параллельной τ_n*-грамматике* часто понимается *глобальная функция перехода* структуры ***(ГФП)***. Определенные подобным образом параллельные формальные τ_n-грамматики подобны упомянутым ***L***-системам и могут быть использованы для лингвистического описания ряда *дискретных развивающихся* систем и параллельных процессов. Для дальнейшего изложения нам понадобится ряд определений. Предполагается при этом, что читатель знаком с основами ***ТФГ***. При изложении материала настоящей главы книги будут использоваться общепринятые терминология и обозначения теории формальных грамматик [389].

5.1. Основные свойства параллельных языков, определяемых классическими однородными структурами (классическими ОС-моделями)

В настоящем разделе будут представлены основные понятия и свойства *формальных параллельных языков*, определяемых одномерными классическими ***ОС***-моделями. Так, нами в традициях ***ТФГ*** достаточно детально изучены τ_n-грамматики и определяемые ими параллельные формальные языки, что нашло отражение в работах [5,7-10,32,33,53,59,60-63,71-73]. Следуя традициям ***ТФГ*,** мы определяем ***$L(\tau_n)$*-язык** как множество всех слов *(конечных* ***КФ*)**, выводимых из аксиомы ***$c_o \in C(A,\phi)$*** *(начальной* ***КФ*)** посредством применения к ней правил вывода $\tau^{(n)}$ ***(ГФП** классической структуры* ***1-ОС).*** Более формально параллельные ***τ_n-грамматика*** и ***$L(\tau_n)$-язык*** определяются следующим образом, а именно.

<u>Определение 17</u>. Параллельная τ_n-грамматика представляется упорядоченным кортежем вида $\tau_n = \langle n, A, \tau^{(n)}, c_o \rangle$, где составляющие его компоненты имеют следующий смысл, а именно:

1) n – индекс грамматики (размер шаблона соседства некоторой классической 1-ОС);
2) A – алфавит грамматики (внутренние состояния единичных автоматов в 1-ОС);
3) $\tau^{(n)}$ – правила вывода грамматики (глобальная функция перехода в структуре 1-ОС);
4) c_o – аксиома грамматики (начальная конечная конфигурация в классической 1-ОС).

Формальный *параллельный* ***$L(\tau_n)$*-*язык*,** определяемый τ_n-*грамматикой*, является множеством всех слов *(конечных* ***КФ*),** выводимых *(генерируемых)* из *аксиомы* ***$c_o \in C(A,\phi)$*** *(начальной* ***КФ*)** посредством применения к ней *правил вывода* $\tau^{(n)}$ *(т.е.* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ *классической* ***1-ОС*),** т.е. определяющим здесь является следующее соотношение ***$L(\tau_n) \equiv \langle c_o \rangle[\tau^{(n)}]$*.**

Как уже отмечалось выше, *существенной* чертой τ_n-грамматики является используемый ею *сугубо* параллельный принцип переработки слов, отличая ее от *традиционных* формальных грамматик. Этот *параллелизм* отражает основные прикладные мотивации как со стороны вычислительных и биологических наук, так и со стороны целого ряда высоко абстрагированных моделей реального физического мира, функционирующих во времени и пространстве. Более того, τ_n-грамматики не используют в отличие от традиционных грамматик нетерминальных символов *(носящих роль символов, расширяющих алфавит формальной грамматики).* Определяя таким образом *параллельные* τ_n-грамматику и ***$L(\tau_n)$*-язык,** получаем возможность исследовать динамику классических ***1-ОС*** в рамках ***ТФГ*,** что позволяет взглянуть на нее с *нетрадиционной* стороны. Полученные результаты исследования классических и недетерминированных ***1-ОС*** с точки зрения ***ТФГ*** представлены в цикле наших работ *(см. обзоры в* [5,7-10,32,53,59,61,86,90]*)* и в работах ряда других исследователей [162,163,184,233,251,254,264]. Если же не оговаривается противного, то на протяжении настоящего раздела будут рассматриваться параллельные τ_n-*грамматики* и соответствующие им ***$L(\tau_n)$-языки*,** определяемые однородными структурами ***$\langle Z^1,A,\tau^{(n)},X \rangle$*** с алфавитом ***$A=\{0,1,2,...,a-1\}$*** внутренних состояний и общим индексом соседства вида ***$X=\{0,1,2, ..., n-1\}$*.**

Классическим подходом к математической характеристике некоторого класса *формальных языков* является исследование свойства его *замкнутости* относительно традиционных в ***ТФГ*** операций. Имеются две основные причины для рассмотрения этих операций относительно параллельных ***$L(\tau_n)$*-языков.** Во-первых, на этом пути имеется возможность глубже прояснить различия между семейством ***$L(\tau_n)$*-языков** и традиционными семействами формальных языков. Во-вторых, до сих пор не до конца определено само множество *операций*, естественных для семейства ***$L(\tau_n)$*-языков.** Следующий основной результат [32,59] определяет поведение наших ***$L(\tau_n)$*-языков** относительно *традиционных* операций, исследуемых в классической теории формальных грамматик [389,390].

<u>Теорема 73</u>. Класс языков $L(\tau_n)$ незамкнут относительно операций: объединения, произведения, итерации, дополнения, пересечения, гомоморфизма и конечного преобразования, но замкнут по отношению к операции инверсии.

Ю. Дассов [233] исследовал параллельные τ_n-*грамматики* и ассоциированные с ними $L(\tau_n)$-*языки* относительно четырех новых теоретико-множественных операций и показал: класс $L(\tau_n)$-языков незамкнут также относительно и данных, интересных с биологической точки зрения операций. Вышеупомянутые результаты были получены, в основном, *конструктивными* методами, которые состоят в построении соответствующих примеров $L(\tau_n)$-языков. При этом, к очень *существенным* чертам τ_n-грамматик можно отнести также и тот *немаловажный* факт, что большинство подходов из стандартных методики и аппарата исследований ***ТФГ*** неприменимо к классу параллельных грамматик τ_n-грамматик и требует использования новых *нетрадиционных* подходов. В частности, использование методов теории рекурсивных функций позволило решить ряд вопросов теории параллельных τ_n-грамматик [5]. Данный подход базируется на введенном понятии ***G****-нумерации*, относительно которой устанавлено *взаимно однозначное* соответствие между некоторой частично рекурсивной ***словарной*** функцией $\tau^{(n)}: C(A,\phi) \to C(A,\phi)$ и $F_n(m): N \to N^* \subseteq N$ – ***числовой*** частично рекурсивной функцией. В этом случае исследование *параллельной* τ_n-грамматики и $L(\tau_n)$-языка, ассоциированного с ней, сводится к изучению соответствующей им указанной числовой $F_n(m)$ функции и области ее значений. В рамках данного подхода был исследован ряд свойств самой числовой $F_n(m)$-функции, для которой была получена верхняя оценка сложности, выражаемая следующим результатом, а именно: ***Любая числовая $F_n(m)$-функция мажорируется подходящей примитивно рекурсивной функцией $W(n,m)$.***

Данный результат хорошо согласуется с тем фактом [10], что: ***Словарная функция, определяемая параллельным отображением $\tau^{(n)}: C(A,\phi) \to (A,\phi)$, является примитивно рекурсивной функцией.*** Между тем, остается еще целый ряд вопросов, связанных с применением методов и результатов теории рекурсивных функций к проблемам исследования динамических свойств классических ***ОС***-моделей, но в нынешнем состоянии данный подход оказывает существенную помощь в этом направлении. Так, например, используя вышеописанный подход, было получено чрезвычайно простое доказательство следующего интересного результата из теории конечных автоматов [9]: ***Функция, определяемая конечным автоматом, безошибочно предсказывающим среду, является примитивно рекурсивной.*** Для случая же параллельных $L(\tau_n)$-языков данный подход позволяет получить следующие достаточно интересные результаты [3-5,32,54-56,88,90,536].

Теорема 74. В общем случае не существует конечного множества $L(\tau_n)$-языков, чье объединение образует дополнение некоторого языка того же класса, да и дополнение конечного множества $L(\tau_n)$-языков не может быть снова формальным параллельным языком того же класса.

Из представленных результатов следует, что семейство $L(\tau_n)$-языков проявляет весьма сильный иммунитет к *замыканию* относительно *традиционных* для ***ТФГ*** операций и ряду других операций, представляющих существенный интерес с точки зрения как самой ***ТФГ***, так и ряда приложений. В этом плане интересно сравнить между собой ***L****-системы* и τ_n-*грамматики*. Прежде всего, языки ***L***-семейства в большинстве своем в отличие от $L(\tau_n)$-языков обладают полным иммунитетом по отношению к традиционным операциям замыкания. Такой феномен объясняется, скорее всего, отсутствием нетерминального алфавита, чем присущим им свойством высокого параллелизма правил вывода. В результате проведенного анализа вполне естественным напрашивается вывод, что причина такого различия ***L***-систем и τ_n-грамматик, на наш взгляд, сводится к следующему.

L-системы допускают изменение длины перерабатываемого слова не только на его концах, но и за счет вставки (*удаления*) подслов внутри его. Тогда как для случая τ_n-грамматики невозможно производить *вставки* внутрь перерабатываемых слов даже *единственного* символа (*раздвижка слов*), а увеличивать их *длину* можно лишь на концах слова. Вообще говоря, если τ_n-грамматика жестко привязана к системе координат, определяемой ее однородным Z^d-пространством, то ***L***-система имеет значительно больше степеней свободы при выводе слов соответствующего параллельного ***L***-языка, что дает ей ряд преимуществ, используемых, например, в биологических приложениях.

Вычислительные возможности параллельных τ_n-грамматик ***(n ≥ 2)*** эквивалентны возможностям *универсальной* машины Тьюринга, т.е. класс всех параллельных τ_n-грамматик обладает свойством *универсальной* вычислимости. Об этом вычислительном свойстве ***ОС***-моделей говорилось выше и детальнее будет рассматриваться в связи с вопросами моделирования. Наряду с этим показано [32], что каждый конечный непустой язык генерируется подходящей τ_n-грамматикой, тогда как для каждого значения ***n***-индекса грамматики существуют *бесконечные* регулярные языки *(и даже конечные)*, которые не могут генерироваться τ_n-грамматиками, но вполне могут генерироваться τ_{n+1}-грамматиками. Таким образом, по порождающим возможностям параллельных языков τ_n-грамматики образуют иерархию согласно ***n***-индекса грамматики. Более того, существуют также *нерекурсивные* ***L***(τ_n)-языки и *регулярные* языки, не являющиеся ***L***(τ_n)-языками; ***L***(τ_n)-языки имеют непустые пересечения с языками *Клини*, а также *контекстно-свободными* и *контекстно-зависимыми* языками [389,390]. Как следствие вышеуказанных различий, семейство ***L***(τ_n)-языков совершенно отлично от *традиционных* семейств формальных языков в *иерархии* Хомского – данное семейство содержит некоторые *неконтекстно-свободные* языки и даже *нерекурсивные* языки при отсутствии в нем целого ряда классов *регулярных* языков [5,10,32,56,59,88,90,536].

При этом, общепризнанным методом понимания *порождающих* возможностей некоторого класса генерирующих формальных систем является *сравнение* его с теперь уже классической иерархией Хомского. Одним из основных доводов в пользу этого служит тот факт, что иерархия Хомского наиболее детально исследована в ***ТФГ***. В этой связи целый ряд наших результатов [5,10,32,56,59] посвящен установлению взаимосвязи ***L***(τ_n)-языков с *традиционными* языками в вышеупомянутой *иерархии Хомского*, из которых *основными* классами в порядке возрастания их сложности являются языки классов: *регулярные* (*языки Клини*), *контекстно-свободные*, *контекстно-зависимые* (***НС-языки***), *рекурсивные* и *рекурсивно перечислимые*. Было показано, что множество всех ***L***(τ_n)-языков образуют собственное подмножество множества всех языков *Линденмайера* (***L-языков***), тогда как ***L***(τ_n)-языки являются собственном подклассом класса ***L***(T_n)-языков, определяемых недетерминированными T_n-грамматиками, рассматриваемыми ниже. Итак, основной здесь наш результат устанавливает соотношение между семействами *параллельных* формальных ***L***(τ_n)- и ***L***(T_n)-языков, определяемых параллельными τ_n- и T_n-грамматиками соответственно классических и недетерминированных структур ***1-ОС***, в рамках иерархии *Хомского*. С целью лучшего понимания места ***L***(τ_n)-языков в иерархию дополнительно включены и подобные им ***<k, p>***-языки *Линденмайера* [5,10,32,56,59,88, 90,536,567]. Нижеследующая теорема ***75*** определяет место ***L***(τ_n)- и ***L***(T_n)-языков в классической иерархии Хомского относительно основных традиционных формальных языков. Немало весьма интересных свойств ***L***(τ_n)-языков относительно различных операций над ними представлено в работах [5,8,32,59,60,88,233,536,567] и в цитируемых в них ссылках на оригинальные источники. В настоящее время параллельные τ_n–грамматики и определяемые ими ***L***(τ_n)–языки исследуются в ***ТТГ*** относительно некоторых специальных операций, определяемых спецификой ряда довольно интересных параллельных формальных моделей вычислений и обработки информации.

<u>Теорема 75</u>. Следующая диаграмма (рис. 21) устанавливает соотношения между семействами параллельных формальных языков L(τ_n) и L(T_n), определяемых соответственно классическими и недетерминированными структурами 1-ОС, в рамках традиционной иерархии Хомского.

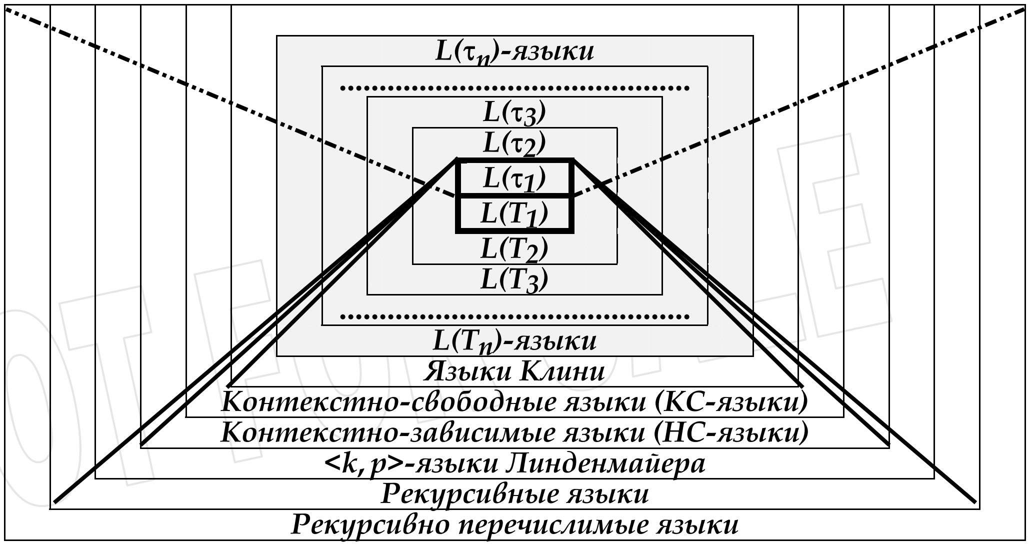


Рис. 21. Местоположение формальных языков $L(\tau_n)$ и $L(T_n)$ в иерархии Хомского.

Традиционным в ***ТФГ*** подходом является определение для определенного класса порождающих грамматик класса *распознавателей* или акцепторов, допускающих языки, генерируемые данными грамматиками**.** Очевидно**,** что хорошая автоматная модель семейства формальных языков задает ему достаточно строгую характеристику. При этом, относительно такой модели, вообще говоря, следует сделать одно существенное замечание, а именно. Все приемлемые модели данного типа **(***по крайней мере в их классическом смысле***)** имеют в качестве управляющего устройства некоторый конечный автомат. Поэтому семейство *допускаемых* такой моделью формальных языков должно быть *замкнутым* относительно операции *пересечения* с *регулярными множествами* слов. Различные классы ***L***(τ_n)**-**языков исследуются с такой «*программистской*» точки зрения. В этом направлении относительно ***L***(τ_n)**-**языков имеет место следующий основной результат [3,5,32]**,** непосредственно позволяющий определять возможности ***ОС***–моделей в качестве формальных прототипов высоко параллельных вычислительных систем и устройств, включая их программное обеспечение.

<u>Теорема 76</u>. Класс параллельных L(τ_n)-языков незамкнут относительно операции пересечения с регулярными множествами слов.

Таким образом, из этого результата следует, что по причине незамкнутости класса ***L***(τ_n)**-**языков относительно операции *пересечения* с регулярными множествами не представляется возможным найти для него автоматную *модель акцептора* в общепринятом смысле. Итак, относительно ***L***(τ_n)**-**языков существует целый ряд других интересных вопросов, часть из которых будет рассмотрена ниже. Прежде всего**,** с точки зрения проблемы *обратимости процессов*, погружаемых в структуры, представляет определенный интерес вопрос существования $L^{-1}(\tau_h)$**-**языка, *обратного* ***L***(τ_n)**-**языку. При этом, $L^{-1}(\tau_h)$**-**язык понимается как *множество всех* ***КФ*** $c_k \in C(A, \phi)$ таких, что каждая $<c_k>[\tau^{(h)}]$ последовательность обязательно должна содержать *аксиому* исходной τ_n**-**грамматики. Несложно убедиться [32], что при наличия *взаимной однозначности* параллельного глобального *отображения* $\tau^{(n)}: C(A) \rightarrow C(A)$ этот вопрос всегда имеет положительное решение: ***Для каждого L(τ_n)-языка с такого типа правилами вывода соответствующей ему τ_n-грамматики существует обратный ему $L^{-1}(\tau_h)$-язык того же самого класса.*** В случае существования для ***ГФП*** неконструируемости типов ***НКФ, НКФ-3*** и/или ***НКФ-1*** также можно определять ***L***(τ_n)**-**языки, имеющие обратные им языки того же класса [32]. Однако в общем случае данный вопрос решается отрицательно, о чем свидетельствует следующий основной результат.

Теорема 77. Существуют параллельные формальные $L(\tau_n)$-языки, словарные множества $L^{-1}(\tau_h)$ для которых не являются языками того же самого класса.

Достаточно интересным представляется также исследование свойства оставаться $L(\tau_n)$-языком относительно операции *сужения* или *расширения* его на конечное подмножество слов S из $C(A,\phi)$-множества; $S \subset C(A,\phi)$. Для многих интересных случаев множества слов $L(\tau_n)$, $L(\tau_n) \cup S$ и $L(\tau_n) \setminus S$ являются параллельными формальными языками одного и того же класса, а именно языками, генерируемыми *параллельными* τ_n-грамматиками, тогда как в общем случае данное утверждение неверно, точнее имеет место следующий основной результат [5,32,57-60].

Теорема 78. Существует параллельный формальный $L(\tau_n)$-язык и конечное подмножество слов $S \subset C(A,\phi)$ такие, что множества $L(\tau_n)$, $L(\tau_n) \cup S$ и $L(\tau_n) \setminus S$ не могут быть формальными языками одного и того же класса.

Таким образом, результаты теорем ***76-78*** представляют ряд наглядных примеров незамкнутости класса параллельных $L(\tau_n)$-языков относительно операций, характеризующих важные свойства *динамики* классических ***1***-мерных ***ОС***-моделей, определяющих соответствующие им *параллельные* τ_n-грамматики. Так, например, из теоремы ***76*** можно сделать вывод, что для параллельных $L(\tau_n)$-языков *неприемлемы* традиционные автоматные модели *акцепторов* с центральным управлением, в качестве которого выступает *конечный* автомат. Теорема ***78*** позволяет, например, сделать вывод о том, что класс параллельных $L(\tau_n)$-языков очень неустойчив даже относительно изменения его языков на конечные подмножества слов. Совместно с другими результатами по незамкнутости класса параллельных $L(\tau_n)$-языков относительно целого ряда важных теоретико-множественных операраций теоремы ***76-78*** подтверждают сильный ***иммунитет*** данного класса параллельных формальных языков в этом направлении [32,57-60,233]. Данный феномен существенно отличает класс *параллельных* $L(\tau_n)$-языков от *традиционных* семейств *формальных* языков, рассматриваемых в классической ***ТФГ*** [5,32,88,90,389,390,536].

Одним из возможных путей изучения структуры параллельных τ_n-грамматик является подход, состоящий в наложении частичных *ограничений* непосредственно на определения различных их компонент с последующим изучением *влияния* этих ограничений на *порождаемые* грамматиками языки. Ряд результатов в данном направлении представлен в нашей монографии [5] и работах [57-60]. Выше уже рассматривались свойства параллельных τ_n-грамматик и генерируемых ими $L(\tau_n)$-языков безотносительно к внутренней структуре слов, составляющих такие параллельные языки. В данной связи возникает следующий весьма интересный вопрос.

Бесконечную последовательность слов $S=\{c_k\}$ $(c_k \in C(A,\phi) \mid k=1, 2, 3, \dots)$ будем называть ***формульной,*** если каждое слово $c_k \in S \subset C(A,\phi)$ может быть структурно представлено в виде одной из конечного числа формул следующего общего вида, а именно:

$$C_k = C_{j_1}(k) C_{j_2}(k) C_{j_3}(k) C_{j_4}(k) \dots C_{j_h}(k) \dots C_{jp}(k)$$
$$(\forall j_m)(\forall k)(C_k, C_{jm}(k) \in C(A,\phi)); \quad j_m \in \{1,2,3,\dots\}$$

Формульные последовательности слов являются примерами $L(\tau_n)$-языков, в которых *сосставляющие* их слова в некотором отношении содержат историю своего развития. Параллельный $L(\tau_n)$-язык будем называть ***формульным,*** если соответствующая ему τ_n-грамматика генерирует *формульную* последовательность слов. Параллельная грамматика $\tau_2 = <2,\{0,1,2\},\tau^{(2)},120202>$ с параллельными подстановками вида $\{00 \Rightarrow 0,\ 01 \Rightarrow 2,\ 00 \Rightarrow 0,\ 43 \Rightarrow 1,\ 10 \Rightarrow 1,\ 03 \Rightarrow 4,\ 02 \Rightarrow 3,\ 13 \Rightarrow 1,\ 21 \Rightarrow 2,\ 04 \Rightarrow 0\}$

генерирует *формульный* язык следующего вида $L(\tau_2)=\{c_{2k-1},\ c_{2k}\}$, у которого слова определяются следующим образом, а именно:

$$\begin{cases} c_1 = 120202\,, & c_2 = 2021212 \\ c_{2k-1} = (12)\,c_{2k-3}\,, & c_{2k} = (20)\,c_{2k-2} \end{cases} \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots)$$

В качестве интересного класса формульных языков можно привести $L(\tau_n)$-языки, генерируемые τ_n-грамматиками, определяемыми линейными классическими ***1-ОС***, рассмотренными в главе ***3***. Можно показать [73], что каждый параллельный $L(\tau_n)$-язык, генерируемый соответствующей τ_n-грамматикой, определяемой классической линейной ***1-ОС***, является формульным. Это является еще одним видом *общей* характеристики порождающих возможностей этого класса ***ОС***-моделей, обобщаемой и на ***d***-мерный случай. В качестве примера можно привести и параллельный язык $L(\tau_n)=\{c_o=1,\ c_1,\ c_2,\ldots,\ c_k,\ \ldots\}$, генерируемый грамматикой $\tau_2=\langle 2,\{0,1\},\tau^{(2)},1\rangle$, для которой правила $\tau^{(2)}$ определяются *линейной* локальной функцией $\sigma^{(2)}(x,y)=x+y\ (mod\ 2)$. Нетрудно убедиться, что структура c_k-слов в генерируемом такой τ_2-грамматикой языке $L(\tau_2)$ определяется следующими рекуррентными формулами, а именно:

$$c_o = \square 1\square; \qquad c_1 = \square 11\square; \qquad c_{k+j} = \square c_j 0^{k-j-1} c_j\square; \qquad \{j=0\ ..\ (k-1),\ k=2^p,\ p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

где конструкция $c_j0^mc_j$ обозначает конкатенацию слов c_j и слова из m символов «***0***». Читателю в качестве полезного упражнения рекомендуется проверить это утверждение, а также обобщить его на случай алфавита $A=\{0,1,2,\ \ldots,\ a-1\}$ τ_2-грамматики. Таким образом, понятие ***формульности*** параллельных $L(\tau_n)$-языков оказывается достаточно хорошо характеризуемым классом *линейных* классических ***ОС***-моделей. При этом, легко показать, что любой конечный параллельный $L(\tau_n)$-язык является *формульным* и любой *формульный* $L(\tau_n)$-язык *рекурсивен*. Обратные же утверждения в общем случае не имеют места [32].

Введенное нами понятие *формульности* представляет несомненный интерес при исследованиях синтаксической структуры параллельных языков, генерируемых τ_n-грамматиками. Более того, это понятие тесно связано с использованием классических ***d-ОС*** в качестве *среды* моделирования различных параллельных процессов, объектов и алгоритмов. В связи с чем возникает достаточно актуальная проблема определения формульности произвольного параллельного $L(\tau_n)$-языка, на наш взгляд, являющаяся алгоритмически неразрешимой. В контексте рассмотренного понятия формульности возникает обратная проблема: ***Определить*** $L(\tau_n)$***-язык заданной формульности***, решаемая отрицательно уже для довольно простых типов формульности. Например, следующее формульное множество слов $L=\{c_o,\ c_1,\ c_2,\ldots,\ c_m;\ c_k=c_{k-2}c_{k-1}\mid k \geq m\}$ не может быть параллельным $L(\tau_n)$-*языком*. Несмотря на целый ряд полученных результатов [5,32,57-60,82,83,90], на сегодня мы располагаем довольно скудной информацией по проблеме формульности параллельных языков $L(\tau_n)$, поэтому работа в данном направлении представляет определенный интерес. Представив и обсудив *основные* свойства параллельных τ_n-грамматик и определяемых ими $L(\tau_n)$-языков, ниже переходим к обсуждению их взаимосвязей с другими известными грамматиками, включая также и параллельные грамматики других типов и классов.

5.2. Параллельные грамматики, определяемые ОС-моделями, и формальные грамматики других известных классов и типов

В связи с существованием целого ряда *классов грамматик* (*как традиционных*, *так и параллельных*) представляется интересным сравнить их возможности относительно порождаемых ими языков.

Данная методика является *одной* из наиболее естественных и традиционных в современной ***ТФГ.*** Поэтому, введя параллельные τ_n-грамматики, вполне естественно сравнивать их порождающие возможности с ранее исследованными формальными грамматиками других типов и классов. И имеющиеся в этом направлении ряд результатов исследований позволяют не только получать со многих точек зрения довольно интересные *сравнительные* оценки для нового класса *параллельных* грамматик, определяемых классическими структурами, но и с несколько иной стороны оценить сами параллельные τ_n-грамматики и генерируемые ими формальные параллельные языки.

Е.С. Щербаков, занимаясь вопросами разработки математического аппарата моделирования для биологии развития на клеточном уровне, определило *новый* класс параллельных грамматик [261], получивших впоследствии название ***Sb(m)-грамматик*** и определяемых следующим образом. В качестве *правил вывода* в ***Sb(m)-***грамматиках используются параллельные *продукции* следующего общего вида, а именно:

$$Sb:\begin{cases} x_1\,x_2x_3\ldots x_m \;\Rightarrow\; y_1y_2y_3\ldots y_p \\ 0\,0\,0\,0\,0\ldots 0 \;\Rightarrow\; 0\,0\,0\,0\,0\;\ldots 0 \end{cases} \qquad (42)$$
$$(x_k, y_j \in A;\quad k=1..m;\ j=1..p;\ 1\le p\le m)$$

которые характеризуются одновременным применением к любому конечному слову в алфавите ***A.*** Так как длины правых частей *параллельных подстановок* в ***(42)*** в общем случае могут превышать ***1,*** то при определении результата применения продукций ***(42)*** к некоторому слову в ***A-***алфавите возможно возникновение *неоднозначности* в какой-либо его позиции. Поэтому к продукциям ***(42)*** вывода добавляется простая функция ***выбора*** следующего состояния, а именно:

$$W(h_1, h_2, h_3, \ldots, h_v) \in A \qquad h_k \in A;\quad (k=1\,..\,v;\ 1 \le v \le r) \qquad (43)$$

позволяющая в точках неопределенности выбирать на основе кортежа $<h_1, h_2, \ldots, h_v>$ состояний единственное для данной конкретной *неопределенности*. Итак, при сделанных предположениях параллельная ***Sb(m)-грамматика*** вводится следующим образом.

<u>Определение 18</u>. Параллельная Sb(m)-грамматика – упорядоченный кортеж следующего вида, а именно Sb(m) = <A, c_o, Sb, W>, компонентами которого являются:

1) ***A – терминальный конечный непустой алфавит;***
2) ***Sb – параллельные продукции вывода вида (42);***
3) ***W – функция выбора состояния (43) в точке неоднозначности;***
4) ***c_o – аксиома параллельной грамматики.***

Множество слов, генерируемых такой Sb(m)-грамматикой, называется Sb(m)-языком.

Показано, что по порождающим языковым возможностям параллельные грамматики ***Sb(m)*** и τ_n эквивалентны, а именно, имеет место следующий основной результат [60].

<u>Теорема 79</u>. Для каждой параллельной Sb(m)-грамматики существует строго эквивалентная ей τ_n-грамматика [$n=max_k(m_k) + max_k(p_k) - 1$, если $m, p \ge 1$; и $n=2m-1$ в противном случае].

Результат данной теоремы ***79*** является еще одним существенным аргументом, подтверждающим достаточно высокую степень общности понятия классических структур ***1-ОС,*** как грамматик с параллельными подстановками в качестве правил вывода. Ниже будет отмечено, что требование параллельного применения *изотонных* продукций в *изотонных структурных грамматиках* ***(ИСГ)*** приводит к понятию *параллельных грамматик* ***(ПГ).*** Так как длины правых частей параллельных продукций ***(ПП)*** следующего вида:

$$X_1^k X_2^k X_3^k X_4^k \dots X_{m_k}^k \;\Rightarrow\; Y_1^k Y_2^k Y_3^k Y_4^k \dots Y_{n_k}^k$$
$$(X_j^k, Y_q^k \in A;\; j=1..m_k;\; q=1..n_k;\; k=1..p) \qquad \textbf{(44)}$$

в ***ПГ (44)*** могут превышать ***1,*** то для устранения возможной *неоднозначности* при одновременном применении *продукций вывода* к перерабатываемым грамматикой словам задается (*подобно случаю* ***Sb(m)****-грамматик*) функция ***W (43)*** однозначного выбора состояния. Используя теперь развитый нами подход [60], можно показать, что для каждой ***ПГ*** с параллельными продукциями вида ***(44)*** при выполнении условия $(\forall k)(m_k=n_k)$ и ***W***-функцией *однозначного* выбора состояния существует *строго эквивалентная* ей параллельная τ_{2m-1}-грамматика $(m=max_k\,\{m_k\})$, заданная в том же самом конечном ***A***-алфавите.

При этом, даже для довольно широкого класса ***ПГ,*** заданных в ***A***-алфавите с *продукциями* вывода вида ***(44)*** при выполнении условия $(\forall k)(m_k \geq n_k)$, возможно в *расширенном* алфавите $A \cup \{\#\}(\# \notin A)$ определять параллельные τ_n-грамматики, эквивалентные в ***A***-алфавите исходным ***ПГ.*** В данном случае **#**-символ играет роль *пустого* символа, который под действием параллельных *продукций* ***ЛФП,*** соответствующих ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, постоянно удаляется из конечных слов генерируемого языка. Таким образом, ***ИСГ*** с параллельным применением изотонных продукций и ряд других типов ***ПГ*** строго эквивалентны соответствующим τ_n-грамматикам, определенным в том же алфавите ***A.***

Данные результаты снова подтверждают высокую степень *общности* классического понятия ***ОС***-моделей как порождающих формальных систем с *абсолютно* параллельными правилами вывода. К перечисленным выше результатам довольно тесно примыкают и работы по *пространственным* грамматикам, чьи языки представляют собой не множества слов, а множества пространственных фигур (*областей*). Существует несколько способов обобщения фразо-структурных грамматик на грамматики с параллельными правилами вывода, которые позволяют замещать одни *подобласти* некоторой фигуры на другие [5,32,88,90,536,567].

Определение 19. Изотонная структурная грамматика – упорядоченный 5-элементный кортеж следующего вида ИСГ = <N, T, #, P, c*>, компонентами которого являются:

1) ***N – конечный непустой нетерминальный алфавит;***
2) ***T – конечный непустой терминальный алфавит*** $(T \cap N = \varnothing)$***;***
3) ***# – пустой символ изотонной структурной грамматики;***
4) ***P – конечное непустое множество изотонных продукций;***
5) ***c* – аксиома изотонной структурной грамматики.***

Изотонные продукции ***ИСГ*** для ***1***-мерного случая принимают вид ***(44),*** а ее алфавит – $A=T \cup N \cup \{\#\}$. В данном случае язык ***L(ИСГ)*** есть множество всех конечных слов, определенных в ***T***-алфавите и выводимых из ***c****-аксиомы посредством изотонных ***P***-продукций грамматики. В ***ИСГ*** символ «**#**» выполняет роль пустого символа из теории автоматов. *Изотонная* продукция представляет собой отображение конфигурации конечного блока в новую конфигурацию того же блока. При этом, в ***1***-мерном случае на изотонные продукции $P \Rightarrow Q$ накладываются ограничения вида $|P|=|Q|$. Задавая определенным образом ***ИСГ*** и исследуя деревья вывода в данной грамматике, получаем следующий результат [5,8,9,55,88,90].

Теорема 80. Для каждой параллельной τ_n***-грамматики существует эквивалентная грамматика ИСГ = <N, T, #, P, a*>, где T = A и N =*** $\{a^*, q_1, q_2, q_3, q_4\}$***.***

Требование *параллельного* применения изотонных продукций в ***ИСГ*** приводит к рассмотренному выше понятию ***ПГ.*** Используя теперь теорему ***80,*** возможно показать, что класс всех *параллельных* τ_n-грамматик является *собственным подклассом* класса *всех параллельных* грамматик. По принципу действия к ***ИСГ*** с параллельными *изотонными* продукциями достаточно тесно примывают также *параллельные* грамматики, определяемые ***ОС*** *на разбиении* **(*ОСнР*)**, которые уже рассматривались выше**.** Из их определения несложно убедиться, что они также составляют собственный подкласс класса всех параллельных грамматик и их исследование представляется достаточно интересным [83,88,90]. С рядом интересных работ в данном направлении можно ознакомиться в [536].

В наиболее общем случае грамматика *Хомского* является намного более широким понятием, чем активно исследуемые в классической ***ТФГ*** *традиционные* грамматики. А именно, грамматика ***CG*** *Хомского* есть упорядоченная четверка $CG = \langle V, W, P, v\rangle$, где:

1) V и W – конечные непустые непересекающиеся алфавиты $(V \cap W = \varnothing)$;
2) P – конечное непустое множество продукций вида $x \Rightarrow y$; x, y – произвольные слова в объединенном алфавите $V \cap W$;
3) $v \in V$ – аксиома формальной грамматики.

В контексте сделанного определения представляется весьма интересным установление тех типов параллельных τ_n-грамматик, которые были бы эквивалентны грамматикам Хомского. Как ранее отмечалось, под *эквивалентностью* двух формальных грамматик понимается полное совпадение определяемых ими языков. Пусть некоторая параллельная грамматика τ_n генерирует $L(\tau_n)$-язык, удовлетворяющий следующим определяющим условиям. Любой $L(\tau_n)$-язык – *последовательность* слов $\{c_o\tau^{(n)t}\}$ ($c_o \in C(A,\phi)$ – аксиома грамматики и $t \geq 0$). Предположим, что для каждого целого $t \geq 0$ слово $c_o\tau^{(n)t+1}$ по отношению к слову $c_o\tau^{(n)t}$ может изменять по длине свой *левый* [*правый*] конец в интервале $+(n-1)$ [0] ... $-m$ [$-m$] символов. Такой $L(\tau_n)$-язык будем называть *m-левым* [*m-правым*] $L(\tau_n)$-языком. С учетом сделанных предположений можно сформулировать следующий весьма интересный результат [5,32,83,88,90].

<u>Теорема 81</u>. Если $L(\tau_n)$***-язык является 0-левым и (n-1)-правым языком, существует грамматика Хомского*** $CG=\langle V,W,P,v\rangle$ ***с*** $W=A$ ***и*** $V=\{v,q_k \mid k=1..7\}$ ***такая, что имеет место следующее довольно важное тождество*** $L(\tau_n) \equiv L(CG)$.

В частности, нетрудно убедиться, что $L(\tau_n)$-языки, генерируемые линейными τ_n-грамматиками, определяемыми ***ОС***-моделями с линейными ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, относятся к классу ***0****-левых* и **(*n*-1)**-*правых* языков, что делает применимым к ним результат данной теоремы.

В рамках теории *параллельных* τ_n-грамматик может быть также рассмотрена формальная модель *асинхронных линейных структур* ***Р. Липтона***, играющая достаточно определенную роль в теории программирования, суть которой состоит в следующем. Асинхронная грамматика $АГ = \langle A, P\rangle$ состоит из *конечного* непустого ***А***-алфавита и конечного множества ***Р***-продукций вида $x \Rightarrow y$, где x и y – конечные различные по содержанию, но равные по длине слова, заданные в ***А***-алфавите. Следовательно, асинхронная ***АГ***-грамматика есть некоторая формальная система переработки конечных слов в ***А***-алфавите, сохраняющая их длину. *Продукции* из ***Р***-множества ***АГ***-грамматики моделируют изменения состояний автоматов в терминах их собственных состояний и состояний соседних им автоматов. Из определения ***АГ****-грамматики* можно убедиться, что любая *асинхронная грамматика* определяет *конечный* язык. А так как любой *конечный* язык генерируется подходящей параллельной τ_n-грамматикой, тогда класс всех ***АГ***-грамматик составляет собственный подкласс класса всех формальных параллельных τ_n-грамматик.

Однако, так как класс параллельных $L(\tau_n)$-языков является *собственным подклассом* класса языков *Линденмайера*, генерируемых ***L***-системами, то возникает ряд принципиальных вопросов по более детальному установлению соотношений между обоими классами данных формальных языков [10,71-74,162,163]. ***Дж. Батлер*** рассмотрел одно соотношение данного типа, показав, что: ***Любая классическая структура 1-ОС моделируется в реальное время системой Линденмайера PD(m,n)*** [163, 251,254]. При этом: ***Любая PD(m,n)-система моделируется подходящей классической 1-ОС в общем случае не в реальное время.*** Опираясь на результаты по *вычислимости* и *моделируемости* в классических ***d-ОС (d≥1)***, рассматриваемые нами в последующих главах книги, можно доказать в данном направлении даже существенно более общий результат, а именно [5,72-74,536].

<u>Теорема 82</u>. Каждая L-система Линденмайера моделируется соответствующей классической структурой 1-ОС в общем случае не в реальное время, и наоборот.

Доказательство данной теоремы неконструктивно и базируется на теории *рекурсивных* функций, поэтому вопрос оптимизации основных параметров *моделируемой* и *моделирующей* систем может быть решен на основе *оптимизирующей* техники моделирования в *классических* структурах ***d-ОС***, обсуждаемой в следующей главе книги и ряде других наших работ. На наш взгляд, *параллельные* τ_n-грамматики более удобны для моделирования на структурном уровне, тогда как ***L***-системы лучше отвечают целям формального описания развивающихся биологических систем. Однако в обоих случаях возникают существенные затруднения при переходе к высшим размерностям [10, 11,53,72-74,88]. Интересный сравнительный анализ обоих типов параллельных систем обработки информации в контексте их биологических приложений представлен в последней главе книги.

К проблематике *параллельных* τ_n-грамматик тесно примыкают также многочисленные работы по применению ***ОС***-моделей в качестве распознавателей наряду с работами по пространственным грамматикам. Прежде всего, это относится к вопросам распознавания ***ОС***-моделями в реальное время формальных языков. В данном направлении получен целый ряд достаточно интересных результатов. Так, например, ***А.Р. Смит*** [265] изучал классы ***1***- и ***2***-мерных формальных языков, распознаваемых ***ОС***-моделями с ограничением по времени. Вопросы распознавания в реальное время в ***2-ОС*** с входными преобразованиями конечных конфигураций рассматривались также ***Х. Нишио*** и ***С. Секи*** [15,135]. Интересные вопросы распознавания в реальное время формальных языков ***ОС***-моделями размерностей ***1, 2*** и связанные с ними вопросы можно найти в интересной монографии ***Р. Фольмара*** [138]. ***A. Hemmerling*** рассматривал вопросы распознавания в реальное время ***ОС***-моделями некоторых формальных языков, ***T. Jebelean*** также рассматривал ***ОС***-модели в качестве параллельных распознавателей формальных языков. Как показал ряд авторов ***(Smith, Dyer, Ibarra*** *и др.**)***, линейные, Дика и скобочные контекстно-свободные языки распознаются ***ОС***-моделями (*даже с однонаправленным потоком информации*) в реальное время [536]. Было показано, что недетерминированные ограниченные (*ограничен вход, тогда как другие единичные автоматы находятся в состоянии «покоя», оставаясь в нем в течение всего вычисления*) ***ОС***-модели также могут распознавать контекстно-свободные языки в режиме реального времени. Между тем, для случая детерминированных ***ОС***-моделей вопрос пока открыт.

Как показали ***R. Sommerhalder*** и ***S. Westrhenen***, если количество шагов вычисления фиксировано (*но зависит от распознаваемого языка*), то множество языков, распознаваемых *недетерминированной* структурой ***1-ОС*** совпадает с множеством всех регулярных языков. Более того, в данном случае распознавание определяется всеми единичными автоматами структуры в состояниях, отличных от состояния «*покоя*», фиксирующих некоторое заключительное состояние. Такого типа понятие распознавания позволяет распознавать языки даже быстрее, чем в *реальное* время. ***O. Ibarra*** и др. показали, что существуют *неконтекстно-свободные* языки, распознаваемые ***ОС***-моделями за время ***O(log n)***, и что *формальные* языки, принимаемые ими за время ***O(log n)***, *регулярны* [536]. При этом, некоторые классы языков могут определяться как *ограничением*, так и *расширением* возможностей ***ОС***-моделей, используемых для их распознавания или принятия. Это полностью обеспечивается определением четырех специальных условий, которым должна удовлетворять та или иная ***ОС***-

модель [536,565]**.** Соотношения между данными четырьмя классами ***ОС*-**моделей и их связью с традиционными классами формальных языков исследовались довольно интенсивно. Хороший обзор результатов и методов в данном направлении был дан ***M. Mahajan*,** там же можно найти и некоторые дополнительные примеры языков согласно упомянутой классификации ***ОС*-**моделей и проблемы для дальнейшего исследования [536], тогда как характеристика наиболее важных из них представлена в обзоре [565]**.** В настоящее время немалое число работ посвящено и вопросам улучшения характеристик распознавания ***ОС*-**моделями различных типов и классов *формальных* языков как традиционных**,** так и специальных. Целый ряд весьма интересных работ посвящен и использованию ***ОС*-**моделей как *генераторов* специального вида языков, например, *фрактального* типа [154]. С интересными результатами в данном направлении можно ознакомиться в работах [166,173-176,211,240,265,297,404,536].

В последние годы значительное внимание привлекают и пространственные грамматики, языки которых представляют собой множества пространственных фигур (*областей*)**,** а не одномерных строк (*слов*)**.** В частности, ***П. Ванг*** и ***В. Гроски*** [263] рассмотрели взаимосвязь между *классическими* ***ОС*-**моделями**,** *параллельными пространственными грамматиками* **(*ППГ*),** а также с *параллельными программируемыми пространственными грамматиками* **(*ПППГ*),** имеющими достаточно большие потенции как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. Ими были исследованы довольно общие возможности генерации *пространственных* языков посредством параллельных грамматик, определяемых ***ОС*-**моделями, ***ППГ*** и ***ПППГ*.** Наряду с рядом довольно интересных результатов в данном направлении было, в частности, показано, что по *порождающим* языковым возможностям τ_n-грамматики и ***ППГ*** эквивалентны и существует конструктивный алгоритм перехода от ***ППГ*** к параллельным грамматикам, определяемым классическими ***ОС*-**моделями. Между тем, немало вопросов остается в данной области открытыми, но наиболее важными представляются вопросы расширения исследований по параллельным грамматикам, определяемым различными типами ***ОС*-**моделей**.** В следующем разделе некоторые представленные результаты по параллельным τ_n-грамматикам обобщаются и на случай недетерминированных одномерных ***ОС*–**моделей. Такие обобщения представляют интерес не только с теоретической точки зрения, но и в свете весьма интересных приложений в целом ряде областей, включая вычислительные науки.

5.3. Параллельные грамматики, определяемые недетерминированными однородными структурами

Существенным *обобщением* понятия *параллельной* τ_n-грамматики является ***недетерминированная*** $\boldsymbol{T_n}$***-грамматика*,** которая для каждого дискретного момента $t > 0$ допускает один либо более (*но конечное число*) вариантов выбора параллельных правил вывода. Итак, формально параллельная недетерминированная грамматика определяется следующим образом.

<u>Определение 20</u>. Параллельная недетерминированая T_n***-грамматика (НТГ) есть упорядоченный кортеж следующего вида*** $T_n = <n,A,W_n,c_o>$***, компонентами которого являются:***

1) ***n – индекс грамматики (максимальный размер шаблона соседства используемых одномерных ГФП);***
2) ***A – конечный непустой алфавит грамматики;***
3) W_n ***– допустимое конечное множество правил вывода (ГФП);***
4) c_o ***– аксиома грамматики (начальная конечная конфигурация).***

Параллельным языком $L(T_n)$ будем называть множество всех слов, генерируемых из аксиомы c_o из множества $C(A,\phi)$ посредством параллельных правил вывода из допустимого множества ***ГФП*** $W_n = \{\tau_1^{(n_1)}, \tau_2^{(n_2)}, \tau_3^{(n_3)}, ..., \tau_k^{(n_k)}\}$ $(n = max_j \{n_j\}; j = 1..k)$.

Из определений *параллельных* τ_n-грамматик и T_n-грамматик нетрудно заметить, *первые* являются частным случаем *вторых*. Как в случае τ_n-грамматик, будем рассматривать *недетерминированные* ***1-ОС***, определяющие соответствующие им параллельные T_m-грамматики. Одним из наиболее важных результатов в теории конечных автоматов является факт, что класс формальных языков, определяемых недетерминированными *конечными* автоматами, совпадает с классом всех языков, порождаемых полностью определенными *детерминированными* конечными автоматами. В случае же параллельных τ_n- и T_m-грамматик имеет место совершенно иная картина, характеризуемая следующим основным результатом [5,32,71,88,90,536].

Теорема 83. Существуют $L(T_m)$-языки, не являющиеся $L(\tau_n)$-языками; между тем, существуют регулярные языки, не являющиеся как $L(T_m)$-языками, так и $L(\tau_n)$-языками.

Таким образом, в отличие от конечных автоматов *недетерминизм* правил вывода для *параллельных* грамматик, определяемых недетерминированными ***ОС***-моделями, расширяет их порождающие языковые возможности. Рассмотрим теперь порождающие языковые возможности параллельных недетерминированных T_m-грамматик в зависимости от их W_n-правил вывода. При сделанных определениях и предположениях имеет место следующий основной результат [5,32,71,88,90,536].

Теорема 84. Любое конечное множество слов, определенных в А-алфавите, является и языком $L(T_m)$ для соответствующей параллельной недетерминированной T_m-грамматики. Для любого целого $m \geq 2$ существуют бесконечные регулярные (даже конечные) множества слов, которые не могут быть порождены никакой параллельной недетерминированой T_m-грамматикой, однако могут генерироваться как соответствующей T_{m+1}-грамматикой, так и детерминированной параллельной τ_{m+1}-грамматикой.

Из результата данной теоремы следует, что недетерминированность сохраняет генерационные языковые возможности τ_n-грамматик относительно *регулярных* языков и для класса *параллельных* T_m-грамматик. Аналогично случаю параллельных τ_n-грамматик и для недетерминированных T_m-грамматик сохраняет силу весьма важный результат, характеризующий формальные языки $L(T_m)$ с «*програмистской*» точки зрения [71,88,90,536].

Теорема 85. Класс всех недетерминированных $L(T_m)$-языков незамкнут относительно операции пересечения с регулярными множествами слов.

Таким образом, и в случае *недетерминированных* параллельных T_m-грамматик также невозможно определять приемлемую формальную автоматную модель распознавателей в общепризнанном смысле, допускающих $L(T_m)$-язык. В принципе, подобный результат следовало ожидать, ибо, по нашему мнению, такая ситуация определяется, прежде всего, абсолютно *параллельным* способом применения в грамматике правил вывода, тогда как хорошо известные на сегодня *традиционные* автоматные модели распознавателей в своей основе основываются на сугубо последовательном принципе обработки с четко выраженным *централизованным* управлением. Тогда как структуры, будучи параллельными динамическими системами, исповедуют именно децентрализованный принцип управления.

Рассмотрим теперь вопрос *замкнутости* класса всех *недетерминированных* параллельных языков $L(T_m)$ относительно ряда традиционных для *классической* ***ТФГ*** операций. В разделе **5.1** книги уже отмечалось, что класс *всех детерминированных* $L(\tau_n)$-языков незамкнут относительно практически всех основных операций, рассматриваемых в качестве *базовых* в ***ТФГ*** [336,389,390,536]. Между тем, представляет большой интерес исследование этих вопросов и для класса недетерминированных

$L(T_m)$-языков. Полученные в данном направлении результаты могут быть выражены следующей основной теоремой [5,61,88,90,536].

<u>Теорема 86</u>. Класс всех недетерминированных $L(T_m)$-языков незамкнут относительно операций пересечения, объединения, дополнения, произведения, конечного преобразования, гомоморфизма, однако замкнут относительно операции инверсии.

Следовательно, и здесь для *недетерминированных* ***$L(T_m)$***-языков картина полностью аналогична случаю *детерминированных* ***$L(\tau_n)$***-языков, однако данный вопрос требует дальнейшего изучения. Введем еще одну важную операцию ***(τ^*-операцию)*** над языками ***$L(T_m)$***. Пусть подмножество слов ***$L \subset C(A,\phi)$*** является некоторым ***$L(T_n)$***-языком, а τ^* – произвольная ***ГФП***, определенная в алфавите ***A***. Определим множество конечных слов как $\tau^*(L)=\{x \mid x=\tau^*(x`);\ x` \in L\}$. Здесь возникает достаточно интересный вопрос: ***Всегда ли словарное множество $\tau^*(L)$ снова будет языком того же класса, где L – произвольный недетерминированный $L(T_n)$-язык?*** Ответ на данный вопрос отрицателен.

Операции *левого* и *правого* деления ***L***-языка на конечное ω-слово, которые заданы в ***A***-алфавите, определяются и обозначаются соответственно как $\omega\backslash L=\{x \mid \omega x \in L\}$ и $L\backslash\omega=\{x \mid x\omega \in L\}$. Показано, что класс *недетерминированных* ***$L(T_m)$***-языков *незамкнут* относительно вышеуказанных *двух* операций [5,71], что и резюмирует следующая теорема ***87***, представляющая определенный интерес с точки зрения грамматических свойств ***T_m***-моделей, как генераторов языков.

<u>Теорема 87</u>. Класс всех недетерминированных $L(T_m)$-языков незамкнут относительно операции τ^* и операции левого (правого) деления на произвольное конечное слово, определенное в том же самом конечном A-алфавите.

Таким образом, приведенные результаты подтверждают, что класс всех недетерминированных параллельных ***$L(T_m)$***-языков обладает таким же сильным *иммунитетом* к операции *замкнутости* относительно важнейших операций классической ***ТФГ***, что и класс детерминированных языков ***$L(\tau_n)$***. В работе [53] показано, что класс всех ***$L(\tau_n)$***-языков является собственным *подклассом* класса всех языков, порождаемых ***<k, p>***-системами *Линденмайера*, а сам класс таких языков незамкнут относительно всех основных операций классической ***ТФГ***. Следовательно, сужение ***<k, p>***-класса ***L***-языков до класса ***$L(\tau_n)$***-языков минимально расширяет множество операций, по отношению к которым эти языки *замкнуты*. Представляется весьма интересным проследить в деталях влияние на этот факт расширения класса ***$L(\tau_n)$***-языков до класса всех *недетерминирванных* ***$L(T_m)$***-языков.

Среди всех *недетерминированных* ***$L(T_m)$***-языков естественно вводится *иерархия сложности* в смысле множества порождаемых ими языков. На основе теоремы ***84*** можно легко получить соотношение ***$(\forall m \geq 2)(\#L(T_{m-1}) < \#L(T_m))$***, где ***#L*** – мощность произвольного ***L***-множества. Итак, множества всех формальных языков, определяемых параллельными *недетерминированными* ***T_m***-грамматиками, упорядочиваются согласно значения ***m***-индекса грамматики, и среди них существует *бесконечно* много классов сложности в указанном выше смысле. А так как *недетерминированная* грамматика ***T_m*** может порождать также и нерекурсивные формальные языки, то ***$L(T_m)$***-язык имеет непустое пересечение с языками *Клини*, контекстно-свободными и контекстно-зависимыми языками. При этом, вполне очевидно, что параллельные *детерминированные* ***$L(\tau_n)$***-языки образуют собственный подкласс класса *всех* формальных *недетерминированных* ***$L(T_m)$***-языков.

С другой стороны, на основании теоремы ***84*** существуют ***$L(\tau_n)$***-языки, не являющиеся языками ***$L(T_m)$*** при условии ***$m \leq n-1$***. При этом известно, что для каждой параллельной *детерминированной* ***τ_n***-грамматики существует эквивалентная ей ***<k, p>***-система *Линденмайера* ***(k+p=n)*** [32], тогда как обратное в общем случае неверно. Исходя из данного результата, легко доказать, что для любой

T_m-грамматики существует эквивалентная ей *недетерминированная* **<k, p>-**система *Линденмайера* **(k+p=m)**, но обратное в общем случае неверно. Таким образом, *параллельные недетерминированные* $L(T_m)$-языки являются собственным подклассом класса всех языков, определяемых известными **<k, p>-**системами *Линденмайера***.** Исходя из вышесказанного, на рис. ***21*** представлены *пересечения* множеств *недетерминированных* $L(T_m)$-языков с множествами ряда формальных языков, которые хорошо известны в классической иерархии *Хомского***.**

На этом мы завершаем представление *основных* полученных результатов в теории параллельных τ_n- и T_m-грамматик, определяемых соответственно классическими и недетерминированными одномерными ***ОС-***моделями**.** При этом, нами в настоящей книге не рассматривается целый ряд достаточно важных и интересных вопросов, связанных с исследованиями ***ОС-***моделей в качестве *акцепторов* формальных языков. Данные вопросы достаточно интенсивно исследовались такими авторами, как ***A. Hemmerling, K. Culik, A.R. Smith, T. Jebelean, S. Kosaraju, M. Nordahl*** и рядом др.**;** работы в данном направлении могут быть найдены в [536]**.** Прежде всего, данные исследования касались вопросов распознаваемости известных формальных языков *иерархии Хомского* на основе ***ОС-***моделей. Переходим теперь к обсуждению алгоритмических аспектов теории параллельных языков, определяемых ***ОС-***моделями рассмотренных выше типов.

5.4. Алгоритмические проблемы теории параллельных грамматик, определяемых классическими однородными структурами

Проблемы *алгоритмической разрешимости* играют очень важную роль в *современной* математике. Такие проблемы относятся к т.н. классу «*массовых*» проблем**,** для которых требуется установить наличие либо отсутствие общего разрешающего алгоритма. В теоретической и математической кибернетиках алгоритмически неразрешимые проблемы достаточно часто возникают в задачах анализа динамики преобразователей дискретной информации (*например*, *бесконечных автоматов различного типа*)**,** из которых в настоящей главе рассматриваются лингвистические аспекты ***ОС-***моделей. Действительно, в рамках конечных систем проблемы алгоритмической разрешимости не носят столь уж актуального характера, ибо в худшем случае многие решения можно получать (*пусть и не столь эффективным*) методами простого перебора соответствующих возможностей и вариантов**.** Однако, в теории порождающих грамматик алгоритмические проблемы занимают большое место**,** например, проблемы существования алгоритмов, *распознающих* по формальной грамматике определенного класса либо типа, обладает ли порождаемый ею формальный язык тем либо иным указанным свойством.

В настоящее время не на все вопросы алгоритмической разрешимости в теории параллельных грамматик, определяемых ***ОС-***моделями, имеются ответы. В настоящем разделе представлены результаты решения ряда алгоритмических проблем для параллельных $L(\tau_n)$- и $L(T_m)$-языков, характеризующих, в основном, конструктивные и динамические свойства соответствующих им однородных структур**.** Приведем теперь математические формулировки наиболее известных массовых проблем в данном направлении.

1. ***<u>Проблема пустоты</u>:*** *Существует ли разрешающий алгоритм***,** *позволяющий определять***,** *будет ли язык* **L,** *порождаемый произвольной формальной грамматикой***,** *пустым***?**

2. ***<u>Проблема полноты</u>:*** *Существует ли разрешающий алгоритм***,** *позволяющий определять наличие для произвольной формальной грамматики возможности порождать язык***,** *который содержит все непустые конечные слова***,** *заданные в ее алфавите* ***A?***

3. ***<u>Проблема конечности</u>:*** *Существует ли разрешающий алгоритм, позволяющий определять***,** *будет ли конечным язык* **L,** *порождаемый произвольной формальной грамматикой***?**

4. <u>Проблема принадлежности</u>: *Существует ли разрешающий алгоритм, позволяющий устанавливать факт принадлежности произвольного конечного слова, заданного в алфавите **A** произвольной формальной грамматики, порождаемому данной грамматикой языку **L?***

5. <u>Проблема тождественности</u>: *Существует ли алгоритм для определения тождественности языков **L1** и **L2**, порождаемых двумя произвольными грамматиками?*

6. <u>Проблема простоты</u>: *Существует ли алгоритм, позволяющий определять, будет ли порождаемый произвольной формальной грамматикой язык **L** регулярным, контекстно-свободным либои контекстно-зависимым?*

7. <u>Проблема формульности</u>: *Существует ли разрешающий алгоритм для выявления формульности языка **L**, порождаемого произвольной формальной грамматикой?*

8. <u>Проблема существования предела</u>: *Пусть **G** есть некоторая формальная грамматика. Если для нее существует слово **c*∈L(G)** такое, что для каждого слова языка **c∈L(G)** на основе правил вывода данной **G** грамматики генерируется также и последовательность, содержащая **c***-слово, то вполне естественно определять **c***-слово, как **предел** процесса вывода в данной грамматике. Предел для случая параллельных грамматик, определяемых **OC**-моделями, представляет собой своего рода точку устойчивости процесса вывода слов параллельного языка. Во многих случаях предел может быть лишь потенциально достижим, например, в случае неограниченного роста длины выводимых в языке слов. С учетом этих предположений проблема сводится к вопросу наличия разрешающего алгоритма для определения существования у языка **L**, порождаемого произвольной грамматикой, предела в указанном выше смысле.*

9. <u>Проблема пустоты пересечения</u>: *Существует ли разрешающий алгоритм, определяющий пустоту пересечения двух языков **L1** и **L2**, порождаемых произвольной формальной грамматикой?*

10. <u>Проблема существования</u>: *Существует ли разрешающий алгоритм, определяющий, что будет ли произвольное подмножество конечных слов, заданных в **A**-алфавите, некоторым языком **L** произвольной формальной грамматики, заданной в том же самом **A**-алфавите?*

Несомненно, вышепредставленные проблемы *алгоритмической разрешимости* являются наиболее важными математическими проблемами общей теории *параллельных* грамматик, определяемых ***OC***-моделями, как, впрочем, и другими формальными системами. На основе целого ряда наших результатов исследований по ***TOC***-проблематике можно сформулировать следующую основную теорему [5,32,54-56,71-74,88,90,536].

<u>Теорема 88</u>. Проблемы конечности, принадлежности, тождественности, пустоты пересечения, существования предела и существования являются алгоритмически неразрешимыми для языка $L(\tau_n)$, порождаемого произвольной параллельной τ_n-грамматикой. Данное утверждение также справедливо и для случая $L(T_m)$-языков.

Тогда как разрешимость проблем ***пустоты*** и ***полноты*** легко следует соответственно из самого определения параллельного $L(\tau_n)$-языка (*содержит, по меньшей мере, саму аксиому τ_n-грамматики*) и *простого* следствия из теоремы ***54*** (*раздел* ***3.1***), устанавливающих факт *невозможности* генерации множества ***C(A,d,ϕ)*** из *конечного* множества начальных конечных ***КФ*** посредством какой-нибудь глобальной функции перехода, определенной в том же ***A***-алфавите и той же ***d***-размерности. В то же время полностью или частично остаются открытыми сформулированные выше проблемы формульности и простоты. При этом, если проблема формульности языка остается полностью открытой, то относительно проблемы простоты имеется существенный результат, выражаемый следующей основной теоремой [5,54-56,88,90].

<u>Теорема 89</u>. Проблемы простоты для случая регулярных и контекстно-свободных $L(\tau_n)$-языков алгоритмически неразрешимы.

В свете результата данной теоремы вполне реальным представляется неразрешимость проблемы *простоты* в *целом*. Более того, из теоремы ***89*** и результатов исследований по *конечным* автоматам следует *неразрешимость* проблемы *эквивалентности* произвольной параллельной τ_n-грамматики в контексте порождаемых ею *языковых* возможностей (*недетерминированному) конечному* автомату, а также (*одностороннему недетерминированному*) автомату с магазинной памятью. Таким образом, проблема сопоставления формальных *параллельных* $L(\tau_n)$-языков с известными традиционными *распознавателями* из *иерархии Хомского алгоритмически неразрешима*, что представляет достаточно сильный результат в теории формальных параллельных τ_n-грамматик [5,54-56].

Подобно случаю параллельных $L(\tau_n)$-языков аналогичные массовые проблемы алгоритмической разрешимости существуют и для *недетерминированных* $L(T_m)$-языков. А так как класс всех языков $L(\tau_m)$ является собственным *подклассом* класса всех $L(T_m)$-языков, то это позволяет нам перенести приведенные выше результаты по алгоритмической разрешимости и на случай параллельных *недетерминированных* $L(T_m)$-языков. При этом, следует иметь в виду, что *неразрешимость массовой* проблемы предполагает лишь отсутствие единого *разрешающего* ее алгоритма в его современном понимании. Тогда как для отдельных задач класса вполне возможны *индивидуальные разрешающие* алгоритмы. В частности, в случае классических ***ОС***-моделей подобная ситуация является весьма распространенным явлением. На этом завершается представление основных результатов теории параллельных грамматик, определяемых *классическими* и *недетерминированными* ***1***-мерными ***ОС***-моделями, которые позволяют не только получать вполне удовлетворительные лингвистические характеристики динамических свойств такого типа моделей, но и предоставляют новые средства исследования ***ОС***-моделей в целом. Между тем, в данном направлении остается также и немало открытых проблем и перспективных направлений исследования, основными из которых вполне можно рассматривать распространение полученных результатов теории *параллельных* грамматик данного типа на случаи высших размерностей [536].

К проблеме существования непосредственно примыкает и более частная для бесконечных ***ОС***-моделей *проблема идентификации* ***ОС***-модели по известным результатам ее динамики. Основная ее суть сводится к определению ***ОС***-модели в *терминах* ее ***ЛФП*** по известным порождаемым ею последовательностям $\Omega_k=<c_k>[\tau^{(n)}]$, т.е. конструктивное определение вида ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ структуры по известным генерируемым соответствующей ей ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ Ω_k-последовательностям конечных ***КФ*** ($k = 1..v$). Данная проблема аналогична случаю классической теории конечных автоматов, когда в экспериментах с конечным автоматом (*как «черным ящиком»*) выясняется его внутренняя логическая организация, т.е. *таблица*, определяющая в общем случае *выход* автомата по его *входу* и *внутреннему состоянию*. Эксперимент состоит в подаче на вход конечного автомата входных последовательностей символов (*слов*) и анализа выдаваемой им выходной последовательности символов; т.е. в результате эксперимента производится *идентификация* автомата по результатам анализа его реакции на входные последовательности слов. При этом, теория *конечных* автоматов имеет дело с целым рядом различного типа и назначения экспериментов по идентификации логической внутренней структуры *конечного* автомата или отдельных ее составляющих. Вполне подробное обсуждение этой проблематики можно найти в работах [226,266,281,282,536].

Проблема *идентификации* в случае бесконечной ***ОС***-модели сводится к определению ее ***ЛФП*** по генерируемой структурой последовательности $\Omega_k=<c_k>[\tau^{(n)}]$ конфигураций, т.е. по конкретным истории или конечному числу ее историй. При этом, предполагается известной d-размерность искомой ***ОС***-модели, определяемая размерностью генерируемых ею конфигураций. И в данном случае проблема идентификации сводится к установлению внутренней логической структуры ***ОС***-модели по ее поведению: *вход* (*текущая* ***КФ*** *структуры – глобальное внутреннее состояние*) под действием ***ГФП (ЛФП)*** переводится в *следующее внутреннее* состояние, отождествляемое с *выходом* структуры**;** т. е. ***ОС***-модель можно рассматривать как *бесконечный* автомат Мура. Интересная по своей сути, данная проблема для *бесконечных* ***ОС***-моделей не носит столь *объемлющего* характера, ибо в общем случае она алгоритмически неразрешима.

Первым к исследованию данной проблемы для случая ***ОС***-моделей приступил ***А. Адаматский,*** получивший целый ряд интересных результатов по проблеме идентификации классических и ряда других типов конечных ***ОС***-моделей [161,183,189,267]. Так, для случая конечных структур проблемы как существования, так и идентификации алгоритмически *разрешимы*, т.к. структуры генерируют только конечные $L(\tau_n)$-языки. Задача здесь сводится к установлению оптимального *конструктивного* алгоритма *идентификации*, ибо в худшем случае получение алгоритма сводится к методу простого перебора. Сама же суть оптимального алгоритма идентификации достаточно проста и сводится к следующей тестирующей процедуре (*не нарушая общности, рассматривается на примере классических структур* ***1-ОС***).

В процессе эксперимента с идентифицируемой классической ***1-ОС*** выбирается несколько шагов некоторой ее Ω_k-последовательности и производится *попытка* определения ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ структуры (*анализ начинается с минимального значения* $n = 2$), т.е. на основе анализа пар конфигураций (***КФ***) из некоторой Ω-истории ***ОС***-модели делается попытка *полного* определения набора *параллельных* подстановок вида: $x_1x_2 \dots x_n \Rightarrow x`_1$ ($x_k, x`_1 \in A;\ k=1..n$), определяющих ***ЛФП*** идентифицируемой структуры. Итак, если для какого-либо кортежа $<x_1x_2 \dots x_n>$ будет установлена *неоднозначность* в определении значения $\sigma^{(n)}(x_1x_2 \dots x_n)$, то производится увеличение размера (n) *шаблона соседства* (***ШС***) на единицу и описанная процедура *идентификации* повторяется. Несложно убедиться, что для конечной ***ОС***-модели данная процедура завершается за вполне определенное число шагов. На ее основе можно решать частную проблему идентификации и для *бесконечных* структур при условии *ограничения* на размер их ***ШС;*** в противном случае описанный алгоритм *идентификации* не сможет остановится через любое наперед заданное число шагов, констатируя в общем случае алгоритмическую неразрешимость проблемы идентификации в целом.

В общем же, как проблема *существования*, так и проблема *идентификации* уже для классических ***1-ОС*** алгоритмически неразрешимы (*доказательство второго утверждения является следствием из доказательства первого* [72]). Отличный способ доказательства второй части данного утверждения базируется на возможности моделирования произвольной машины Тьюринга *классической* ***1-ОС*** (раздел ***1.1***, п. ***9***) и алгоритмической неразрешимости распознавания машин Тьюринга [260,535]. С другой стороны, алгоритмическая неразрешимость обеих массовых задач предоставляет очень хорошую возможность использовать ее в качестве достаточно эффективной компоненты общего аппарата исследования массовых задач динамической теории классических ***ОС***-моделей.

Не взирая на *алгоритмическую неразрешимость* проблем *существования* и *идентификации* в общем случае, определенный интерес представляет задача *экспериментального* установления структуры, генерирующей некоторые Ω_k-последовательности *конечных* ***КФ.*** Предположим, что в результате экспериментов с такой классической ***1-ОС*** получен следующий набор Ω_k-последовательностей конечных конфигураций, а именно:

$$\begin{cases} \Omega_1 = C_1^1 \Rightarrow C_1^2 \Rightarrow C_1^3 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_1^j \Rightarrow \dots \Rightarrow C_1^p \\ \Omega_2 = C_2^1 \Rightarrow C_2^2 \Rightarrow C_2^3 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_2^j \Rightarrow \dots \Rightarrow C_2^p \\ ============================ \\ \Omega_q = C_q^1 \Rightarrow C_q^2 \Rightarrow C_q^3 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_q^j \Rightarrow \dots \Rightarrow C_q^p \end{cases} \tag{45}$$

$$C_k^j \in C(A,\phi);\ w = \max_{j,k}\{C_k^j\}; \quad (j = 1..p;\ k = 1..q)$$

Тогда для установления *ЛФП* $\sigma^{(n)}$ структуры, генерирующей такой набор последовательностей конфигураций, можно использовать следующую простую процедуру. В последовательностях Ω_k определяется ***КФ*** максимальной *w*-длины ***(45)*** и размер шаблона соседства искомой структуры ***1-ОС*** выбирается как ***n=2w***. После этого на основе ***КФ***-последовательностей ***(45)*** определяются параллельные подстановки, задающие искомую *ЛФП* $\sigma^{(n)}$ структуры, согласно нижеследующей принципиальной схемы (рис. 22).

Из приведенной принципиальной схемы (рис. 22) весьма несложно усматривается и собственно сам механизм определения параллельных подстановок *искомой* ***ОС***-модели, генерирующей ***КФ***-последовательности ***(45)***. Так как полученная ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ будет иметь, как правило, завышенный размер ***(n)*** шаблона соседства, то впоследствии возможно проводить операцию ее канонизации, состоящую в понижении величины ***n***-значения. При достаточно представительном наборе ***(45)*** ***КФ***-последовательностей искомая ***ОС***-модель устанавливается вполне однозначно и ее можно канонизировать в терминах ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$.

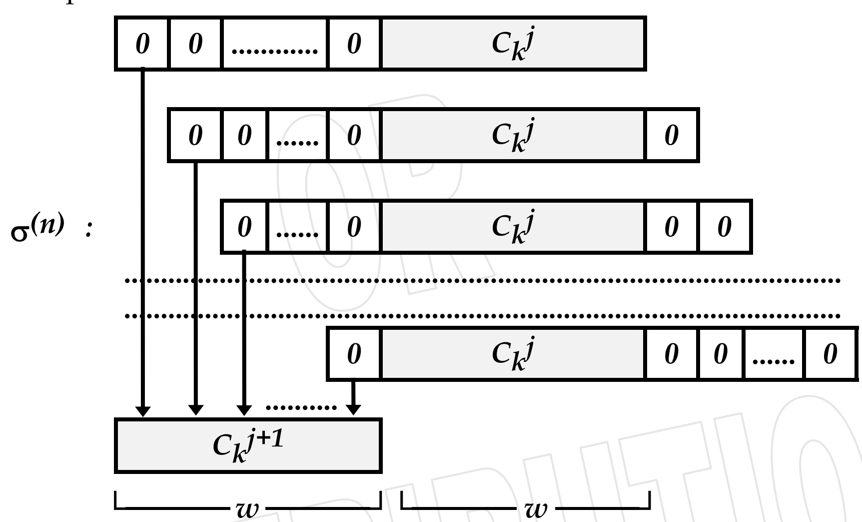


Рис. 22. Иллюстрация принципа определения ЛФП искомой классической ОС-модели.

Задачу *идентификации*, которая в нашем случае сводится к следующему: ***Определить локальную функцию перехода по динамике ОС-модели с известным алфавитом внутренних состояний ее единичных автоматов***, конструктивно можно решать на основе нижеследующего алгоритма. А именно, по истории последовательностей конечных ***КФ*** устанавливается ***ЛФП*** анализируемой структуры. Не нарушая общности, рассмотрим решение данной задачи для случая *классических* структур ***1-ОС*** с произвольным алфавитом ***A***={***0,1,2, ..., a-1***}. Естественно, при известном индексе соседства ***X***={***-n,-n+1,...,-1,0,1,2,...,m***} данная задача особых затруднений не вызывает и решается путем анализа результатов *генерации* структурой последующих ***КФ*** из *начальных* конфигураций $c = ...0x_1x_2 \dots x_{n+m+1}0\dots$ $(x_j \in A;\ j=1..n+m+1)$. Несколько сложнее вопрос обстоит при неизвестном индексе соседства ***X*** классической однородной структуры.

Для решения этой задачи поступим следующим образом. В качестве *начальных* последовательно выбираются конечные ***КФ*** из множества ***A***={***1,2, ..., a-1***}, т.е. c_o=□***h***□ {***h***∈***A***}, помещаются в автомат структуры с ***0***-координатой и вычисляются их *последователи*, т.е. результат реакции тестируемой cnhernehs ***1-ОС*** на вход ***КФ*** c_o = □***h***□ ***(h = 1 .. a-1)***.

	.....	-m-1	-m	....	-2	-1	0	1	2	....	n	n+1	....
c_o	.....	0	0	....	0	0	h	0	0	....	0	0	....
$c_o\tau$	.....	0	x_{-m}	....	x_{-2}	x_{-1}	x_o	x_1	x_2	....	x_n	0	....

На первом шаге в качестве размера ***ШС*** выбирается значение $n+m+1$, где n и m – максимальные *длины* подконфигураций соответственно *справа* и *слева* от **0**-автомата ***КФ*** $c_o\tau$, полученных из ***КФ*** $c_o \in A$ $(x_{-m} \neq 0, x_n \neq 0)$. Очевидно, истинный размер ***ШС*** будет не менее величины $n+m+1$. Тогда как в качестве индекса соседства естественно полагать $X=\{-n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, m\}$. Таким образом, параллельные подстановки искомой ***ЛФП*** структуры принимают следующий вид, а именно:

$$x_{-n} \ldots x_{-1} x_o x_1 \ldots x_m \to x^*_o \qquad x_k, x^*_o \in A \ (k = -n \,..\, m)$$

1. Затем на вход тестируемой ***1-ОС*** последовательно подаются ***КФ*** c_1 следующего вида:

$-2m-n-1$	$-2m-n$	...	$-m-1$	$-m$	...	-1	0	1	...	n	$n+1$	...	$2n+m$	$2n+m+1$
0	0	...	0	x_{-m}	...	x_{-1}	x_o	x_1	...	x_n	0	...	0	0
0	y_{-2m-n}	...	y_{-m-1}	y_{-m}		y_{-1}	y_o	y_1		y_n	y_{n+1}	...	y_{2n+m}	0

в количестве $a^{n+m+1}-1$ и анализируются их последовательности $c_1\tau$. Если наше предположение верно, то автоматы в позициях $-(n+2m+1)$ и $(2n+m+1)$ должны оставаться в состоянии «*покоя*» **(0)** для любых $x_j, x^*_o \in A$, тогда как для каждого кортежа $<x_1 x_2 \ldots x_j \ldots x_{n+m+1}>$ $(j=-m..n)$ в c_1 должно выполняться следующее соотношение, а именно:

$$x_1 \ldots x_j \ldots x_{n+m+1} \to x^*_j \equiv y_k \ \ (j = 1 \,..\, m+n+1;\ k = -2m-n \,..\, 2n+m)$$

при этом, идентичные кортежи имеют одно и то же значение y_k в ***КФ*** $c_1\tau$ (*непротиворечивость параллельных подстановок*). В противном случае размер ***ШС*** увеличивается на **1** и данный процесс тестирования ***1-ОС*** продолжается с пункта **1**. Через конечное число шагов достигается результат решения искомой задачи в виде полного набора непротиворечивых параллельных подстановок ***ЛФП*** тестируемой ***1-ОС***. При этом, в последующем можно вполне *произвольно* выбирать индекс соседства в рамках текущего ***ШС*** структуры, что обусловлено обстоятельством [1,2], что выбор центрального автомата ***ШС*** не изменяет *динамики* структуры и в данном отношении локальные функции перехода, определяемые, например, параллельными подстановками следующего вида:

$$x_1 x_2 \ldots x_j \ldots x_n \to x^*_j \quad \text{и} \quad x_1 x_2 \ldots \ x_n \to x^*_n \qquad x_j, x^*_j, x^*_n \in A \ (j = 1..n)$$

эквивалентны. Динамика обоих ***1-ОС*** отличается лишь тем, что во втором случае структура ***1-ОС*** генерирует ***КФ*** со сдвигом вправо относительно системы координат Z^1 модели. В общем случае структуры ***1-ОС*** с ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определяемыми параллельными подстановками вида:

$$x_1 x_2 \ldots \ x_n \to x^*_1; \qquad x_1 x_2 \ldots x_j \ldots x_n \to x^*_j \quad \text{и} \quad x_1 x_2 \ldots \ x_n \to x^*_n \qquad (1 < j < n)$$

характеризуются направленностью в них передачи информации *влево*, *влево и вправо*, и *вправо* соответственно. Между тем, как было показано [3], конструктивные возможности *вторых* более предпочтительны. Описанный выше конструктивный алгоритм решения задачи *идентификации* довольно несложно реализуем программно. Обобщение вышесказанного на *высшие* размерности позволяет сформулировать следующий результат, а именно: ***Для классических структур d-ОС (d≥1) задача идентификации в вышеприведенной постановке имеет конструктивное решение с точностью до выбора центрального автомата ШС, т.е. индекса соседства структуры.***

Таким образом, *неразрешимость* общих проблем *существования* и *идентификации* для *классических* структур предполагает дальнейшее развитие частных подходов к решению данных проблем для структур определенных типов либо классов. Это может способствовать появлению целого ряда важных теоретических и прикладных выходов ***ТОС***-проблематики в целом. С другой стороны, можно показать, проблема идентификации конечных структур ***d-ОС*** конструктивно разрешима и для этого имеются достаточно эффективные компьютерные методы [90]. Предложены методы *идентификации* конечных ***d-ОС*** с помощью искусственных нейронных сетей, были рассмотрены вопросы оценки и обучения нейронных сетей для решения задачи идентификации конечных классических структур ***d-ОС (d≥1)*** [536].

Достаточно интересным представляется исследование параллельных грамматик, определяемых *однородными структурами на разбиении* ***(ОСнР).*** Введенные нами в разделе ***1.2*** книги и частично рассматриваемые, структуры ***ОСнР*** представляют значительный интерес, прежде всего, с точки зрения использования их как среды физического моделирования, допускающей относительно несложное программирование такого важного феномена, как *обратимость* динамики структур ***ОСнР*** и алгоритмическую разрешимость этого и целого ряда других важных феноменов. Уже начальное исследование такого класса *параллельных* грамматик и порождаемых ими *параллельных* формальных языков [90] говорит о наличии по ряду важных языковых свойств существенных различий с рассмотренными в настоящей главе *параллельными* τ_n- и T_m-грамматиками. Прежде всего, это относится к *алгоритмическим* аспектам многомерных параллельных ***ОСнР-***грамматик и определяемых ими языков. Исследования в этом направлении активно продолжаются с целью получения приемлемого лингвистического описания интересных, прежде всего, с физической точки зрения ***ОСнР-***моделей. Более того, используемые для этих целей подходы могут оказаться весьма полезными и при исследованиях параллельных формальных грамматик, определяемых *асинхронными* ***ОС-***моделями в целом [536].

Весьма интересным представляется также исследование языков, генерируемых ***ОС-***моделями с «*памятью*», для которых состояние единичного автомата структуры в момент времени ***t+1*** будет определяться как функция состояний автоматов его ***ШС*** в момент ***t,*** а также состоянием данного автомата в момент времени ***t-1. ОС-***модели подобного типа относятся к классу т.н. «*обратимых*», которые не теряют информация с течением времени, т.е. в каждый момент времени ***t*** история динамики конфигураций модели полностью обратима.

Наконец, в настоящей монографии не рассматривался целый ряд весьма важных и интересных вопросов, связанных с исследованиями ***ОС–***моделей в качестве ***акцепторов*** формальных языков. Данные вопросы достаточно интенсивно исследовались такими авторами, как ***A. Hemmerling, K. Culik, A.R. Smith, T. Jebelean, S. Kosaraju, M. Nordahl*** и рядом др. Прежде всего, эти исследования касались вопросов распознаваемости известных формальных языков *иерархии Хомского* на основе ***ОС–***моделей. И в этом направлении работы, базирующиеся на структурных особенностях класса ***ОС-***моделей, представляют интерес, прежде всего, именно с практической точки зрения. Немало интересных работ в данном направлении может быть найдено в обширной библиографии [536].

В следующей главе рассматриваются вопросы, представляющие особый интерес с точки зрения использования классических ***d-ОС*** в качестве достаточно перспективной среды моделирования параллельных дискретных процессов и феноменов в различных теоретических и прикладных областях современного естествознания. В первую очередь это относится к фундаментальным проблемам моделирования и декомпозиции глобальных функций перехода в *классических* ***d-ОС (d≥1)***. При этом, понятие *моделирования* (*симулирования*) рассматривается в различных аспектах, представляющих интерес с той либо иной теоретической или прикладной точек зрения.

Глава 6.
Проблема моделирования в классических однородных структурах и связанные с ней вопросы

Проблема моделирования в классических ***d-ОС*** представляет большой как теоретический, так и прикладной интерес и ей посвящено значительное число работ, содержащих немало довольно интересных результатов. Основное направление исследований в данной области связывается и с моделированием *одной* структуры ***d-ОС (d≥1)*** *другой*, а именно: моделирование в реальное время, моделирование с подавлением одних или других свойств моделируемой структуры, упрощение характеристик моделирующей структуры и т.д. И если в рассматриваемых выше направлениях ***ТОС***-проблематики, практически, не ставились задачи оптимизационного характера, тогда как здесь уже предполагается использование при моделировании определенной оптимизационной методики. В связи с этим вводится понятие ***Т***-моделируемости, которое оказывается достаточно удобным также и при решении многих прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики. Так, на базе введенного понятия ***Т-моделирования*** проводится довольно детальное обсуждение *многоаспектной* проблемы моделирования на базе *классических* ***d-ОС***, а именно: моделирование в *реальное* время, моделирование целого ряда важных процессов и алгоритмов, и оптимальное моделирование по заданным критериям и т.д. В частности, моделирование известных алгоритмов классическими ***1-ОС***, и наоборот, позволяет в определенной степени оценивать их *сложность* относительно друг друга, а также решать целый ряд очень важных *алгоритмических* проблем *динамики* ***ОС***-моделей. Моделирование одной структуры другой с упрощением основных (*или их части*) характеристик моделирующей структуры и наследованием ею исследуемых свойств моделируемой структуры, в целом ряде случаев позволяет существенно упрощать изучение динамических свойств второй. Так, например, в целом ряде случаев получаем существенное упрощение и задач исследования динамики классических ***d-ОС (d ≥ 1)*** путем сведения исследования к случаю моделирующих их структур с простыми либо простейшими индексами соседства.

Вопросами моделирования в классических ***d-ОС (d ≥ 1)*** занимался целый ряд исследователей, из которых следует отметить важные результаты ***Дж. фон Неймана, А. Беркса, Х. Ямада, Х. Нишио, С. Аморозо, А.Р. Смита, Т. Тоффоли, Э. Кодда, Э. Бэнкса, Дж. Батлера, Р. Фольмара, А. Вунше, А.С. Подколзина, В.З. Аладьева***, и целого ряда других. Более детальную информацию в данном направлении исследований ***ТОС***-проблематики и ее многочисленных *приложений* можно найти в работах [1,3-5,8,9,35,37,54-56,68,73,75,79,80,83,86,90,114,128,130-135,138,146-151,156-161,166,167,171, 179,184-187,190,199,230,240,255,263,268,285,288-292,295,298,300,313,318,360,376,386,391,402,536] вместе с имеющимися в них многочисленных ссылках и на другие работы. И это при том, что вопросы относятся только к сугубо внутренней ***ОС***-проблематике, не учитывая весьма многочисленных работ, рассматривающих ***ОС*** в качестве *модельной* среды для различных прикладных естественно научных задач. Из первых достаточно интересных результатов в данном направлении (*не считая результатов моделирования в* ***ОС***-*среде основоположников* ***ТОС***-*проблематики* ***Дж. фон Неймана*** *и его прямых последователей*) следует отметить докторскую диссертацию ***А.Р. Смита*** [131], в которой он рассматривает ряд принципиальных вопросов моделирования одной *классической* ***d-ОС (d≥1)*** другой структурой той же самой размерности ***d***, но с уменьшением размера шаблона соседства моделирующей структуры. Отметим, что такого *уменьшения* размера шаблона соседства удалось добиться за счет как увеличения алфавита моделирующей *классической* ***d-ОС (d ≥ 1)***, так и за счет увеличения самого времени моделирования. Большое количество других довольно интересных результатов по моделированию данного типа для случая классических ***d-ОС (d ≥ 1)*** можно найти в цитированных выше работах.

Подобные исследования, в частности, во многом мотивируются поиском более оптимальных по неким выбранным критериям (*времени моделирования*, *сложности межавтоматной связи*, *мощности алфавита состояний единичного автомата структуры и т.д.*) структур, моделирующих исходные классические ***d-ОС (d≥1)***. Целый круг важных вопросов возникает при погружении в ***ОС***-модели различного класса параллельных и последовательных алгоритмов, а также и при исследованиях ***d-ОС (d≥1)*** с точки зрения определяемых ими параллельных алгоритмов. Между тем, проблема *моделирования* в ***d-ОС*** в настоящее время представляется настолько *многоаспектной*, что в рамках настоящей главы полностью охваченной быть не может, хотя затрагивается целый ряд ее весьма важных вопросов. В основном, представленные здесь результаты носят теоретический характер и, практически, почти совсем не затрагивают довольно обширной области прикладных аспектов моделирования в классических ***d-ОС (d ≥ 1)***, с которыми можно ознакомиться в цитированных выше работах. В связи с многоаспектностью проблемы и достаточно большим диапазоном целей моделирования сформировался целый ряд подходов к понятию «***моделирования***», наилучшим образом отвечающим той либо иной задаче моделирования. Значимость данной проблематики связана, в первую очередь, с той ролью, которую играют структуры как новая и перспективная среда *моделирования* для разнообразных дискретных процессов, феноменов, явлений и объектов, допускающих высокую степень распараллеливания. Но не только высоким *уровнем параллелизма*, обеспечиваемым принципом функционирования, привлекательны такие ***ОС***-модели. Именно в рамках их *аксиоматики* обеспечиваются такие *фундаментальные* свойства, присущие физическим законам и процессам, как *однородность* и *локальность*. Тогда как собственно свойство *обратимости* физических процессов (*важное, в первую очередь, на микроскопическом уровне*) обеспечивается лишь специальным программированием ***ОС***-моделей. Отмеченные свойства создают весьма хорошие предпосылки для применения ***ОС***-концепции при построении и исследовании концептуальных моделей *пространственно-распределенных динамических систем*, из которых физическим системам в настоящее время уделяется особенно пристальное внимание. Ниже представляются наиболее широко используемые понятия моделирования в среде *классических* однородных структур ***d-ОС (d ≥ 1)*** из целого ряда имеющихся на сегодня.

6.1. Понятия моделирования в классических однородных структурах

Прежде всего, сделаем общее замечание по двум *основным* методикам моделирования для класса однородных структур. Следуя основоположникам ***ТОС***-проблематики (***Дж. Нейман, С. Улам, А. Беркс, Дж. Холланд, Э. Кодд, Э. Бэнкс, Х. Ямада*** *и ряд др.*), весьма большое число исследователей в этом *важном* направлении используют для целей как теоретического, так и сугубо прикладного моделирования непосредственно ***ОС***, наделяя ее определенными *правилами* функционирования и погружая в нее моделируемые алгоритмы и процессы. Данный подход носит в значительной мере конструктивный характер, когда в ***ОС***-среде *единая* задача моделирования может сводиться к *композиции* составляющих ее подзадач (*блоков*). Типичным методом этого типа моделирования является выделение в ***ОС***-среде ряда *блоков* единичных автоматов, выполняющих определенные функции и взаимодействующих между собой по принципу передачи управляющих импульсов по специально организованным в ***d-ОС (d > 1)*** информационным каналам, которые образованы из единичных автоматов среды. Такой подход называется прямым *погружением* моделируруемой задачи в ***ОС***-среду. Однако второй подход использует ***ОС***-модель на уровне *формальной* системы параллельной обработки информации, представляя *общий уровень* моделирования исследуемых алгоритмов и процессов. В этом отношении оба подхода к моделированию на основе ***ОС***-метода в определенной мере можно уподобить известным способам моделирования (*вычислимости*) на основе машин *Тьюринга* и алгоритмов *Маркова* соответственно или некоторых других *формальных* алгебраических систем переработки слов в конечных алфавитах. Если первый подход наиболее пригоден для целей исследования прикладных аспектов моделирования на основе ***d-ОС***, тогда как второй составляет основу формального исследования и конструктивных, и вычислительных возможностей ***ОС***-моделей как абстрактных систем параллельной обработки информации, на аксиоматическом уровне обеспечивающих свойства *однородности* и *локальности*, и программно – свойство *обратимости* динамики. Между тем, оба эти подхода могут с той либо другой степенью приемлемости взаимно дополнять друг друга. Именно второй подход (*как основная составляющая собственно самой* ***ТОС***) формирует *основу* для дальнейшего изложения при обсуждении вопросов моделирования в ***ТОС***-проблематике.

Изложение начинаем с традиционного подхода к понятию моделирования, восходящего еще к ***А.Р. Смиту*** [131]. Пусть c_t обозначает ***КФ*** классической ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ в момент времени $t \geq 0$ и τ – ее глобальную функцию перехода (***ГФП*** τ). Тогда результат t-кратного применения τ-функции (τ^t) определяется следующими рекуррентными соотношениями, а именно:

$$\tau^0(c_0) \equiv c_0\tau^0 \equiv c_0, \quad \tau^t(c_{t-1}) \equiv c_{t-1}\tau^t \equiv \tau(\tau^{t-1}(c_{t-1})) \equiv c_t \qquad (t \geq 1)$$

С учетом сделанных выше предположений введем понятие моделирования одной классической структуры ***d-ОС*** другой структурой той же d-размерности $(d \geq 1)$.

<u>Определение 21</u>. Пусть W_d будет множеством всех допустимых ГФП τ для классических d-ОС ($d \geq 1$). Рассмотрим две классические структуры Z1 и Z2 из данного множества с множествами конфигураций и ГФП соответственно C1, τ_1 и C2, τ_2 ($\tau_1,\tau_2 \in W_d$). Далее будем говорить, что Z2 моделирует структуру Z1 в реальное время K2/K1 тогда и только тогда, когда существуют эффективно вычислимое инъективное отображение вида H: C1 $\rightarrow$ C2, а также и эффективно вычислимая функция h: $W_d \rightarrow W_d$ такие, что имеет место следующее соотношение, а именно:

$$\tau_2^{k_2}(H(c_t)) \equiv H(\tau_1^{k_1}(c_t)); \quad \tau_2 = h(\tau_1)$$

При выполнении условия K2=K1 будем говорить о моделировании классических структур d-ОС ($d \geq 1$) в строго реальное время.

В целом ряде случаев при представлении результатов моделированию в ***d-ОС*** будет удобно для структуры ***d-ОС*** $= \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X\rangle$ использовать обозначение (d,n,a), где смысл параметров d, n и a полностью соответствует определению классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$, не требуя особых пояснений. Посредством достаточно простой процедуры ***Дж. Батлер*** [313] на основе одного достаточного условия существования алгоритма моделирования в ***1/k****-реальное* время одной *классической* ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ другой структурой той же самой размерности доказал следующий интересный результат, используемый достаточно часто в исследованиях динамики классических структур посредством моделирования [536].

<u>Теорема 90</u>. Для произвольной классической структуры $(2,n,a)$ существует моделирующая ее в 1/K-реальное время структура $(2,p,a^{2km})$; где m есть длина стороны минимального квадрата, содержащего шаблон соседства моделируемой однородной классической структуры.

В целях иллюстрации одного из возможных подходов к моделированию *классических* ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ структурами того же класса, но с уменьшением размера *шаблона соседства* (***ШС***), рассмотрим, не нарушая общности, моделирование классической ***1-ОС*** структурой той же ***1***-размерности, но с *простейшим* индексом соседства $X_n=\{0,1\}\equiv\{-1,0\}$. Как уже отмечалось выше, для *классической* ***d-ОС*** *простейший* индекс соседства определяет ***ШС*** длины $m=d+1$. Так как в общем случае *классическая*

1-ОС имеет алфавит вида ***A={0,1,2,...,a-1}*** и индекс соседства ***X={0,1,2,...,n-1}***, то ее ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ будет определяться параллельными подстановками следующего вида, а именно:

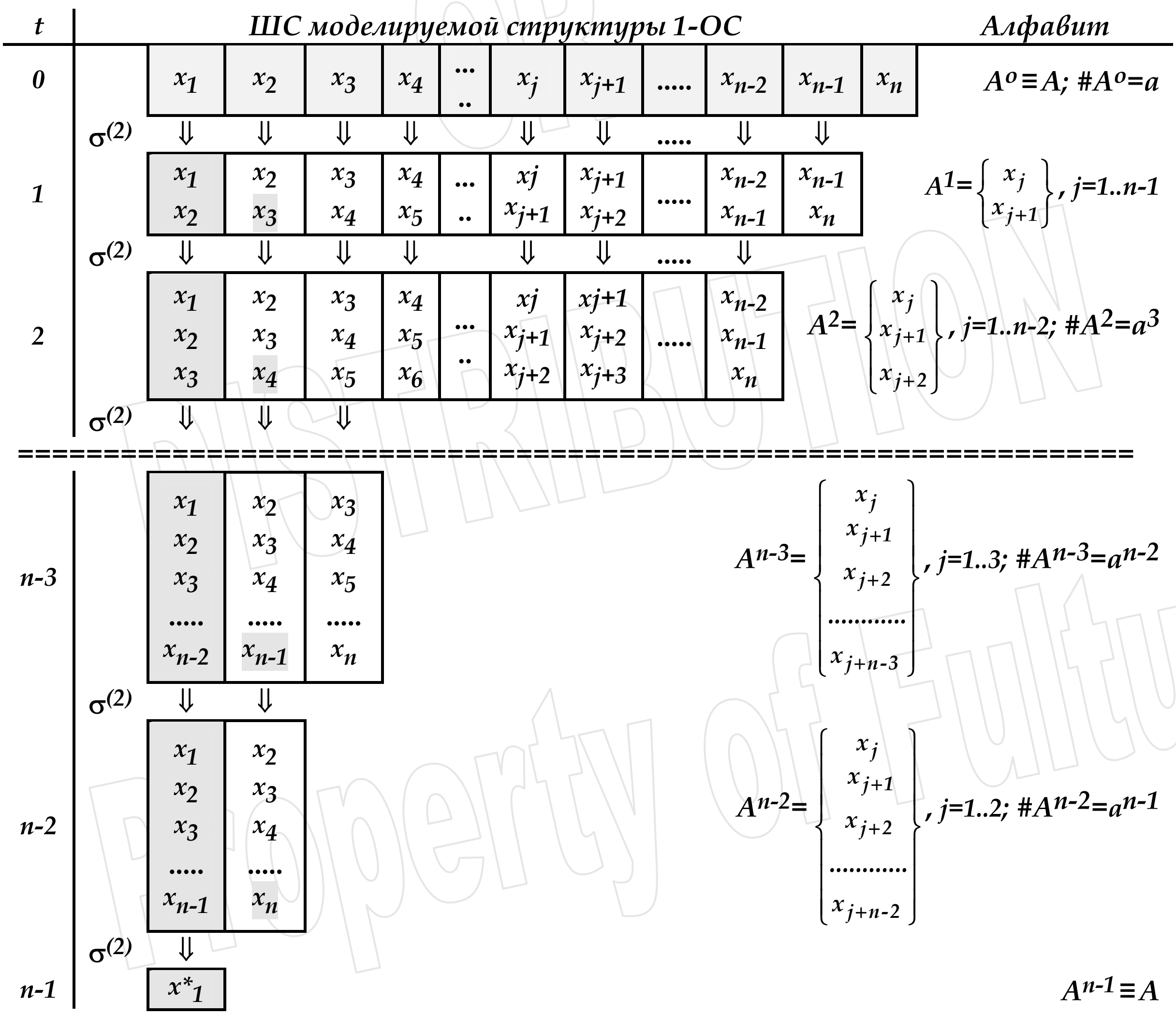
$$\sigma^{(n)}:\ X_j X_{j+1} X_{j+2} \dots X_{j+n-1} \Rightarrow X^*_j; \quad X_{j+p}, X^*_j \in A \quad \{j = 0, \pm1, \pm2, \dots;\ p = 0 \,..\, (n-1)\}$$

Определяем для такой структуры классическую ***1-ОС*** с *простейшим* индексом соседства X_n***={0,1}***, алфавитом ***A**** и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ с параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$x_j x_{j+1} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_j \\ x_{j+1} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_j & x_{j+1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} \\ === & === \\ x_{j+k} & x_{j+k+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_j \\ x_{j+1} \\ ==== \\ x_{j+k+1} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_j & x_{j+1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} \\ === & === \\ x_{j+n-2} & x_{j+n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow x^*_1$$

$$k = 1..n-3; \quad x^*_1, x_{j+p} \in A; \quad p = 0..n; \quad j = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$$

принцип применения которых к шаблону соседства ***(ШС)*** моделируемой структуры очень легко усматривается из нижеследующей принципиальной схемы, поясняющей *один* прием, состоящий в постепенном увеличении уровней структурированности состояний моделирующей ***1-ОС***, что позволяет аккумулировать информацию о состоянии ***ШС*** *моделируемой* структуры в *простейшем* ***ШС*** моделирующей структуры, а именно:



Представленная схема достаточно прозрачна и определяет принцип редукции исходного ***ШС*** размера ***n*** моделируемой ***1-ОС***, когда на шаге ***t=n-2*** получаем простейший ***ШС*** моделирующей

1-ОС*,** содержащий всю информацию о произвольной конфигурации ***ШС моделируемой ***1-ОС*.** Нетрудно заметить, что алфавит A^* *моделирующей* ***1-ОС*** определяется $A^* = \cup_p A^p \cup A$ $\{p=1 \,..\, (n-2)\}$, тогда как его мощность определяется величиной $\psi = \# A^* = \sum_{p=1}^{n-1} a^p = (a^n - a)/(a-1)$. Таким образом, имеет место следующий результат, который представляет существенный интерес в целом ряде задач модельного характера.

<u>Теорема 91</u>. Для произвольной классической структуры (1,n,a) существует моделирующая ее в 1/(n-1)-реальное время структура (1,2,ψ), где значение ψ определяется выше.

Данный результат естественным образом обобщается также и на случаи высших размерностей моделируемых классических ***d-ОС*.** Принцип моделирования ***d-ОС*** (***d*>1**) является естественным *обобщением* описанного подхода к моделированию ***1-ОС*** и достаточно наглядно иллюстрируется (*на фрагментарном уровне*) на примере структуры ***2-ОС*.** Пусть шаблон соседства моделируемой ***2-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2, \ldots, a-1\}$ имеет размер ***(nxm)*** и вид, представленный ниже.

$x_{i,j+n-1}$	.....	$x_{i+p,j+k}$	.....	$x_{i+m-1,j+n-1}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j+k}$	.....	$x_{i+p,j+k}$	.....	$x_{i+m-1,j+k}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j}$	.....	$x_{i+p,j}$	.....	$x_{i+m-1,j}$

$\Rightarrow \; x^*_{i,j}$

В качестве центрального автомата ***ШС*,** не нарушая общности, будем полагать его автомат $[x_{i,\,j}]$. Параллельные подстановки, определяющие ***ЛФП*** структуры, задаются на конфигурациях ***ШС*,** определяя новые состояния для центрального автомата в следующий момент времени.

В принципе, данный ***ШС*** представляет собой минимальный прямоугольник, который содержит произвольный ***ШС*** меньшего или равного ему размера. Собственно *само* моделирование состоит из *двух* этапов, на каждом из которых используется подход из описанного *метода* моделирования ***1-ОС*.** На первом этапе моделирующая структура ***2-ОС*** с индексом соседства $X = \{(0,1), (00), (1,0)\}$ использует параллельные подстановки следующего вида, а именно:

a	
x_i	x_{i+1}

$\Rightarrow$ $x_i{}^*$, *независимо от a-состояния, т.е.*
$x_i{}^* = f(x_i, x_{i+1})$; x_i *– центральный автомат*

$$\begin{matrix} Z & \\ x_{i+k} & x_{i+k+1} \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{i+k} \\ x_{i+k+1} \end{bmatrix}; \;\; x_{i+k} \in A; \quad k = 0..m-2; \quad \begin{bmatrix} Z & \\ x_{i+t} & x_{i+t+1} \\ x_{i+t+1} & x_{i+t+2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{i+t+p} & x_{i+t+p+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{i+t} \\ x_{i+t+1} \\ \ldots\ldots \\ x_{i+t+p+1} \end{bmatrix}$$

$$x_{i+t}, x_{i+t+p}, Z \in A; \quad t = 0..r; \;\; p = m-r-1; \quad r = m-2..1; \;\; i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots .$$

обеспечивающие *аккумуляцию* в автоматах $<x_{i,j+k}>$ информации о состояниях всех автоматов из соответствующих им строк ***ШС*,** т.е. для *любого* $k=0..n-1$ автомат в качестве состояния будет иметь кортеж состояний автоматов $X_{j+k} = <x_{i,j+k}, x_{i+1,j+k}, \ldots, x_{i+m-1,j+k}>$, образуя *обобщенный* алфавит ***Q*.** Данный этап потребует ***(m-1)*** шагов моделирующей структуры и расширения ее алфавита ***A*** до алфавита A^* мощности $\# A^* = (a^{m+1} - a)/(a-1)$.

На втором этапе моделирующая ***2-ОС*** использует параллельные подстановки вида:

X_{j+1}	
X_j	c

$\Rightarrow$ $X_j{}^*$, *независимо от c-состояния, т.е.*
$X_j{}^* = f(X_j, X_{j+1})$; X_j *– центральный автомат*

$$\begin{matrix} X_{j+k+1} \\ X_{j+k} \end{matrix}\ Z \Rightarrow \begin{bmatrix} X_{j+k+1} \\ X_{j+k} \end{bmatrix};\ X_{j+k} \in Q;\quad k = 0..n-2;\quad \begin{bmatrix} X_{j+t+p+1} \\ X_{j+t+p} \\ \dots\dots\dots \\ X_{j+t+1} \\ \hline X_{j+t+p} \\ X_{j+t+p-1} \\ \dots\dots\dots\ Z \\ X_{j+t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} X_{j+t+p+1} \\ X_{j+t+p} \\ \dots\dots\dots \\ X_{j+t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{j+n-1} \\ X_{j+n-2} \\ \dots\dots\dots \\ X_{j+1} \\ \hline X_{j+n-2} \\ X_{j+1} \\ \dots\dots\dots\ Z \\ X_{j} \end{bmatrix} \Rightarrow x^*_{i,j},$$

$$x^*_{i,j} \in A;\ X_{j+t}, X_{j+t+p}, Z \in Q;\quad t = 0..r;\quad p = n-r-1;\quad r = n-3..1;\quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots .$$

обеспечивающие аккумуляцию в автоматах $<x_{i,j}>$ и $<x_{i,j+1}>$ всю информации о состояниях всех автоматов строк ***ШС*,** т.е. для каждого из **2** указанных автоматов в качестве состояний будут уже выступать **2**-мерные кортежи состояний автоматов следующего общего вида, а именно:

$x_{i,j+n-1}$	.....	$x_{i+p,j+n-1}$	.....	$x_{i+m-1,j+n-1}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j+k}$	.....	$x_{i+p,j+k}$	.....	$x_{i+m-1,j+k}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j+1}$	.....	$x_{i+p,j+1}$	.....	$x_{i+m-1,j+1}$

$x_{i,j+n-2}$	.....	$x_{i+p,j+n-2}$	.....	$x_{i+m-1,j+n-2}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j+k}$	.....	$x_{i+p,j+k}$	.....	$x_{i+m-1,j+k}$
.....	.....	.....	.....	.....
$x_{i,j}$	.....	$x_{i+p,j}$	.....	$x_{i+m-1,j}$

Таким образом, сначала производится аккумуляция состояний автоматов строк ***ШС*** в столбце ***i*,** затем аккумуляция состояний автоматов всего ***ШС*** завершается в *двух* автоматах $<x_{i,j}>$ и $<x_{i,j+1}>$. Данный этап потребует ***(n-1)*** шагов моделирующей структуры с расширением алфавита A^* до алфавита $A^@$ мощности $\#A^@ = (a^{m+1}-a)/(a-1) + (a^{nm}-a^{2m})/(a^m-1)$. Таким образом:

Для любой структуры 2-ОС с шаблоном соседства размера nxm существует структура 2-ОС с простейшим индексом соседства Xn и алфавитом A@ указанной мощности, моделирующая ее в 1/(n+m-2)-реальное время.

На основе сказанного несложно доказать следующий достаточно полезный результат.

<u>Теорема 92</u>. Для d-ОС (d ≥ 1) с ШС размера $n_1 x n_2 x \dots x n_d$ ***и алфавитом A={0,1,2,...,a-1} существует моделирующая ее в*** $1/(\sum_{j=1}^{d} n_j - d)$ ***–реальное время структура d-ОС (d ≥ 1) с простейшим индексом соседства Xn и алфавитом A* мощности, определяемой следующей формулой, а именно:***

$$\# A^* = a + \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{a^{\prod_{k=1}^{j} n_k + \varphi(j)} - a^{2\prod_{k=0}^{j-1} n_k}}{a^{\prod_{k=0}^{j-1} n_k} - 1} \right),\ \ where\quad \varphi(j) = \begin{cases} 1, & if\ j < d \\ 0, & otherwise \end{cases};\quad n_o = 1$$

В качестве достаточно интересной задачи можно рассмотреть вопрос оптимизации алгоритма моделирования подобного или иного типа**.** Используя вышеописанный подход, можно доказать и следующий полезный для задач моделирования результат.

<u>Теорема 93</u>. Произвольная классическая d-ОС (d≥1) с ШС в форме гиперпараллелепипеда размера n_1xn_2x ... xn_d и алфавитом A={0,1,2, ..., a-1} моделируется в 1/n-реальное время структурой той же размерности с шаблоном соседства в виде гиперкуба с длиной ребра 2 и алфавитом A* при следующих определяющих условиях, а именно:

$$n = \max_{k=1..d}\{n_k\} - 1 \qquad \# A^* = \sum_{k=1}^{n} a^{k^d}$$

При этом, весьма характерным свойством *моделирующей* структуры является *наследование* ею всех основных *динамических* свойств *моделируемой* структуры, включая такие, как *неконструируемость*, *обратимость* и др. Данное обстоятельство достаточно существенно, позволяя, в первую очередь, на теоретическом уровне исследовать динамику классических ***d-ОС*** с простейшими индексами соседства с последующей экстраполяцией полученных здесь результатов и на более общие типы классических ***ОС***-моделей. Естественно, упрощение ***ШС*** исследуемой ***ОС***-модели достигается за счет, порой, существенного увеличения мощности алфавита моделирующей структуры. Однако в целом ряде случаев *определяющим* фактором является именно простота топологии соединений единичных автоматов *исследуемой* ***ОС***-модели. Результаты, подобные вышеприведенным, можно охарактеризовать тем, что *классические* ***d-ОС (d≥1)*** с небольшим алфавитом ***A*** состояний и весьма большим шаблоном соседства могут моделироваться посредством ***d-ОС*** того же типа с меньшим шаблоном соседства и с существенно *большим* алфавитом внутренних состояний ***A****, и наоборот. Другой довольно сильный результат в данном направлении был получен ***А.Р. Смитом*** [131] по моделированию произвольной классической ***d-ОС*** бинарной структурой той же размерности и того же типа, а именно.

<u>Теорема 94</u>. Для произвольной классической структуры (d,n,a) существует моделирующая ее в строго реальное время структура (d,k,2), для которой имеет место следующее соотношение:

$$|k| \le (2^{a-1} - 1)(n + 2) + [\log_2 a](n - 1) + 1$$

Следует подчеркнуть, что при доказательстве вышеприведенных результатов *Батлера-Смита* по моделируемости в классических ***d-ОС (d≥1)*** не использовалась *оптимизационная* техника и в ряде наших работ был предпринят ряд попыток получить подобного рода оптимизацию параметров моделирующей структуры. Ниже будут представлены некоторые из полученных результатов. В частности, в этой связи было введено понятие ***1-****моделируемости* [1,3-5], суть которого сводится к следующему и иллюстрируется диаграммой, представленной на рис. 23. Данная диаграмма дает возможность очень наглядно представить саму суть ***1-****моделируемости* в среде классических ***d-ОС (d ≥ 1)*** с иллюстрацией используемого принципа моделирования.

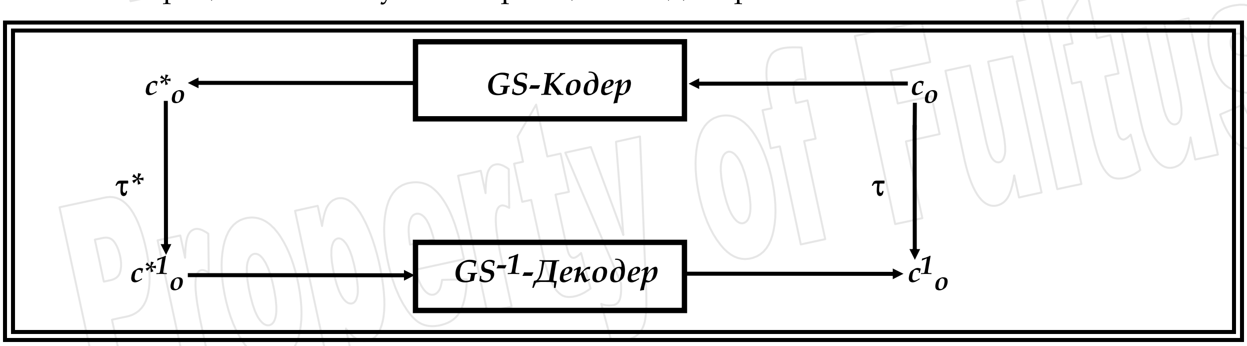


Рис. 23. Диаграмма, иллюстрирующая принцип 1-моделируемости в классических однородных структурах.

В моделируемой классической структуре ***d-ОС (d ≥ 1) КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$, определенная в алфавите ***A***, под действием ***ГФП*** τ переводится в следующую конфигурацию $c_o\tau = c^1_o$. Пусть теперь ***GS(X)*** есть некоторый рекурсивный метод кодирования символов $X \in A$ и $GS^{-1}(Y)$ есть некоторый метод рекурсивного декодирования множества символов из алфавита A^* моделирующей ***d-ОС*** $(d \geq 1)$; пусть $GS[X]$ и $GS^{-1}(Y)$ определяют соответственно рекурсивные методы как кодирования, так и декодирования конфигураций X и Y. Тогда для моделирующей классической ***d-ОС*** каждая ***КФ*** $c^*_o = GS[c_o]$ под действием ***ГФП*** τ^* переводится в следующую ***КФ*** c^{*1}_o, для которой имеет место $GS^{-1}[c^{*1}_o] = c^1_o$. Будем говорить, что *классическая* ***d-ОС 1-моделируется*** структурой той же самой размерности, если динамика *моделируемой* и *моделирующей* структур подчинена перечисленным выше условиям. Предположим, что T_X будет длиной ребра минимального ***d***-мерного гиперкуба, содержащего ***ШС*** моделируемой *классической* ***d-ОС*** $(d \geq 1)$. Тогда при сделанных предположениях имеет место следующий полезный во многих отношениях результат [1,5,88,90,536].

<u>Теорема 95</u>. Для произвольной классической структуры d-ОС = <Z^d, A, $\tau^{(n)}$,X> (d≥1) существует 1-моделирующая ее структура <Z^d, A*, $\tau^{(p)}$, X*>, для которой размер T_{X^*} шаблона соседства и алфавит A* внутренних состояний удовлетворяют определяющим соотношениям, а именно:

$$\begin{cases} T_{X^*} \leq (T_X + 1)([\log_2 a] + 1) - 1, \quad for \quad A^* = \{0,1,2\} \\ T_{X^*} \leq (T_X + 1)(L + 5) - 1, \quad for \quad A^* = \{0,1\} \\ \qquad where \quad L = [(\log_2 a - 1)/(\log_2 7 - 1)] + 2 \end{cases}$$

Насколько нам известно, данный результат на сегодня является наилучшим среди результатов подобного типа. В монографиях [1,3,5,90] рассмотрены и несколько более специальные способы моделирования одной *классической* ***d-ОС (d≥1)*** другой. В частности, ***А.Р. Смит*** [131] показал, что в общем случае невозможно *(в рамках определения **21**)* моделировать *классическую* структуру ***d-ОС (d ≥ 2)*** структурой меньшей размерности. Между тем, нами было показано [1], что в целом ряде случаев можно моделировать и классическую ***d-ОС (d > 1)*** даже посредством классической ***1-ОС***. Ниже конструктивно будет проиллюстрирована и возможность подобного моделирования ***d-ОС (d>1)*** посредством *классической* ***1-ОС***. Этот результат базируется на возможности моделирования классических ***2-ОС*** подходящей машиной *Тьюринга* с последующим моделированием последней классической ***1-ОС***, и на *редукции* размерностей моделируемой и моделирующих структур. При этом, правда, динамика моделирующей структуры может быть достаточно малопригодной для последующих анализа и применения, иллюстрируя лишь теоретическую возможность данного типа моделирования.

К проблеме моделирования непосредственно относятся и некоторые работы по исследованиям специальных свойств *классических* ***d-ОС (d≥1)***. В частности, некоторые исследователи занимались вопросами стандартизации структуры шаблонов соседства ***(ШС)*** классических ***ОС***-моделей. Эта проблематика представляется достаточно важной для ***ТОС*** и ее многочисленных приложений, особенно в плане использования ***d-ОС*** в качестве весьма перспективной среды моделирования. Вопросы данного направления систематически исследовались в работах ***Х. Ямада*** и ***С. Аморозо*** на базе введенных ими понятий *структурного* и *поведенческого* изоморфизмов для классических ***ОС***-моделей. Было показано, что определенные эквивалентные отношения, сохраняющие одну либо обе формы изоморфизма, приводят к стандартизациям структуры ***ШС*** в ***ОС***-моделях [130]. При получении данных результатов *центральную* роль играют важные понятия блокирования и блокированной структуры из единичных автоматов ***ОС***-модели. При этом, определение слабой формы *поведенческого* изоморфизма привело к дальнейшим *упрощениям* стандартной структуры шаблонов соседства для классических ***ОС***-моделей [130,536].

В очень многих задачах моделирования в *классических* ***d-ОС (d≥1)*** и, прежде всего, с точки зрения вопросов исследования алгоритмических свойств структур довольно эффективным оказывается понятие ***Т-моделируемости***. Хорошо известно, что классическая ***ОС***-модель представляет собой параллельный алгоритм переработки слов (*конфигураций*) в конечных алфавитах. Поскольку же исследование ***ОС***-моделей с данной точки зрения представляет несомненный интерес, то весьма целесообразно определить принципиально важное понятие, а именно **– «*один алгоритм (слабо) Т-моделирует другой алгоритм*».**

Пусть M_1 есть некоторый алгоритм переработки слов в конечном алфавите A, тогда как M_2 есть алгоритм переработки слов в *конечном* алфавите A^* $(A \subseteq A^*)$. Предположим, что $M^k{}_1 s = s^k$ $(M^o{}_1 s = s)$ есть результат k-кратной переработки s-слова, заданного в алфавите A, посредством алгоритма M_1. Для произвольного конечного s-слова в алфавите A алгоритмом M_1 генерируется некоторая последовательность конечных слов следующего вида, а именно:

$$M^o{}_1 s,\ M^1{}_1 s,\ M^2{}_1 s,\ M^3{}_1 s,\ \dots,\ M^k{}_1 s,\ \dots \tag{46}$$

Пусть теперь s^* есть любое конечное слово в алфавите A^* (*в алфавите* A *совпадающее со словом* s) и алгоритм M_2 генерирует из s^*-слова последовательность слов следующего вида, а именно:

$$M^o{}_2 s^*,\ M^1{}_2 s^*,\ M^2{}_2 s^*,\ M^3{}_2 s^*,\ \dots,\ M^k{}_2 s^*,\ \dots \tag{47}$$

<u>Определение 22</u>. Будем говорить, что алгоритм M_2 Т-моделирует алгоритм M_1 только тогда, когда существует некоторая рекурсивная процедура PR, позволяющая для каждого конечного слова s, определенного в алфавите A, выделять из последовательностей слов вышеуказанного вида (47) подпоследовательности слов следующего вида, а именно:

$$M^o{}_o s^*,\ M^{j1}{}_2 s^*,\ M^{j2}{}_2 s^*,\ M^{j3}{}_2 s^*,\ \dots,\ M^{jk}{}_2 s^*,\ \dots$$

такие, что в алфавите A имеет место соотношение вида $(\forall k \in N)(M^{j}k_2 s^* \equiv M^k{}_1 s)$ и $j_k = T + k$. Если значение j_k зависит от длины перерабатываемых слов s $\{j_k = f(|S|)\}$ в моделирующем алгоритме M_2, будем говорить – алгоритм M_2 слабо Т-моделирует исходный алгоритм M_1 (в частности, функциональный алгоритм однородной структуры).

Введенное понятие ***Т-моделируемости*** используется нами достаточно широко, обладая целым рядом положительных черт. В частности, в свете введенных понятий весьма нетрудно убедиться, что понятие **1**-моделируемости является частным случаем ***Т***-моделируемости, представляющим, однако, самостоятельный интерес, прежде всего, из-за следующих двух обстоятельств, а именно: ***(1)*** определяется метод моделирования в режиме строго реального времени, и ***(2)*** простой метод GS^{-1}-*декодирования* слов, генерируемых *моделирующим* алгоритмом. Наряду с введенными выше понятиями для теоретического исследования целого ряда весьма важных вопросов, связанных с моделированием в классических ***d-ОС***, нами было определено существенно более абстрактное понятие ***WM-моделируемости*** [53], впоследствии получившее существенное обобщение в виде понятия ***W-моделируемости***, позволившее впоследствии решить целый ряд весьма интересных задач общей проблемы моделирования для классических структур ***d-ОС*** $(d \geq 1)$.

Пусть M есть произвольная классическая ***d-ОС*** $(d \geq 1)$, в которой каждая конечная ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ имеет вполне определенную динамику (*историю*) $<c>[\tau^{(n)}] = \{c\tau^{(n)k} \mid k = 0,1,2, \dots\}$ c-конфигурации. Выбираем некоторый конечный E-алфавит и определяем *рекурсивную* F-функцию кодирования, переводящую любую ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ в некоторое множество $F(c) = \{c^e{}_p \in C_E\}$ конфигураций таких, что $F^{-1}(c^e{}_p) = c$ $(p = 1,2,3,4,\ \dots,\ r;\ 1 \leq r \leq \infty)$. Множество $S = \bigcup\limits_{c \in C(A,d,\phi)} F(c)$ назовем ***сигнальным*** и будем полагать его рекурсивным. Тогда, если существует *алгоритм* кодирования F и классическая ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ W с E-алфавитом внутренних состояний такие, что *любая* история конфигураций $<c^e>[\tau^{(v)}]$ ($c^e \in S$; $\tau^{(n)}$ – ***ГФП*** *в* W-*структуре*) содержит *максимальную* подпоследовательность конфигураций

$\{c^e{}_k \in S\}$, для которых имеет место соотношение вида $\{F^{-1}(c^e{}_k)\} = \langle c\rangle[\tau^{(n)}]$, то будем говорить, что классическая ***M***-структура ***W-моделируется*** структурой ***W*** того же типа [5,53-56,88,90,536].

При этом следует отметить, что в свете сделанных предположений выделение из *любых* историй $\langle c^e\rangle[\tau^{(v)}]$ ***КФ*** максимальных подпоследовательностей ***КФ*** $\{c^e{}_k\}$ возможно в свете рекурсивности сигнального ***S***-множества. Между тем, введенное понятие существенно расширяет понятие ***WM***-моделируемости, охватывая чрезвычайно широкий класс методов моделирования в *классических* ***d-ОС (d ≥ 1).*** Целый ряд использованных нами подходов к моделированию в среде классических ***d-ОС (d ≥ 1)*** охватывается именно понятием ***W***-моделируемости [53].

Понятие ***W***-моделируемости довольно широко, охватывая не только существенно классические структуры ***d-ОС (d ≥ 1).*** Рассмотрим в качестве примера следующий алгоритм моделирования классической ***1-ОС*** с алфавитом ***A***={***0,1, ..., a-1***}, индексом соседства ***Xn***={***0,1***} структурой ***1-ОС**** с тем же алфавитом, индексом соседства Неймана-Мура ***X****={***-1,0,1***}, чья ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ определяется не только конфигурацией ***ШС***, но и координатами его центрального автомата. Точнее, ***ЛФП 1-ОС**** определяется следующим образом {*где* $\sigma^{(2)}(x,y)$ – ***ЛФП*** *моделируемой* ***1-ОС***, ⊗ – *сложение по* ***(mod a)*** ***и*** $[x_j]$ – *координата элементарного* ***j****-автомата моделирующей* ***1-ОС****}, а именно:

$$\sigma^{(3)}(x_{-1}, x_o, x_1) = \begin{cases} \sigma^{(2)}(x_{-1}, x_1), & if \quad [x_o] \ is \ even \\ x_{-1} \otimes x_o \otimes x_1, & if \quad [x_o] \ is \ odd \end{cases}$$

Исходя из определения ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ структуры ***1-ОС****, будет уже несложно убедиться, что в рамках элементарных автоматов структуры с четными координатами ***1-ОС* 1***-моделирует *произвольную* классическую ***1-ОС.*** Можно показать [88,90], что для данного класса ***ОС***-моделей сохраняет силу первый критерий неконструируемости ***(****теорема* ***18)***, базирующийся на общем понятии взаимно стираемых конфигураций ***(ВСКФ).***

Рассмотрим вопрос существования пар ***ВСКФ*** для ***1-ОС****, моделирующей произвольную ***1-ОС*** с указанными параметрами, для чего достаточно рассмотреть лишь четыре исчерпывающих типа пар ***ВСКФ***, а именно:

(a) $\sigma^{(3)}$:

н	ч	н	ч	н	ч	н
a	b	x	x_o	x_1	c	d
a	b	y	y_o	y_1	c	d

(b) $\sigma^{(3)}$:

н	ч	н	...	ч	н	ч
a	b	x	...	x_1	c	d
a	b	y	...	y_1	c	d
			...		$\begin{bmatrix} z \\ z_1 \end{bmatrix}$	

(c) $\sigma^{(3)}$:

ч	н	ч	...	н	ч	н
a	b	x	...	x_1	c	d
a	b	y	...	y_1	c	d
	$\begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$		...			

(d) $\sigma^{(3)}$:

ч	н	ч	...	ч	н	ч
a	b	x	...	x_1	c	d
a	b	y	...	y_1	c	d
			...		$\begin{bmatrix} z \\ z_1 \end{bmatrix}$	

$a,b,c,d,x,y,x_o,y_o,x_1,y_1,z,z_1,z_2,z_3 \in A$; $x \neq y$, $x_1 \neq y_1$, $z \neq z_1$, $z_2 \neq z_3$; ***ч (н)*** есть *четная* ***(****нечетная****)*** координата элементарного автомата структуры ***1-ОС*.*** Из вида ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ несложно убедиться, случаи ***(b)–(d)*** не побуждают к наличию в ***1-ОС**** пар ***ВСКФ*** соответствующего вида, т.к. в результате действия ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ получаем *различные* ***z***-состояния для элементарных автоматов ***c*** структуры с *нечетными* координатами. Итак, пары ***ВСКФ*** указанных типов ***(b)–(d)*** в структуре ***1-ОС**** *недопустимы****.*** Тогда как пары ***ВСКФ*** вида ***(a)*** вполне реальны, если моделируемая классическая ***1-ОС*** будет обладать парами ***ВСКФ.*** Например, *классическая бинарная* ***1-ОС***, чья ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ определяется *параллельными* подстановками следующего вида

$$00 \to 0 \qquad 01 \to 0 \qquad 10 \to 0 \qquad 11 \to 1$$

обладает парами ***ВСКФ*** уже простейшего вида ***(a)***, а именно:

$\sigma^{(2)}$:

0	0	0
0	1	0
$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	

(a)

$\sigma^{(3)}$:

н	*ч*	*н*	*ч*	*н*	*ч*	*н*
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0
$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$		

(b)

Тогда как моделирующая ее вышеописанным способом структура ***1-ОС**** уже должна обладать парами ***ВСКФ*** вида ***(b)***. В целом же, структура ***1-ОС**** вполне может обладать парами ***ВСКФ*** с ***ВБ*** размера $\{2k+1 \mid k=1,2,3,\ ...\}$. Более того, граничные автоматы ***ВБ*** пар ***ВСКФ*** будут иметь нечетные адреса. Таким образом, будет иметь место даже несколько *более* сильный результат, выражаемый следующим предложением [88], а именно.

<u>Предложение 21</u>. Класс структур 1-ОС* с алфавитом $A=\{0,1,2,3,\ ...,\ a\text{-}1\}$, произвольным индексом соседства $X=\{0,1,...,n\text{-}1\}$, чьи ЛФП $\sigma^{(3)}$ для единичного автомата структуры определяются как конфигурацией его ШС, так и его координатами, не может обеспечить моделирования каждой классической 1-ОС структурой 1-ОС*, не обладающей неконструируемостью НКФ-типа.

Между тем, далее на протяжении настоящей главы наряду с приведенными раньше будут также применяться и некоторые другие подходы к моделированию в классических ***d-ОС***, суть которых будет ясна либо из самого принципа моделирования, либо поясняться по мере необходимости. В следующем разделе представлен ряд основных результатов по моделированию классическими структурами известных *формальных* алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах наряду со связанными с ними проблемами *динамики* ***ОС***-моделей, в определенной мере проясняющими ряд вопросов взаимной сложности моделируемых и моделирующих алгоритмов. Наряду с этим, взаимная моделируемость указанных алгоритмов позволяет решать ряд вопросов, связанных с проблемами разрешимости целого ряда задач динамики классических структур ***d-ОС*** ***(d≥1)***.

6.2. Моделирование классическими однородными структурами известных формальных алгоритмов переработки конечных слов

Так как классические ***d-ОС*** являются параллельными алгоритмами переработки ***d***-мерных слов в конечных алфавитах, то их весьма интересно сравнивать с хорошо известными формальными последовательными алгоритмами. Одним из путей такого типа *сравнительного* подхода является моделирование одного типа алгоритмов другими, и наоборот. В первую очередь мы представим результаты ***Т***-моделирования посредством классических ***1-ОС*** хорошо известных формальных алгоритмов переработки конечных одномерных слов в конечных алфавитах, и наоборот. Более того, использованная при моделировании оптимизационная техника позволила получить очень *близкие* к оптимимальным соотношения между основными параметрами как моделируемых, так и моделирующих алгоритмов, давая нам возможность проводить определенные сравнительные оценки такого типа алгоритмов. В качестве параллельного алгоритма в дальнейшем выбирается классическая $\mathbf{1\text{-}ОС} = \langle Z, A, \tau^{(n)}, X\rangle$, тогда как в качестве первого последовательного алгоритма – машина *Тьюринга* $MT^s{}_q$ с ***S***-алфавитом ***s***-мощности символов на ленте и ***Q***-алфавитом мощности ***q*** внутренних состояний *конечного* автомата (*устройства управления*), которая представляет собой наиболее популярную *формальную* моделью последовательных вычислений (*раздел* ***1.1; п.п. 9..11***). При этом, рассматривается машина $MT^s{}_q$ с бесконечной в обе стороны лентой, которая является модификацией стандартной машины *Тьюринга* ***(МТ)*** и полностью ей эквивалентной. С другими *эквивалентными модификациями* **МТ** можно ознакомиться, например, в [535]. В этом направлении имеет место следующий полезный для дальнейшего исследования динамики классических **ОС**-моделей результат [88,90].

<u>Теорема 96</u>. Для любой машины MT^s_q существует классическая структура 1-ОС с алфавитом А мощности a = s+q+9 и индексом соседства Неймана-Мура X = {-1,0,1}, которая 8-моделирует первую. Для любой MT^s_q существует классическая структура 1-ОС с алфавитом А мощности a=s+2q и индексом соседства Неймана-Мура, которая ее 2-моделирует. Для произвольной MT^s_q существует классическая 1-ОС с алфавитом А мощности a=s+q, а также индексом соседства X={-2,-1,0,1}, которая ее 1-моделирует. Для любой k-ленточной MT^s_q существует классическая структура 1-ОС с алфавитом внутренних состояний мощности $a=s^k(q+1)^k$, а также индексом соседства X={-1,0,1} Неймана-Мура, которая ее 1-моделирует (k ≥ 1).

Развернутое доказательство *первой* части теоремы приведено в [1], тогда как в разделе **1.1** (*пункт* **11)** приводится доказательство *второй* части теоремы. Доказательство *третьей* части теоремы **96** достаточно прозрачно и сводится к следующему. Положим, работа машины MT^s_q определяется программой, содержащей команды следующих трех типов, а именно:

$$s_k q_k \Rightarrow s`_k q`_k z_k \qquad s_k, s`_k \in S;\ q_k, q`_k \in Q;\ \ z_k \in \{-1,0,1\}\ \ (k = -\infty\ ..\ +\infty) \qquad \textbf{(48)}$$

Команды ***(48)*** имеют следующий смысл: если сканирующая головка MT^s_q считывает с ленты s_k-символ, а ее *конечный автомат* ***(КА)*** находится в q_k-состоянии, то в следующий момент времени ***t*** в сканируемую ячейку ленты записывается $s`_k$-символ, ***КА*** переходит в $q`_k$-состояние, тогда как сама сканирующая головка подвергается z_k-сдвигу на одну ячейку ленты {***-1*** – *влево*, **0** – *на месте*, **1** – *вправо*}. С учетом сказанного, текущую конфигурацию машины MT^s_q мы можем формально представить одномерным словом следующего вида, а именно:

.....	□	s_{k-n}	.....	s_{k-2}	s_{k-1}	s_k	q_k	s_{k+1}	s_{k+2}	.....	s_{k+p}	□	.....

блочное разбиение:

Данное слово содержит только одно вхождение q_k-символа и функционирование машины MT^s_q состоит в переработке слов указанного вида в слова того же самого вида; в общем случае следует различать *пустой* □-символ на ленте **МТ**, **0**-состояние «*покоя*» *классической* структуры ***d-ОС (d ≥ 1)*** и □-идентификатор бесконечных *нуль*-конфигураций; однако, в каждом конкретном случае их смысл достаточно прозрачен. Очевидно, слова указанного вида естественно погружаются в ***1-ОС*** в качестве их конфигураций.

$$\left\langle \begin{array}{l} s_{k-2}s_{k-1}s_kq_k \Rightarrow s^1_k \\ s_{k-1}s_kq_ks_{k+1} \Rightarrow q^1_k \end{array} \right\rangle \qquad z_k = 0$$

$$\left\langle \begin{array}{l} s_{k-2}s_{k-1}s_kq_k \Rightarrow q^1_k \\ s_{k-1}s_kq_ks_{k+1} \Rightarrow s^1_k \end{array} \right\rangle \qquad z_k = -1$$

$$\left\langle \begin{array}{l} s_{k-2}s_{k-1}s_kq_k \Rightarrow s^1_k \\ s_{k-1}s_kq_ks_{k+1} \Rightarrow s_{k+1} \\ s_kq_ks_{k+1}s_{k+2} \Rightarrow q^1_k \end{array} \right\rangle \qquad z_k = +1$$

Определяем классическую структуру ***1-ОС=<Z,S∪Q,τ⁽⁴⁾,X>***, где множества S и Q соответствуют рассмотренным множествам $MT^s{}_q$ и индекс соседства имеет вид ***X*** = {***-2,-1,0,1***}; более того, пустой □-символ ленты моделируемой $MT^s{}_q$ будем отождествлять с ***0***-символом «*покоя*» моделирующей структуры ***1-ОС***. Глобальная функция $\tau^{(4)}$ определяется ***ЛФП*** с параллельными подстановками указанного выше вида (*сгруппированы относительно* z_k*-значений* {***-1,0,1***} *сдвига сканирующей головки* $MT^s{}_q$). На остальных кортежах $<x_{k-2}x_{k-1}x_kx_{k+1}>$ ***ЛФП*** моделирующей структуры определяется параллельными подстановками следующего вида: $x_{k-2}x_{k-1}x_kx_{k+1} \Rightarrow x_k$ при $x_k \in S \cup Q$ $(k = -\infty\ ..\ +\infty)$. Используя параллельные подстановки, определяющие ***ЛФП*** $\sigma^{(4)}$, уже несложно убедиться, что определенная таким образом классическая ***1-ОС 1***-моделирует произвольную машину *Тьюринга* $MT^s{}_q$.

Последнее утверждение теоремы ***96*** доказывается весьма просто, используя структурированное погружение $MT^s{}_q$ (*на примере одноленточной* $MT^s{}_q$) в классическую структуру ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура вида ***X*** = {***-1,0,1***}, а именно:

.....	s_{-3}	s_{-2}	s_{-1}	s_o	s_1	s_2	s_3	.....
				q_o				

Очевидно, что мощность ***#A*** алфавита ***A*** такой ***1***-моделирующей классической ***1-ОС*** будет равна ***s(q+1)*** и обобщение на случай ***k***-ленточной $MT^s{}_q$ позволяет ***1***-моделировать ее посредством ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура и ***A***-алфивитом мощности $a=s^k(q+1)^k$ $(k\geq 1)$. При этом, уже за счет увеличения времени моделирования можно снизить мощность ***A***-алфавита *моделирующей* структуры ***1-ОС***; однако, если такой структурированный подход и не приводит к оптимальным результатам, то он достаточно удобен при необходимости получения только принципиальной возможности такого либо другого способа моделирования структурами.

Для сравнения рассмотрим вопрос моделирования произвольной $MT^s{}_q$ посредством *однородной* структуры ***ОСнР≡<Z¹,A,2,Ψ⁽²⁾,Ξ>*** *на разбиении*, определенной в разделе ***1.2***. Этот класс структур широко используется для создания различного рода физических моделей [15,150-152,165,187,273, 378,386,536] и взаимосвязь данного типа структур с однородными рассматривалась в разделе ***1.2***. Используя в качестве начальной для структуры ***ОСнР*** рассмотренную выше ***КФ*** состояния $MT^s{}_q$ (*с представленной для нее исходной блочной разметкой* Z^1*-пространства структуры*), параллельные *блочные* $\Psi^{(2)}$-подстановки моделирующей ***1-ОСнР*** на разбиении определяем в следующем виде, а именно:

$$\textit{step 1}:\begin{cases} s_kq_k \Rightarrow \overset{1}{s}_k\overset{1}{q}_k, & \textit{if } z_k=\{0\} \\ s_kq_k \Rightarrow \overset{1}{q}_k\overset{1}{s}_k, & \textit{if } z_k=\{-1\} \\ s_kq_k \Rightarrow \overset{1}{s}_k\overset{1*}{q}_k, & \textit{if } z_k=\{1\} \end{cases} \qquad q_k, \overset{1}{q}_k \in Q;\ \overset{1*}{q}_k \in Q^* \tag{49}$$

$$\textit{step 2}:\Big\{\overset{1*}{q}_k s_{k+1} \Rightarrow s_{k+1}\overset{1}{q}_k; \quad s_k, s_{k+1}, \overset{1}{s}_k \in S$$

Следовательно, на основе сделанных предположений и определения структуры ***ОСнР*** нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения, а именно.

<u>Предложение 22</u>. Произвольная машина $MT^s{}_q$ ***2-моделируется ОСнР≡<Z¹,A,2,Ψ⁽²⁾,Ξ> с #A=(s+2q) и A=S∪Q∪Q*, а также структурой ОСнР ≡ <Z¹,A,3,Ψ⁽³⁾,Ξ> с алфавитом A=S∪Q и #A=(s+q).***

Доказательство второй части утверждения оставляем читателю в качестве упражнения.

Определяя сложность MT^s_q и классической **1-ОС** как $SL_{MT}=sxq$ и $SL_{OC} = axn$ соответственно, мы получаем соответствующие значения для трех типов *моделирующих* произвольную машину MT^s_q классических **1-ОС** (*определенных теоремой* **96**) как $SL_{OC}=3(s+q+9)$, $SL_{OC}`=3(s+2q)$ и $SL_{OC}''=4(s+q)$. Тогда из минимальной на сегодня оценки сложности для $MT^s_q$, равной $SL_{MT}=28$ $(s=4,q=7)$, легко убедиться, что $SL_{OC}=60$, $SL_{OC}`=54$ и $SL_{OC}''=44$. Наряду с понятием сложности алгоритма вполне естественно определяется и понятие *сложности моделирования*, включающее как временные, так и пространственные затраты моделирующего алгоритма, т.е. ***сложность моделирования*** в случае классических ***d-ОС*** $(d\geq1)$ можно определять по формуле $SLM_{OC} = dxTxaxn$, где: d – размерность однородного пространства структуры; a и n –мощность алфавита A и размер шаблона соседства соответственно; T – время моделирования одного шага *моделируемого* алгоритма. При сделанных предположениях разница для трех представленных случаев моделирования посредством **1-ОС** становится более разительной $SLM_{OC}=1x8x3x(s+q+9)=480$, $SLM_{OC}`=1x2x3x(s+2q)=108$ и $SLM_{OC}'' = 1x1x4x(s+q)=44$. Итак, если по сложности алгоритма *наиболее* простым оказывается третий способ моделирования, то по сложности моделирования налицо полное превосходство третьего; более того, для него значения сложностей алгоритма и моделирования совпадают $SL_{OC}''\equiv SLM_{OC}''=44$. Для оценки *сложности* моделирования посредством ***ОСнР*** можно использовать такой показатель как $SLM_{OCнP} = \#Axm$, который для случая моделирования универсальной MT^s_q дает величину $SLM_{OCнP} = 2(4+2x7)=36$. Однако оценивать влияние на данный показатель Ξ-процедуры *блочной* переразметки Z^1-пространства структуры на разбиении довольно сложно.

Как следствие из теоремы **96** вытекает ряд довольно интересных результатов по *алгоритмической неразрешимости* некоторых массовых проблем, связанных с *динамикой* конечных конфигураций в классических ***ОС***-моделях [1,3,5,9]. Некоторые из этих проблем обсуждаются несколько ниже, но для этого нам потребуется ввести ряд новых понятий.

Определение 23. Конфигурация $c_o\in C(A,d,\phi)$ ***для глобальной функции перехода*** $\tau^{(n)}$ ***классической структуры d-ОС называется соответственно:***

ограниченной, если $(\exists p)(\forall k)(c_k\in<c_o>[\tau^{(n)}] \rightarrow D(c_k) \leq p)$, ***где D есть минимальный диаметр блока однородного пространства структуры, содержащего*** c_k***-конфигурацию;***

(k-m)-периодической, если $(\exists m)(\exists k)(c_o\tau^{(n)m} = c_o\tau^{(n)k})$ $(m > 0;\ k\text{-}m > 1)$; ***периодической, если имеет место соотношение*** $(\exists k > 1)(c_o\tau^{(n)k} = c_o)$, ***и пассивной при*** $k = 1$;

исчезающей, если $(\exists m)(c_o\tau^{(n)m} = \square)$, ***где*** $\square$ ***– полностью нулевая КФ структуры.***

В свете данного определения может быть сформулирован следующий весьма важный результат, который определяет решение целого ряда массовых задач *динамики* классических ***ОС***-моделей, а также представляет интерес для дальнейшего исследования данной проблематики.

Теорема 97. Проблемы определения: ограниченности, (k-m)-периодичности либо периодичности произвольной конечной КФ $c_o\in C(A,\phi)$***, существования пассивной или исчезающей конфигураций во множестве КФ*** $<c_o>[\tau^{(n)}]$ ***и рекурсивности множества*** $<c_o>[\tau^{(n)}]$ ***конечных конфигураций в общем случае алгоритмически неразрешимы.***

При доказательстве данной теоремы использовалась возможность ***Т****-моделирования универсальной* машины *Тьюринга классическими* структурами **1-ОС**, непосредственно вытекающая из результата теоремы **96**. Данный результат наряду с самостоятельным интересом может использоваться и в качестве вспомогательного аппарата (*базирующегося на* ***Т****-моделируемости*) в решении некоторых массовых задач динамики классических ***ОС***-моделей, представляющих как теоретический, так и прикладной интерес. В частности, из этого результата следует, что проблема определения типа *графа* глобальных состояний произвольной *классической* ***ОС***-модели относительно произвольной ее начальной конфигурации является алгоритмически *неразрешимой*. Аналогичные выводы мы можем сделать также относительно класса ***ОСнР***-структур на основе сформулированного выше предложения ***12.***

На основе понятия ***Т***-моделируемости достаточно детально были рассмотрены также и вопросы моделирования посредством классических ***1-ОС*** таких известных алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах, как ***TAG-*** и ***LAG***-систем, регулярных систем *Бюхи*, ***SS***-машин, *нормальных* алгоритмов *Маркова*, систем продукций *Поста* и ряда других. При получении этих результатов наряду с использованием принципа ***Т***-моделирования в определенной степени применялась и оптимизирующая техника, состоящая в использовании специальных *оптимизирующих* процедур параллельного программирования в среде *классических* структур ***1-ОС***. Это позволило получить в значительной мере оптимальные соотношения между основными параметрами *моделируемых* и *моделирующих* алгоритмов [1]. Определения используемых ниже алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах достаточно хорошо известны и с ними можно ознакомиться по книгам [1, 3,5,9,180,181], поэтому они носят скорее *схематичный* характер с целью пояснения ряда основных параметров моделируемых последовательных алгоритмов. Между тем, следует иметь ввиду, что моделирование производится на сугубо формальном уровне, рассматривая как моделируемый, так и моделирующий алгоритм в качестве некоторых формальных систем обработки конечных слов в конечных алфавитах без специального кодирования.

Пусть моделируемый формальный алгоритм имеет алфавит $C=\{c_1,c_2, ..., c_m\}$. Тогда ***TAG***-система имеет ω-число усечения и m элементарных преобразований вида: $c_k \Rightarrow b_k$ $(k=1..m)$, где b_k – слова в ***С***-алфавите; система продукций ***Поста (СПП)*** имеет тот же ***С***-алфавит и p базовых продукций вида $a_jW \Rightarrow Wb_j$ $(j=1..p)$, где a_j,b_j,W – конечные слова в ***С***-алфавите. Детальное описание машины ***SS*** можно найти в монографиях [1,5,180]. Регулярная система ***Бюхи*** имеет ***С***-алфавит и p базовых преобразований следующего вида $a_jW \Rightarrow b_jW$ $(j=1..p)$, где a_j,b_j,W – конечные слова в ***С***-алфавите. Другим естественным расширением класса ***TAG***-систем являются ***LAG***-системы, определяемые в ***С***-алфавите множеством преобразований следующего общего вида, а именно:

$$r_j = c_{j_1}c_{j_2}c_{j_3} \dots c_{j_q}; \quad r_jW \Rightarrow Wb_j \qquad (j=1..p;\ p \le m^q)$$

где b_j, W – конечные слова в ***С***-алфавите такие, что если первые q символов некоторого s^*-слова, перерабатываемого системой, совпадают с подсловом r_j, то его первый символ c_{j1} стирается и к правому концу s^*-слова добавляется b_j-подслово. Очевидно, что при $q = 1$ формальные системы ***TAG*** и ***LAG*** совпадают. С понятием нормальных алгоритмов ***Маркова*** можно ознакомиться по превосходной монографии [180], содержащей весьма детальное изложение основных элементов теории алгоритмов и рекурсивных функций. Таким образом, при сделанных предположениях имеет место следующий основной результат.

<u>Теорема 98</u>. Произвольная TAG-система слабо Т-моделируется соответствующей классической структурой 1-ОС, для которой имеют место следующие соотношения, а именно:

$$a = \omega + m + \sum_{k=1}^{m} |b_k| + 3; \quad T = |s^*| + |b_k|; \quad s^* = c_k s; \quad s^* \in C \ \ (k=1..m)$$

Произвольная СПП слабо Т-моделируется классической структурой 1-ОС, для которой:

$$a = 3\sum_{j=1}^{p} [|a_j| + |b_j|] + 3p + m + 10; \quad T = 4|a_j| + 2|s^*| + 2|b_j|; \ s^* \in C \quad (j=1..p)$$

Произвольная SS-машина слабо Т-моделируется классической 1-ОС, для которой имеют место соотношения a=2n_1+n_2+4 и T=2|s*|+2, где n_1, n_2 – число инструкций {P_o, P_1} и SD(k) SS-машины соответственно. Произвольная регулярная система Бюхи слабо Т-моделируется классической структурой 1-ОС, для которой имеют место следующие соотношения, а именно:

$$a = 3\sum_{j=1}^{p}[|a_j|+|b_j|] - 6p + m + 10;\quad T = |a_j| + max\{|a_j|, |b_j|\};\; s^* \in C \quad (j = 1..p)$$

Во всех предыдущих случаях моделирующая структура 1-ОС имеет индекс соседства X={-1,0,1} Неймана–Мура. Произвольная LAG–система слабо Т-моделируется классической структурой 1-ОС с индексом соседства X={0,1, ..., q+1}, для которой имеют место следующие соотношения:

$$a = m + \sum_{j=1}^{m}|b_j| + 3;\quad T = |s^*| + |b_j|;\quad s^* = r_j;\quad s^* \in C \;\; (j = 1..m)$$

Каждый нормальный алгоритм Маркова слабо Т-моделируется классической структурой 1-ОС с простейшим индексом соседства X_n={0,1}≡{-1,0}. При этом, следует иметь ввиду, что для всех указанных случаев моделирования s* – перерабатываемое слово для моделируемого алгоритма, а |b| – длина произвольного конечного b-слова.

В частности, из моделируемости произвольной ***SS***-машины вытекает интереснок следствие [1].

<u>Предложение 23</u>. ***Существуют классические структуры 1-ОС, множества С(А,ϕ) конечных КФ которых, переводимых в нулевую, являются креативными.***

Следовательно, существуют *классические* структуры ***1-ОС***, для которых множества конечных ***КФ***, переводимых непосредственно в *нулевые*, являются *нерекурсивными*. В этой связи возникает очень интересный вопрос о существовании *классических* ***1-ОС***, аналогичные множества конфигураций для которых являются *простыми* либо *максимальными*, и каковы значения основных параметров для такого типа классических ***ОС***-моделей.

Итак, из теоремы ***98*** следует, невзирая на использование при ее доказательстве *оптимизирующей* техники моделирования, для хорошо известных *последовательных* алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах не удается избавиться от условия *слабой моделируемости* в использовании классических ***1-ОС*** в качестве моделирующего алгоритма. При этом, как показывает детальное исследование подобных вопросов моделирования в классических структурах ***1-ОС***, эта картина объясняется в первую очередь невозможностью удовлетворительного погружения в абсолютно *параллельного* способа действия ***ОС***-модели сугубо *последовательных* алгоритмов, т.е. алгоритмов, которые по самой своей сути не допускают достаточного уровня распараллеливания обработки.

На основе ***k***-*головочных* машин *Тьюринга* (***МТ***[***k***]) рассматривается целый ряд *формальных* моделей параллельной обработки информации. Так, одна из таких моделей [12] позволяет более просто анализировать ряд ситуаций, возникающих в системах параллельной обработки информации. Модель получает интересные интерпретации в терминах *мультипроцессорных* вычислительных систем [15]. В детерминированном же случае данная модель вычислений на основе ***МТ***[***k***] легко сводится к традиционной *одноголовочной* ***МТ***, но остается вопрос изучения ускорения обработки за счет параллельной работы ***k*** сканирующих головок машины. Перед представлением оценки времени моделирования ***МТ***[***k***] посредством классической ***1-ОС*** определим собственно принцип ее функционирования. Работой сканирующих головок ***МТ***[***k***] управляет конечный автомат ***(КА)***, множество внутренних состояний которого есть ***R***. На выходной ленте для ***МТ***[***k***] записываются символы из некоторого конечного ***А***-алфавита. Функционирование ***j***-й сканирующей головки ***МТ***[***k***] определяется программой, содержащей команды следующего вида, а именно:

$$a_j r_j \;\Rightarrow\; a_j^* r_j^* Z_p^j;\;\; a_j, a_j^* \in A;\;\; r_j, r_j^* \in R \quad (j = 1..k;\, p \in \{-1,0,1\}) \qquad (50)$$

где zj_p **–** сдвиг ***j***-й головки ***MT***[***k***] влево ***(p=-1)***, вправо ***(p=1)***, остается на месте ***(p=0)***. Тогда общее состояние ***KA*** определяется на каждом шаге ***MT***[***k***] некоторой функцией от *трех* обобщенных переменных **–** ***r=r(KГ,KR,KZ)***, где: ***KГ*** **–** конфигурация всех *сканирующих* головок машины ***MT***[***k***]; ***KR*** **–** конфигурация предложений от головок на смену состояния ***KA; KZ*** **–** конфигурация всех сдвигов сканирующих головок. В качестве моделирующего алгоритма выбирается классическая структура ***1-ОС*** с индексом соседства *Неймана-Мура* ***X***={***-1,0,1***}. При сделанных предположениях имеет место следующий основной результат [5,53,88].

<u>Теорема 99</u>. MT[k] с программой работы (50) длины в L команд моделируется класической 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура за не более, чем t = 0.5{[L/2]2+2(2p+1)*[L/2]-4p} (p ≥ k) шагов структуры, где p – начальное расстояние между крайними сканирующими головками машины Тьюринга с k сканирующими головками.

При доказательстве теоремы ***99*** использовался специальный прием *структурирования* состояний единичного автомата моделирующей *классической* ***1-ОС***, суть которого иллюстрировалась выше и который может оказаться достаточно полезным при исследовании вопросов моделирования в структурах ***d-ОС*** различных процессов, феноменов и объектов. Из теоремы, например, следует, что классическая структура ***1-ОС*** моделирует ***MT***[***k***] с замедлением асимптотически не худшим, чем ***t1*** ≈ [***L/8***]***+p/2*** при достаточно больших значениях ***L***, тогда как *замедление* при моделировании ***L*** шагов классической структуры ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура посредством ***MT***[***k***] асимптотически не превышает уже величины ***t2*** ≈ [***L/k***] при достаточно больших значениях ***L*** и ограниченных начальных конфигурациях на входных лентах машины. Это позволяет получить достаточно интересное асимптотическое соотношение, а именно: ***t1/t2 ≈ k/8***.

Моделирование на основе классических ***d-ОС*** тесно связано с проблемой степени общности того либо иного понятия структуры, обсуждение которой было начато в разделе ***1.2***. В монографиях [3,5] и других наших работах исследовался вопрос степени общности понятия классических ***ОС***-моделей и основным методом данного исследования являлся и является именно *модельный*. Здесь мы продолжим обсуждение этого вопроса относительно одного весьма интересного обобщения ***ПО***-преобразований, введенных и исследованных ***В.М. Глушковым*** и его учениками, на случай однородных синхронных параллельных процессов. В качестве данного обобщения ***Г.Е. Цейтлин*** предложил *однородные периодически определенные преобразования* ***(ОПОП)***, суть которых сводится к следующему [227,324,406].

Пусть ***R*** **–** двухсторонний бесконечный абстрактный регистр, разделенный на отрезки, которые содержат по ***r*** единичных элементов *(разрядов)* каждый. Тогда формальный объект ***ОПОП***

$$\Theta_s^R = \begin{bmatrix} f_1^{t_1}, & f_2^{t_2}, & \ldots\ldots & , f_r^{t_r} \\ k_1, & k_2, & \ldots\ldots & , k_r \end{bmatrix}$$

определяется функцией сдвига ***s(q)=r*q+k*** *(mod r)* и системой порождающих функций $\{f^t_j \mid j=1..r\}$, где t_j **–** арность f^t_j-функции, соответствующая интегральным коэффициентам k_j ***(j=1..r)***. Тогда Результат применения ***ОПОП*** к произвольному ***W**** $(W_q \mid -\infty < q < +\infty)$ состоянию ***R***-регистра есть новое состояние $b^*=\Theta^R{}_s(W^*)$ такое, что $b^*=(b_q \mid -\infty < q < +\infty)$, где состояния единичных элементов ***q***-го отрезка абстрактного ***R***-регистра вычисляются по следующим общим формулам, а именно:

$$b_{s(q)+p-1} = f_p^{t_p}(a_{s(q)+k_p}, a_{s(q)+k_p+1}, \ldots, a_{s(q)+k_p+t_p-1}) \quad (p = 1 \,..\, r)$$

Неформально говоря, функция сдвига ***s(q)*** определяет периодичность распределения отрезков на абстрактном ***R***-регистре, а упорядоченная система порождающих функций с относящимися к ним коэффициентами определяет изменения состояний элементов ***q***-го отрезка ***R***-регистра. В этом контексте понятие ***ОПОП*** нетрудно обобщается и на случай высших размерностей. Данная формальная модель оказывается весьма полезной при рассмотрении целого ряда классических задач *параллельного* программирования, таких как *конвейерная* трансляция, «*писатели-читатели*», проблема стрелка и др. Так, ***Г.Е. Цейтлин*** показал, что на такой модели *параллельной* обработки можно сортировать строку из ***n*** символов за не более, чем ***n*** шагов; ранее аналогичный результат для случая *классических* структур ***1-ОС*** был получен нами в работе [37] на основе иного подхода. Данный результат носит не только теоретический характер, но имеет приложения и в условиях использования параллельных процессоров [57]. Оказывается, что такой ***d***-мерный абстрактный ***R***-регистр с определенными на нем ***ОПОП*** моделируется классической структурой ***d-ОС (d ≥ 1)*** при вполне умеренных допущениях [5,53].

<u>Теорема 100</u>. Каждое однородное периодически определенное преобразование, определенное в A-алфавите и на d-мерном абстрактном R-регистре, 1-моделируется классической структурой d-ОС (d ≥ 1) с алфавитом внутренних состояний $A\cup\{b\}$ ***(b ∉ A).***

Приведенный результат еще раз подтверждает весьма значительную степень общности понятия классических ***ОС***-моделей и важность использования его, в частности, для задач параллельного программирования, что уже находит свое отражение и в развиваемой концепции параллельного микропрограммирования [9,71,162,586]. Действительно, устанавливая эквивалентность понятий ***ОС***-модели и ***ОПОП*** на абстрактных ***R***-регистрах, можно распространять результаты, методы и подходы довольно развитой ***ТОС*** также на исследование теоретических вопросов параллельного программирования, изучаемых средствами абстрактных *однородных периодически* определенных преобразований. С рядом других интересных примеров *моделирования* формальных алгоритмов посредством классических структур ***d-ОС (d ≥ 1)*** можно ознакомиться в работах [1,3,5,8,9,53-56,88, 90,131-135,184-187,190,240,255,308,325,360,536,567].

Нетрудно убедиться, каждая классическая структура ***1-ОС*** с ***A***-алфавитом и индексом соседства $X=\{0,1,...,n-1\}$ ***T***-*моделируется* структурой той же размерности со следующими характеристиками (***A****-*алфавит и* ***X****-*индекс соседства моделирующей структуры*), а именно:

$$\#A^* = \sum_{j=0}^{T-1} a^{k^j},\ X^* = \{0,1,2,...,k-1\};\ T = \left[\frac{n-k}{k-1}\right] + Sg\left(\frac{n-k}{k-1} - \left[\frac{n-k}{k-1}\right]\right) + 1;\ n>k$$

где ***#A*** – мощность ***A***-множества и ***Sg(x)*** – функция знака. Данный результат позволяет довольно просто обобщить теоремы ***98, 99*** на случай использования в качестве моделирующего алгоритма классической структуры ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства $X_n = \{0,1\} \equiv \{-1,0\}$.

В свете представленной проблематики весьма интересно рассмотреть также и обратную задачу моделирования *классических* ***1-ОС*** посредством вышеупомянутых алгоритмов переработки слов. Прежде всего, рассмотрим *биологически* мотивированные алгоритмы, которым в последнее время уделяется особое внимание в теоретических биологических науках. В свете изучения *процессовых* математических теорий, *изоморфных* некоторым биологическим *развивающимся* системам, весьма актуальным представляется нам принцип биологического эпиморфизма, сводящийся к вопросу о возможности отображения одного алгоритма, определяемого некоторым процессом развития, на другой. В этом случае мы можем говорить об *эпиморфизме* либо *изоморфизме* двух алгоритмов. Например, по целому ряду биологических соображений, связанных с исследованием *процессовых* математических теорий для моделирования *биологии развития*, нами определены и исследованы так называемые ***A-алгоритмы*** [31], формулируемые следующим образом.

Пусть ***G*** есть некоторый конечный непустой алфавит и P_j, Q_j ***(j=1..k)*** – конечные слова (*возможно пустые*) в ***G***-алфавите, а символы (⇒) и (*) не принадлежат ***G***-алфавиту. Тогда ***A-алгоритм*** есть некоторое конечное множество продукций следующего вида, а именно:

$$P_j \Rightarrow Q_j; \quad P_k \Rightarrow *Q_k \qquad (j = 1 \,..\, k\text{-}1) \tag{51}$$

которое называется *схемой* алгоритма, где $P \Rightarrow (*)\ Q$ обозначает *любую* из продукций вида $P \Rightarrow Q$ (*простая*) или $P \Rightarrow *\ Q$ (*заключительная*). Само функционирование A-алгоритма с данной схемой состоит в следующем. Пусть S_o есть произвольное конечное слово, определенное в G-алфавите. Тогда на первом шаге алгоритма $S_1=A(S_o)$ первое вхождение подслова P_1 в S_o заменяется на Q_1-подслово. Затем такой процесс повторяется над словом S_1 и так далее, завершаясь на некотором слове S_v, не содержащем вхождений подслова P_1. Тогда к слову S_v применяется описанная выше процедура, но уже относительно вхождений подслова P_2 и так далее. Обработка алгоритмом A слова S_o завершается на некотором f-шаге тогда и только тогда, если слово S_f не будет содержать вхождений подслов P_j $(j = 1..k\text{-}1)$ либо слово S_{f-1} содержит вхождение подслова P_k. В этом случае слово $S_f=A(S_o)$ называется результатом *переработки* (*вычисления*) слова S_o посредством алгоритма A с определенной выше схемой **(51)**. В противном случае полагается, что заданный алгоритм A неприменим к S_o-слову. Относительно A-алгоритмов показано, что они *эпиморфны классическим* структурам ***1-ОС*** и имеют весьма интересные биологические интерпретации [5,31,46].

Используя приведенные выше определения и обозначения, а также определение системы полу-*Туэ* [180], мы можем сформулировать основной результат по моделированию классических ***1-ОС*** посредством упомянутых последовательных алгоритмов переработки слов [1,3,5,8,9,88].

<u>Теорема 101</u>. Произвольная классическая структура 1-ОС слабо Т-моделируется системой LAG, для которой имеют место следующие определяющие характеристики, а именно:

$$C = A \bigcup \{\nabla\}; \quad q = n; \quad p = 2*\sum_{j=1}^{n} a^j - a^n; \quad T = |s^*| + n - 1$$

Произвольная классическая 1-ОС с индексом соседства X = {0,1} слабо Т-моделируется СПП, для которой имеет место #C=3a+5, T=[(3L+10)/2] и L=|s*|. Произвольная классическая структура 1-ОС с индексом соседства X={0,1} слабо Т-моделируется нормальными алгоритмами Маркова, для которых имеет место #C=2a+5 и T=3|s*|+2. Произвольная классическая структура 1-ОС с индексом соседства X={0,1,2,3,...,n-1} слабо Т-моделируется посредством $MT^s{}_q$ ***при*** $T = |s^*|+n\text{-}1$. ***Произвольная классическая структура 1-ОС с простейшим индексом соседства*** $X_n = \{0,1\}$ ***слабо Т-моделируется А-алгоритмом, определенным в алфавите*** $G=A\cup\{b, \nabla\}$ $(\nabla, b\notin A)$***. Произвольная классическая структура 1-ОС с простейшим индексом соседства X={0,1} слабо Т-моделируется машиной*** $MT^s{}_q$***, для которой имеет место*** $s = (a+1)$, $q = 2(a+1)$, $sxq = 2(a+1)^2$ ***и*** $T = |s^*|+1$.

Обозначения теоремы ***101*** *полностью* соответствуют обозначениям теоремы ***98***, однако в качестве моделируемой понимается классическая структура ***1-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2,...,a\text{-}1\}$. При этом, использованная нами при решении данных задач оптимизирующая техника ***Т***-моделирования позволила получить в значительной степени оптимальные соотношения между рядом основных параметров *моделируемых* и *моделирующих* алгоритмов, что дает *веские* основания констатировать тот факт, что (*за исключением машин Тьюринга*) не удается сузить рамки слабой ***Т****-моделируемости* до рамок ***Т****-моделируемости*, что объясняется принципиальной сложностью погружения сугубо последовательных (*по своей сути не допускающих достаточной степени распараллеливания процессов переработки слов*) алгоритмов в высоко параллельную вычислительную среду, каковой являются вычислительные ***ОС***-модели.

В качестве примера проиллюстрируем в общих чертах доказательство последнего утверждения теоремы ***101***. Программа моделирующей $MT^s{}_q$ весьма проста и реализует следующий алгоритм. Начальная конфигурация $MT^s{}_q$ представляется в следующем виде, а именно:

$$\ldots \#\#\#c_1c_2c_3 \ldots c_j \ldots c_m\#\#\# \ldots \quad c_j \in A\ (j=1\ ..\ m) \qquad (52)$$
$$\blacktriangle\gamma$$

где c=□$c_1c_2c_3 \ldots c_m$□ – начальная ***КФ*** моделируемой ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства X_n = {*-1, 0*}; головка машины сканирует ближайший к левому краю ***c***-конфигурации ***#***-символ, тогда как конечный автомат ***(КА)*** машины находится в начальном γ-состоянии. В течение следующих не более |***c***| шагов $MT^s{}_q$ перемещает сканирующую головку к правому концу ***c***-конфигурации, по пути изменяя c_j-состояния ячеек ленты в соответствии с ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}(c_{k-1},c_k)=c`_k$ моделируемой *классической* структуры ***1-ОС***. После обработки состояния «*конец* ***c-КФ***» машина $MT^s{}_q$ переходит в конфигурацию следующего общего вида, а именно:

$$\ldots \#\#\#c`_1c`_2c`_3 \ldots c`_j \ldots c`_mc`_{m+1}\#\#\# \ldots \quad c`_j \in A\ \{j=1\ ..\ (m+1)\} \qquad (53)$$
$$\blacktriangle\beta$$

в ***A***-алфавите совпадающую с ***c`-КФ*** такой, что $c`=c\tau^{(2)}$ {$\tau^{(2)}$ – ***ГФП*** моделируемой ***1-ОС***}. Таким образом, состояния {γ, β} ***КА*** являются сигнализирующими, определяя те конфигурации $MT^s{}_q$, чья последовательность в ***A***-алфавите совпадает с последовательностью <***c***>[$\tau^{(2)}$] конфигураций, генерируемой моделируемой ***1-ОС***. Затем, $MT^s{}_q$ производит сканирование ***КФ (53)*** в обратном направлении, по пути изменяя $c`_j$-состояния ячеек выходной ленты в соответствии с ***ЛФП 1-ОС*** $\sigma^{(2)}(c`_k, c`_{k+1}) = c``_{k+1}$. При этом, уже несложно убедиться, что две классические структуры ***1-ОС*** с индексами соседства ***X1***={*-1,0*} и ***X2***={*0,1*}, и идентичными параллельными подстановками вида $xy \Rightarrow y`$ и $xy \Rightarrow x` \equiv y`$ соответственно эквивалентны. В результате обратного хода сканирующей головки машина $MT^s{}_q$ формирует на выходной ленте конфигурацию, которая представляет в ***A***-алфавите конфигурацию ***c``*** такую, что имеет место $c``=c`\tau^{(2)}$. Затем вышеописанный процесс повторяется, моделируя в ***A***-алфавите динамику искомой классической ***1-ОС***. Формально такой процесс обеспечивается следующей простой программой $MT^s{}_q$, а именно:

$$\boxed{\begin{array}{l}
\#\gamma \Rightarrow \#\gamma^0\{\rightarrow\}; \quad c_k\gamma^{c_{k-1}} \Rightarrow c'_k\gamma^{c_k}\{\rightarrow\}; \quad \#\beta \Rightarrow \#\beta^0\{\leftarrow\}; \quad c'_k\beta^{c'k+1} \Rightarrow c''_{k+1}\beta^{c'k}\{\leftarrow\} \\
\#\gamma^{cm} \Rightarrow \#\beta\{\uparrow\}\ \ for\ \ (c_m0 \Rightarrow c'_{m+1}=0); \quad \#\gamma^{cm} \Rightarrow c'_{m+1}\beta\{\rightarrow\}\ \ for\ \ (c_m0 \Rightarrow c'_{m+1} \neq 0) \\
\quad \#\beta^{c'1} \Rightarrow \#\gamma\{\uparrow\}\ \ for\ \ (0c'_1 \Rightarrow c''_0=0); \quad \#\beta^{c'1} \Rightarrow c''_0\gamma\{\leftarrow\}\ \ for\ \ (0c'_1 \Rightarrow c''_0 \neq 0) \\
\gamma,\beta,\gamma^{ct},\beta^{c't},\gamma^0,\beta^0 \in Q;\ c_t, c'_p, c''_h \in A;\ t=\{k-1,k,m\},\ p=\{1,k,k+1,m+1\},\ h=\{0,k+1\}
\end{array}}$$

Команды $bq \Rightarrow b`q`\{\leftarrow|\uparrow|\rightarrow\}$ моделирующей $MT^s{}_q$ имеют следующий смысл: если в настоящий момент на выходной ленте сканируется ячейка с ***b***-символом и ***КА*** находится в ***q***-состоянии, то в следующий момент ***b***-символ заменяется на ***b`***-символ (*возможно* ***b≡b`***), ***КА*** переходит в состояние ***q`*** (*возможно* ***q≡q`***) и сканирующая головка подвергается сдвигу {←(*влево*)|↑(*на месте*)|→(*вправо*)}. С учетом сказанного приведенная программа работы моделирующей машины $MT^s{}_q$ достаточно прозрачна и особых пояснений не требует. Из ее анализа уже несложно убедиться, что алфавит символов на выходной ленте есть $S = A \cup \{\#\}\ (\# \notin A)$, а множество внутренних состояний ***КА*** есть $Q=Q1=\{\gamma, \gamma^p | p \in A\} \cup Q2=\{\beta, \beta^p | p \in A\}$, т.е. $\#S=s=(a+1)$, $\#Q=q=2(a+1)$ и $Sxq=2(a+1)^2$. Тогда как время моделирования одного шага структуры ***1-ОС*** определяется как $T = |s^*|+1$. С учетом сказанного уже несложно завершить доказательство последнего утверждения теоремы ***101***.

Исключительная ситуация при моделировании *машин Тьюринга* ***(МТ)*** посредством классических ***1-ОС*** объясняется спецификой переработки слов ***МТ*** относительно других рассмотренных выше последовательных алгоритмов. А именно, если ***МТ*** завершает очередной шаг переработки слова путем *локальной* операции, весьма легко реализуемой ***T**-моделирующей* ее **1-ОС,** тогда как в случае других алгоритмов в общем случае необходим просмотр всего перерабатываемого слова с целью определения результата его переработки за один шаг алгоритма. Таким образом, машины $MT^s{}_q$, являясь строго *последовательными* алгоритмами, вместе с тем, подобно **ОС**-моделям исповедуют сугубо *локальный* характер действия *(близкодействия).* Наряду с этим, представленные результаты взаимного моделирования в некоторой степени могут характеризовать *относительную сложность* соответствующих алгоритмов (*а вместе с тем, последовательного и параллельного способов обработки информации)* в рамках используемых понятий ***T**-моделируемости* и ***ОС**-концепции* в целом.

Наряду с отмеченным, из приведенных выше результатов моделирования можно получить ряд весьма интересных следствий, прежде всего, теоретического характера. В частности, результаты ***Т. Уаку*** [224] и наши по **T**-моделированию **SS**-машин посредством классических структур **1-ОС** (теорема ***98)*** позволили получить следующий достаточно важный результат, решающий одну из массовых задач динамики классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$, связанную с так называемыми *исчезающими* конечными конфигурациями ***(ИсКФ;*** определение ***8)*** [1,3,5,8,9,88].

<u>Теорема 102</u>. Для произвольных классической d-ОС $(d \geq 1)$ ***и конечной конфигурации*** $c^{**} \in C(A,d,\phi)$ ***проблема определения того, будет ли данная конечная конфигурация*** c^{**} ***исчезающей, в общем случае алгоритмически неразрешима.***

Более того, ***Т. Уаку*** [224] на основе специальной техники погружения в классические **ОС**-модели доказал *алгоритмическую неразрешимость* проблемы существования для произвольной ***d-ОС*** $(d>1)$ *исчезающих* **КФ.** Однако, для случая классических структур **1-ОС** эта проблема алгоритмически разрешима, что легко следует из теоремы **23,** которая сохраняет силу также и для ***пассивных КФ,*** т.е. таких **КФ** $c \in C(A,d,\phi)$, для которых выполняется соотношение $c\tau^{(n)} \equiv c$. Наряду с рядом других следствий [5] данный результат подтверждает *неэквивалентность классических* **1-ОС** и ***d-ОС*** $(d>1)$ также относительно проблем разрешимости, подчеркивая наличие довольно резко выраженной дифференцировки всего множества классических **ОС**-моделей по их размерности $(d = 1$ *и* $d \geq 2)$.

В главе **3** обсуждалась проблема сложности конечных **КФ** относительно **ОС**-аксиоматики. Так, в частности, нами проводился *сравнительный* анализ подходов к определению понятий сложности конечных объектов-*конфигураций* по *Колмогорову* {***K(X)**-сложность*} на основе возможностей $MT^s{}_q$ и нашего {***A(X)**-сложность*} на основе **ОС**-моделей. Так, согласно подхода *Колмогорова* существует $MT^s{}_q$ с $S = \{0,1,\square\}$ (□ – *пустой символ),* которая, начав работать с пустой лентой, последовательно генерирует на ленте все *бинарные* представления чисел натурального ряда, т.е. **G**-множество всех конечных бинарных слов относительно подхода *Колмогорова* содержит слова только *ограниченной* сложности. Тогда как относительно нашего подхода такое **G**-множество содержит *бинарные* слова сколь угодно большой сложности. Суть данного различия обсуждалась в главе **3.** Вместе с тем, за счет *увеличения* мощности алфавита внутренних состояний структуры и, возможно, размера ***ШС*** можно определить структуру **1-ОС,** генерирующую в B^*-алфавите множество **КФ,** совпадающее в **B**-алфавите с множеством $C(B,\phi)$ всех конечных бинарных конфигураций.

Прежде всего, определяем $MT^s{}_q$ при $S=B\cup\{\square$ – *пустой символ*$\}$ и $Q=\{q_k \mid k=1 \,..\, 3\}$; данная машина *Тьюринга* начинает работу с пустой лентой, находясь в начальном q_1-состоянии. Дальнейшее ее функционирование определяется следующей простой программой, а именно:

$$\square q_1 \Rightarrow 1q_2[0] \qquad 1q_2 \Rightarrow 0q_2[-1] \qquad 0q_2 \Rightarrow 1q_3[1]$$
$$\square q_2 \Rightarrow 1q_3[1] \qquad \{0|1\}q_3 \Rightarrow \{0|1\}q_3[1] \qquad \square q_3 \Rightarrow \square q_2[-1]$$

где команды программы полностью соответствуют формату команд ***(5)*** $MT^s{}_q$ (раздел **1.1).** Путем несложной проверки нетрудно убедиться, что определенная таким образом машина $MT^s{}_q$ будет последовательно генерировать на выходной ленте бинарные представления чисел натурального ряда, реализуя алгоритм сложения по ***(mod 2).*** Но тогда согласно теореме ***96*** существуют ***1-ОС*** с индексами соседства $X_1 = \{-1,0,1\}$, $X_2 = \{-2,-1,0,1,2\}$ и алфавитами $A_1 = S \cup Q \cup \{V_k \mid k=1 \,..\, 9\}$, $A_2 = S \cup Q$ внутренних состояний, соответственно ***8-*** и ***1-***моделирующие данную $MT^s{}_q$ и генерирующие в бинарном ***B-***алфавите множество $C(B, \phi)$ всех конечных бинарных ***КФ.*** Этот результат является хорошей иллюстрацией к обоснованию различий между понятиями ***K(X)-*** и ***A(X)-сложности КФ.*** Вообще говоря, можно показать, что для обеспечения возможности генерации *классической* ***1-ОС*** всех конечных бинарных слов на основе рассмотренного выше алгоритма можно ограничиться алфавитом $B^*=B\cup\{\psi\}$ $(\psi \notin B)$ структуры, однако в этом случае весьма существенно увеличивается размер шаблона соседства генерирующей структуры.

Между тем, всесте с вопросами *моделирования* известных алгоритмов переработки слов в *конечных* алфавитах существенное внимание уделяется и вопросам моделирования одной классической структуры ***d-ОС*** другой структурой с удовлетворением определенных условий, к рассмотрению которых мы и приступаем в следующем разделе.

6.3. Моделирование классических однородных структур структурами из того же класса формальных объектов

К настоящему времени в рамках рассматриваемой проблематики наибольшее количество работ посвящено именно моделированию одной классической ***d-ОС*** другой структурой того же типа при различных заданных условиях. Данная проблема представляет *значительный* теоретический и прикладной интерес, так как результаты исследований в этом направлении вполне позволяют проводить различного типа стандартизации всех либо отдельных классов ***ОС-***моделей, успешно решать различные оптимизационные задачи, моделировать классические ***d-ОС*** с *подавлением* тех либо иных свойств исходных структур и так далее. Особый интерес с прикладной точки зрения, диктуемый со стороны вычислительных наук и целого ряда других приложений, представляет в данном контексте задача моделирования классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ бинарными структурами той же размерности. В общем случае эта задача может быть сформулирована следующим образом:

Для произвольной классической d-ОС (d ≥ 1) с А-алфавитом внутренних состояний и шаблоном соседства (ШС), содержащемся в минимальном d-мерном гиперпараллелепипеде $n_1 x n_2 x n_3 x \,...\, x n_d$***, построить моделирующую ее бинарную структуру d-ОС с возможно меньшим размером ШС.***

Как правило, задачи *оптимизационного* характера во всех областях относятся к разряду довольно сложных. Не составляет исключения и данная задача, поэтому для ее решения был использован несколько иной метод исследования [5,8,9,53-56,88,90].

Из-за влияния размерности структур на технику *оптимизирующего* моделирования было решено рассматривать сформулированную выше задачу отдельно для случаев *классических* ***1-ОС*** и ***d-ОС (d>1).*** Выше уже отмечалась неэквивалентность структур ***1-ОС*** и ***d-ОС (d > 1)*** относительно ряда феноменов; ряд аспектов обсуждения данного вопроса представлен выше. Это же относится и к проблеме моделирования в классическихструктурах ***d-ОС.*** Ниже мы действительно убедимся в том, что увеличение размерности позволяет уменьшать размеры ***ШС*** моделирующей ***d-ОС*** при прочих равных условиях. В более ранних наших работах наряду с многочисленными работами ряда других исследователей по проблеме моделирования в *классических* ***d-ОС*** не использовалось влияние размерности структуры на параметры *моделирующих* структур и техника *моделирования* априори исходила из их эквивалентности в контексте возможностей моделирования основных процессов и алгоритмов как посредством ***1-ОС,*** так и посредством ***d-ОС (d>1).*** Позднее данному моменту было уделено особое внимание, почему и методика моделирования стала выбираться в зависимости от влияния на *оптимизирующий* фактор *размерности* классической ***d-ОС.*** Принимая во внимание вышесказанное и используя ряд интуитивных соображений, была определена [5,9] специальная *оптимизирующая* техника моделирования классических структур ***d-ОС*** бинарными структурами, учитывающая влияние на данный процесс *размерности* моделируемой структуры. Предложенный подход позволил получить следующий основной результат.

<u>Теорема 103</u>. Произвольная классическая d-ОС (d≥2) 1-моделируется бинарной структурой той же самой размерности и с шаблоном соседства следующего размера, а именно:

$$L=(L_1)^{d-1}(L_d+1)\prod_1^d(p_k+1);\quad L_1=[V=\sqrt[d]{\log_2(a-1)+2}];\quad L_d=L_1+[2(V-L_1)]$$

где $p_1 x p_2 x \ldots x p_d$ есть размер минимального d-мерного гиперпараллелепипеда, содержащего ШС моделируемой d-ОС (d ≥ 2), при условии выполнения следующего определяющего соотношения для параметров моделирующей структуры, а именно: $\log_2 \log_2 4(a-1) \ge d$.

Следовательно, ребро ***d***-мерного ***ШС*** моделирующей бинарной ***d-ОС (d≥2)*** с ростом *размерности* уменьшается асимптотически в $\sqrt[d]{\log_2(a-1)+2}$ раз при выполнения *определяющего* соотношения, указанного в теореме ***103.*** На данном результате прервем обсуждение вопросов моделирования структур ***d-ОС (d>1)*** и несколько детальнее обсудим ***1***-мерный случай, для которого предложена оптимальная техника, максимально учитывающая *специфику* функционирования классических структур ***1-ОС*** [3,5,9,54]. Данная техника базируется на принципе максимального приближения характеристик *моделирующих* структур ***1-ОС*** к соответствующим характеристикам *потенциально* оптимальных моделирующих структур. При этом, под *потенциально оптимальными* понимаются такие моделирующие ***d-ОС,*** значения основных параметров которых могут быть и совершенно недостижимыми, но способными служить хорошим ориентиром для перспективы исследований в данном направлении и для оценки значений параметров ранее определенных моделирующих структур. Для *классических* структур ***1-ОС*** *потенциально* оптимальной полагается моделирующая ее бинарная структура ***1-ОС*** с ***ШС*** размера $L_{opt} = (n+1)[\log_2 a]+2$, которая, к тому же, является и недостижимой. В свете данной оценки возникает задача получения наиболее близкой к данной *потенциально* оптимальной классической ***1-ОС*** реально моделирующей структуры той же самой размерности.

Исследования в данном направлении позволили определить моделирующую бинарную ***1-ОС*** с ***ШС*** размера $L=(n+1)[\log_2 a+1+\omega]+2$, где $0<\omega<1$. Для получения оценки степени близости данной моделирующей бинарной ***1-ОС*** к потенциально оптимальной структуре можно воспользоваться следующим очевидным соотношением, а именно:

$$\frac{L}{L_{opt}}=\frac{(n+1)*[\log_2 a]+(n+1)*[1+\varpi]+2}{(n+1)*[\log_2 a]}=1+\frac{1+\varpi}{\log_2 a}+\frac{2}{(n+1)*[\log_2 a]};\quad (0<\varpi<1)$$

из которого нетрудно сделать вывод о вполне удовлетворительной близости полученной нами моделирующей структуры к своего рода *эталонной* структуре даже при умеренных размерах ***А***-алфавита внутренних состояний и ***ШС*** моделируемой классической ***1-ОС.*** При этом, величина ω зависит от ряда условий и, как показывают оценки, полученные на ЭВМ, при $a \le 2^{19}$ величина ω не превышает единицы, поэтому в вычислениях можно вполне принимать значение ***ω=1.*** Для практических же целей это достаточно приемлемый подход, так как уже такое число состояний единичного автомата моделируемой классической ***1-ОС*** практически необозримо. В общем же случае величина ω не превышает двух. С учетом вышесказанного может быть сформулирован следующий основной результат для произвольных классических структур ***d-ОС*** [5,53,54,88].

<u>Теорема 104</u>. Любая классическая структура d-ОС (d≥1) с алфавитом внутренних состояний A={0,1,2, ..., a-1} единичного автомата и с шаблоном соседства, содержащимся в минимальном

d-мерном гиперпараллелепипеде p_1xp_2x ... xp_d, 1-моделируется бинарной структурой d-ОС с ШС размера L=[$(p_1+1)(log_2\ a + p_1+\beta)$]$xp_2xp_3x$ ... xp_d, где **β = 4** ***при a ≤*** 2^{19} ***и*** **β = 5*, в противном случае.***

Метод доказательства данной теоремы позволяет вполне эффективно моделировать *классические* структуры ***1-ОС***, которые имеют большие алфавиты ***A*** внутренних состояний и небольшие ***ШС***, бинарными классическими ***1-ОС*** с весьма приемлемыми размерами ***ШС.*** Проиллюстрируем это *одним* интересным примером, имеющим важное самостоятельное значение. Будем говорить, что классическая ***d-ОС*** является *универсальной* (*либо обладает универсальной вычислимостью*), если она ***Т-моделирует*** универсальную машину Тьюринга ***(УМТ).*** Такие структуры обладают свойством *универсальной* вычислимости и играют важную роль при исследованиях *классических* ***d-ОС (d≥1)*** в качестве формальной модели *параллельных* вычислений. Определять *универсальную вычислимость* в ***ОС***-моделях можно и другими эквивалентными способами, о которых речь будет идти ниже.

В связи с определением понятия универсальной вычислимости однородных структур на основе понятия ***Т***-моделируемости возникает важный вопрос о минимальной сложности классической структуры ***1-ОС***, ***Т****-моделирующей* ***УМТ***, или в более общей постановке о наиболее простой ***1-ОС***, обладающей свойством универсальной вычислимости. В качестве меры сложности *универсальной* ***d-ОС*** вполне естественно использовать величину произведения ***dxaxn***, в котором ***3*** сомножителя определяют значения основных параметров такой структуры, а именно: размерность, мощность ***А***-алфавита внутренних состояний и размер ***ШС.*** По нашему мнению, получение *универсальной* классической ***d-ОС*** с минимальным произведением ***dxaxn*** представляет собой не менее сложную задачу, чем получение универсальной MT^s_q с минимальным произведением ***sxq***, составляющим на сегодня величину ***sxq=28.*** Хотя с формальной точки зрения эта задача и не является такой уж актуальной научной проблемой [54-56,536].

Для *классических* структур ***1-ОС*** наилучший результат в данном направлении был получен ***А.Р. Смитом*** [131], доказавшим существование *универсальных* структур со следующими значениями произведения ***axn: 2x40, 3x18, 6x7, 8x5, 9x4, 12x3*** и ***14x2.*** Здесь интересно отметить существование универсальной классической ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства X_n = {***0,1***}. Таким образом, была получена универсальная классическая ***1-ОС*** со значением произведения ***axn = 28***, которое совпадает с известным наилучшим на сегодня *минимальным* значением произведения ***sxq=28*** для *универсальной* машины MT^s_q. Наилучший результат аналогичного типа для случая *универсальных* классических структур ***2-ОС*** получен ***Э. Бэнксом*** [132], доказавшим существование *универсальных* структур со значением произведения ***dxaxn=2x2x5*** при использовании *бесконечной* начальной ***КФ*** моделирующей структуры и ***dxaxn=2x3x5***, в противном случае. Результаты ***А. Смита*** и ***Э. Бэнкса*** позволили, кроме всего прочего, сделать ряд интересных выводов о влиянии размерности ***d-ОС*** и типа используемых начальных ***КФ*** на результаты моделирования в классических одномерных структурах. Ряд аналогичных результатов в данном направлении несколько позднее получили ***А.С. Подколзин*** и др. [158,199,200,281,536,589]. Например, ***А.С. Подколзиным*** было доказано [590] существование универсальных структур ***2-ОС*** с определяющими параметрами ***dxaxn=2x2x9=36*** и ***dxaxn=2x3x5=30.*** При этом, сам принцип доказательство базируется на погружении в структуры логических схем, составленных из специального типа единичных автоматов, которые реализуют функции дизъюнкции, триггера и др. Интерфейс между ними для построения универсальных схем осуществляется посредством испускаемых ими специальных сигналов-конфигураций. Этот подход погружения в однородную среду отдельных компонент с поддержкой их *взаимодействия* для реализации сложной системы того либо иного назначения является наиболее естественным и конструктивным, используя программирование локальных функций перехода $\sigma^{(n)}$ структуры. Доказано, что: ***Проблема распознавания в классе структур d-ОС (d ≥ 2) с заданным алфавитом А=***{***0,1,2, ..., а-1***} ***(а ≥ 2) универсальной d-ОС алгоритмически неразрешима.*** Более того, на основе реализации в ***2-ОС*** базовых логических функций [409] доказана универсальность *бинарных* ***2-ОС*** с простыми ***ШС;*** показано, что игра «*Жизнь*» эквивалентна *универсальной* машине *Тьюринга* [429], что обусловлено возможностью определения в ней процессов, эквивалентных универсальным вычислениям. Исходя из определения классической игры «*Жизнь*», приходим к существованию универсальных ***2-ОС*** с определяющими параметрами $dxaxn = 2x2x9=36$.

С точки зрения прикладных аспектов теории однородных структур в вычислительных науках и в целом ряде других областей очень интересным представляется вопрос получения *минимальной* сложности универсальных бинарных ***d-ОС*** $(d \geq 1)$. Используя метод доказательства теоремы ***104,*** нетрудно показать, что универсальная классическая ***1-ОС*** с произведением $axn = 14x2$ (*является одним из отмеченных выше результатов* ***А. Смита)*** ***Т-***моделируется бинарной ***1-ОС*** с ***ШС*** размера $L=(2+1)[\log_2 16]+5=17$, т. е. для *моделирующей* классической ***1-ОС*** допустимо произведение вида $axn=2x17$. Это приводит нас к следующему достаточно интересному результату, а именно [53].

<u>Теорема 105</u>. Существуют универсальные классические бинарные структуры 1-ОС с шаблоном соседства размера n = 17.

Данный результат доказывает существование *универсальных* бинарных ***1-ОС*** с небольшими ***ШС*** и до последнего времени он являлся одним из наилучших результатов в данном направлении [5,88,90]. Между тем, ***M. Cook*** в ***2000 г.*** показал [536], что классическая бинарная ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура $X=\{-1,0,1\}$ обладает свойством *универсальной* вычислимости. Эта модель определяется ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ с параллельными правилами подстановок следующего вида, а именно:

$$\begin{array}{llll} 000 \to 0 & 010 \to 1 & 100 \to 0 & 110 \to 1 \\ 001 \to 1 & 011 \to 1 & 101 \to 1 & 111 \to 0 \end{array}$$

Согласно нашей классификации данная структура имеет классификационный номер ***118,*** тогда как в англоязычной терминологии она фигурирует под номером ***110.*** Среди всех *бинарных* ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура пока удалось обнаружить лишь вышеуказанную структуру со свойством *универсальной* вычислимости, хотя данным свойством могут обладать и некоторые другие структуры этого простого вида. Таким образом, существуют *классические* структуры ***1-ОС*** с алфавитом $B=\{0,1\}$ и индексом соседства Неймана-Мура, обладающие свойством *универсальной вычислимости*. И в этом смысле их *сложность* определяется величиной $axn=2x3=6$. Таким образом, на сегодня упомянутую *бинарную* структуру ***1-ОС*** можно рассматривать как пример *простейшей* ***ОС-***модели, обладающей свойством универсальной вычислимости. Вышесказанное и позволяет нам сформулировать следующее предложение.

<u>Предложение 24</u>. Существуют универсальные бинарные структуры 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура сложности axn = 2x3 = 6.

Между тем, получение *минимальных* универсальных ***d-ОС*** (*тем более* ***1-ОС)*** представляет больше гносеологический, чем теоретико-прикладной интерес. Тем более, что искусственные приемы доказательства, порой, используют в целом спорные соглашения.

Интересно исследовать свойства этой ***1-ОС*** (*не нарушая общности в дальнейшем будем использовать эквивалентный индекс соседства* $X^*=\{0,1,2\}$) в контексте обладания ею неконструируемыми ***КФ*** и динамическими свойствами последовательностей конечных конфигураций. Прежде всего, легко убедиться, что данная структура из каждой конфигурации ***КФ*** $c_o \in C(B,1,\phi)$ будет генерировать строго возрастающую по длине последовательность ***КФ,*** что довольно прозрачно иллюстрирует следующий фрагмент, а именно:

$$\tau^{(3)}: \begin{array}{r} .....0000 \\ .....0011 \end{array} \left| \begin{array}{c} 1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} x_2 .... x_{n-2} \\ x_o^* \; x_1^* \; x_2^* .... x_{n-2}^* \end{array} \right| \begin{array}{l} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} 100 ..... \\ \;1 \;\; 000 ..... \end{array}; \quad x_o^*, x_1, x_2^* \in B = \{0,1\}; \;\; j = 1..n-2$$

из которого следует, что для каждой ***КФ*** $c_o \in C(B,1,\phi)$ конфигурация $c_o\tau^{(3)}$ будет по длине на *один* больше ***КФ*** c_o. Более того, согласно критерия неконструируемости на основе ***γ-КФ*** (теорема ***24)*** несложно убедиться, что данная ***1-ОС*** обладает ***γ-КФ*** уже на блоках размера ***1*** (*определение* ***9)***, что непосредственно следует из вида ее ***ЛФП***. Более того, эта бинарная ***1-ОС*** обладает, естественно, парами ***ВСКФ***, например, вида c_1=<01|01|10> и c_2=<01|10|10> с внутренним блоком размера ***2***, т.е. имеет место следующее соотношение, а именно:

c_1 =	0	1	0	1	1	0
c_2 =	0	1	1	0	1	0
$c_1\tau^{(3)} = c_2\tau^{(3)}$ =	1	1	1	1		

Следовательно, данная ***1-ОС*** обладает неконструируемостью ***НКФ***-типа и, возможно, ***НКФ-3***.

c_b^{-1} :	–	–	–	0	1	1	1
	–	0	1	1	1	0	0
	–	–	–	0	1	0	0
	–	–	–	–	0	0	0
$c_b^{-1}\tau^{(3)} = c_b$	0	1	0	1	0		

На основе попытки получения предшественников c_b^{-1} для блочной конфигурации c_b = <01010>, основываясь на правилах ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ структуры, довольно несложно убедиться в отсутствии таких c_b^{-1}, как это весьма наглядно иллюстрирует предыдущий фрагмент.

С другой стороны, построенная на основе предыдущей *неконструируемой* ***КФ*** c_b, конфигурация c^*=□101□ также будет ***НКФ***. Между тем, ее ядро h_b=<101> будет *блочно* конструируемым, исходя из следующего соотношения c^*_b = <01110>, $c_b{}^*\tau^{(3)} = h_b$ = <101>, т.е. согласно вышесказанного и определения ***3*** конечная ***КФ*** c^*=□101□$\in C(B,1,\phi)$ будет в нашей структуре как ***НКФ***, так и ***НКФ-3***. Оценим *долю* конечных ***КФ НКФ***-типа для рассматриваемой ***1-ОС***. Множество всех *конечных* ***КФ*** имеет следующий вид, а именно:

$$C(B,1,\phi) = \{□, □1□, □11□, □1x_1x_2x_3 \ldots x_n1□ \mid x_j \in B=\{0,1\};\ j=1 \,..\, n;\ n=1 \,..\, \infty\}$$

Таким образом, число подобных *различных* ***КФ*** длины $(n+2)$ будет $\#C(n)=2^n$ при $n \geq 0$. Рассмотрим теперь конечные ***КФ*** нижеследующего вида, а именно:

$$C^*(n) = □01010\,x_4x_5x_6 \ldots x_n1□;\ \ x_j \in B=\{0,1\};\ j=4 \,..\, n;\ n=1 \,..\, \infty$$

Исходя из вышесказанного, уже только такие ***КФ*** будут в нашей структуре неконструируемыми типа ***НКФ*** и, возможно, ***НКФ-3;*** очевидно, их количество составит $\#C^*(n) = 2^{n-3}$. Следовательно, для $n \geq 4$ доля конечных неконструируемых конфигураций типа ***НКФ*** и, возможно, ***НКФ-3*** для рассматриваемой ***1-ОС*** будет не меньше величины $\delta = 2^{n-3}/2^n = 1/8$.

Покажем, что каждая ***КФ*** c''=□$10x_1x_2 \ldots x_n1$□ $(x_j \in B;\ j=1..n)$, не являющаяся ***НКФ (НКФ-3)***, будет в данной структуре ***НКФ-1***. Действительно, попытаемся вычислить для нее предшественников:

c^{-1} :	...	1	1	1	1	1	0	0	...	...	...	...
	...	–	–	–	0	1	0	0	...	...	...	...
	...	–	–	–	0	1	1	1	...	...	...	...
	...	–	–	–	–	0	0	0	...	...	...	...
$c^{-1}\tau^{(3)} = c''$	...	0	0	0	1	0	x_1	x_2	...	x_n	1	□

В результате чего вычисляем наличие лишь одного предшественника $c^{-1} \in C(B,1,\infty)$, что согласно определения ***4*** относит ***КФ c''*** к классу ***НКФ-1.*** Подобно сказанному несложно показать, что для $n \geq 1$ *доля* конечных конфигураций типов ***НКФ, НКФ-1*** и, возможно, ***НКФ-3*** для указанной ***1-ОС*** будет не меньше величины $\delta 1 = 2^{n-1}/2^n = 1/2$.

Нижеследующий фрагмент доказывает наличие в данной структуре ***НКФ-2*** уже вида ***c=□1101□.***

	...	–	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	...
	...	–	–	1	0	0	0	1	1	1	0	0	...
	...	–	–	–	1	0	0	1	1	1	0	0	...
	...	–	–	–	–	–	–	–	0	1	1	1	
c^{-1} :	...	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	...
	...	–	–	–	–	–	–	–	0	1	0	0	...
	...	–	–	–	–	1	0	1	1	1	0	0	...
	...	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0	...
$c^{-1}\tau^{(3)} = c$	...	0	0	0	0	1	1	0	1	0	...	...	...

Действительно, из фрагмента с очевидностью следует, что у ***КФ c=□1101□*** имеется только один c^{-1}-предшественник из множества $C(B,1,\phi)$, т.е. ***КФ c*** (*определение* ***4***) является в структуре ***НКФ-2.*** Вышесказанное позволяет сформулировать следующее интересное предложение.

<u>Предложение 25</u>. Существуют классические бинарные структуры 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура, обладающие как свойством универсальной вычислимости, так и свойством неконструируемости всех четырех типов, а именно: НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3.

Использованный нами оптимизирующий метод моделирования классических ***1-ОС*** бинарными структурами того же класса дает в общем случае довольно хорошие результаты и предоставляет хорошие *сравнительные* характеристики относительно *потенциально* оптимальных *моделирующих* структур. Однако его эффективность зависит в определенных пределах от значений основных *параметров моделируемых* структур: мощности ***А***-алфавита внутренних состояний и размера ***ШС.*** Поэтому, в отдельных случаях можно использовать специальные модификации данного метода, позволяющие получать более близкие к оптимальным результаты моделирования. Рассмотрим этот аспект моделирования на примере задачи получения *минимальной* сложности *универсальных* классических ***1-ОС*** с мощностями ***А***-алфавитов, равными соответственно ***a=2, a=3*** и ***a=4.*** С этой целью определим способ моделирования классической ***1-ОС*** с ***ШС*** размера ***n*** и алфавитами ***A**** внутренних состояний мощности соответственно ***4, 8*** и ***14.*** Классические ***ОС***-модели с данными характеристиками представляют особый интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения [3,5,9,53,88,90].

Общий принцип оптимизирующего моделирования классических ***1-ОС*** посредством бинарных структур того же *класса*, использованный для получения вышеуказанных результатов теорем ***103*** и ***104,*** состоял в следующем. Символы ***А***-алфавита внутренних состояний единичных автоматов моделируемой ***1-ОС*** [53] кодировались бинарными кортежами $<x_1x_2 \dots x_m>$ $(x_k \in B=\{0,1\};\ k=1 \,..\, m;\ m=[\log_2 a]$, где $[w]$ – число, не меньшее $w)$ и произвольная конфигурация c = □... $y_{k-1}y_ky_{k+1}$ ... □ моделируемой структуры в моделирующей принимала следующий общий вид, а именно:

$$\ldots\ldots\ |M|x^{k-1}_1x^{k-1}_2 \ldots\ldots x^{k-1}_m|M|x^k_1x^k_2 \ldots\ldots x^k_m|M|x^{k+1}_1x^{k+1}_2 \ldots\ldots x^{k+1}_m|M|\ \ldots\ldots$$

где бинарные кортежи $<x^k_1x^k_2 \dots x^k_m>$ $(x^k_j \in B=\{0,1\};\ j=1 \,..\, m;\ m=[\log_2 a];\ k=-\infty \,..\, +\infty)$ представляют соответствующие y_k-состояния моделируемой ***1-ОС,*** тогда как бинарный ***М***-маркер служит для целей однозначного рекурсивного выделения из общей бинарной ***КФ*** *моделирующей* структуры

1-ОС кортежей-представителей символов состояний моделируемой структуры. Более того, при кодировании символов ***А***-алфавита моделируемой ***1-ОС*** исключались бинарные $<x_1x_2x_3 \ldots x_m>$-кортежи, нарушающие *уникальность* ***М***-маркера в *бинарных* конфигурациях *моделирующей* ***1-ОС***. Для общего случая моделирования был выбран достаточно удачный маркер ***М=01110***, который, однако, в случае относительно небольших ***А***-алфавитов и ***ШС*** моделируемых ***1-ОС*** оказался не достаточно эффективным. Таким образом, используя вышеописанный *общий* подход, для случая небольших ***А***-алфавитов и ***ШС*** *моделируемых* классических ***1-ОС*** были, между тем, использованы его специальные модификации, суть которых сводится к следующему, а именно.

Рассмотрим классическую ***1-ОС*** с ***А***-алфавитом ***а***-мощности $(a \geq 6)$ и ***ШС*** размером ***n***. Используя описанный выше подход, в качестве представления символов ***А***-алфавита моделируемой ***1-ОС*** выбираем бинарные кортежи $<x_1x_2x_3 \ldots x_m>$ $(x_k \in B=\{0,1\};\ k=1..m;\ m = [log_2\ (a+2)]$, где $[w]$ – число, не меньшее $w)$, исключая два бинарных кортежа $<10^{m-1}>$ и $<0^{m-1}1>$, чтобы обеспечить в ***КФ (54)*** *уникальность* ***М****-маркера*, в качестве которого выбирается кортеж $<10^{m-1}1>$. Очевидно, с помощью указанных *бинарных* кортежей (*кроме двух отмеченных*) можно однозначно закодировать символы алфавита $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ $(a \geq 6)$ моделируемой структуры; например, посредством функции $\varphi(p)$ бинарного представления ***p***-числа с очевидными изменениями, связанными с отсутствием двух указанных кортежей. Например, не нарушая общности, в качестве алфавита *моделируемой* ***1-ОС*** можно выбирать множество $A=\{0,1,\ldots,a-1\}\backslash\{2^{z-1}+1\}$ $(z=[log_2\ a])$. При сделанных предположениях любая конечная конфигурация $c=\square y_1 \ldots y_{k-1}y_ky_{k+1} \ldots y_h\square$ $(y_p \in A;\ p=1..h)$ *моделируемой* классической ***1-ОС*** представляется в *моделирующей* структуре *бесконечной* конфигурацией следующего общего вида, а именно:

$$\ldots\ldots |x^1{}_1x^1{}_2 \ldots x^1{}_m|10^{m-1}1|\ldots|10^{m-1}1|x^{k-1}{}_1x^{k-1}{}_2 \ldots x^{k-1}{}_m|10^{m-1}1|x^k{}_1x^k{}_2 \ldots x^k{}_m|10^{m-1}1| \\ x^{k+1}{}_1x^{k+1}{}_2 \ldots x^{k+1}{}_m|10^{m-1}1|\ldots|x^h{}_1x^h{}_2 \ldots x^h{}_m|10^{m-1}1|\ldots\ldots \qquad (54)$$

При подобном способе кодирования несложно убедиться, что $<10^{m-1}1>$-маркер в бинарной ***КФ***, имеющей структуру ***(54)***, является *уникальным* кортежем и *рекурсивно* идентифицирует *бинарные* кортежи $<x^k{}_1x^k{}_2 \ldots x^k{}_m>$ – представители соответствующих y_k-символов *моделируемой классической* ***1-ОС***. Так как *моделируемая* классическая ***1-ОС*** имеет ***ШС*** размера ***n***, *моделирующая* ее *классическая* ***1-ОС*** с учетом вида ***(54)*** текущей бинарной ***КФ*** структуры должна иметь минимальный индекс соседства следующего вида $X=\{-(m-1), \ldots, -2,-1,0,1,2, \ldots,2mn+n-m-2\}$, обеспечивающий возможность при вычислении каждого $x^k{}_j$-бита $<x^k{}_1x^k{}_2 \ldots x^k{}_m>$-кортежа, представляющего y_k-*символ* алфавита A $(x^k{}_j \in B;\ y_k \in A;\ j=1..m;\ m=[log_2\ (a+2)];\ k=-\infty\ ..\ +\infty)$, *рекурсивно* предоставлять в распоряжение ***ЛФП*** моделирующей ***1-ОС*** всю информацию о конфигурации ***ШС*** *моделируемой* структуры, включая ***М***-маркеры. Читателю в качестве полезного упражнения рекомендуется полностью «*расписать*» основные фрагменты параллельных правил подстановки ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ *моделирующей* структуры для общего случая моделируемой классической ***1-ОС***. С учетом сказанного уже нетрудно убедиться, произвольная классическая ***1-ОС*** с алфавитом A $(a \geq 6)$ и ***ШС*** размера ***n 1***-моделируется *бинарной* классической структурой ***1-ОС*** с ***ШС*** размера $L = n\mathrm{x}[2\mathrm{x}log_2\ (a+2) + 1] - 2$.

Аналогичным образом рассмотрим моделирование произвольной *классической* структуры ***1-ОС*** с ***А***-алфавитом $(4 \leq a \leq 21)$ и ***ШС*** размера ***n*** посредством *классической* ***1-ОС*** с алфавитом $A^*=\{0,1,2\}$, определив минимально достаточный размер ее ***ШС***. Для данных целей каждый α-символ из ***А***-алфавита *моделируемой* структуры кодируется кортежем формата $<x_1x_2x_3>$ согласно некоторой *рекурсивной* функции Ω: $\alpha \Rightarrow <x_1x_2x_3>$ $(x_k \in A^*;\ k=1..3)$. Множество всех таких кортежей содержит, очевидно, ***27*** элементов. Однако, из него исключаются следующие кортежи: ***(1) <101>*** – маркер и

(2) <w10>, <01w> (w∈A*), что позволяет обеспечить уникальность маркера вида ***<101>*** в каждой текущей конфигурации следующего вида, а именно:

$$\ldots\ldots\ |101|x^{k-1}_1x^{k-1}_2x^{k-1}_3|101|x^k_1x^k_2x^k_3|101|x^{k+1}_1x^{k+1}_2x^{k+1}_3|101|\ \ldots\ldots$$

моделирующей структуры ($x^k_j\in A^*$; $j=1..3$; $k=-\infty\ ..\ +\infty$). С учетом сказанного, оставшиеся $\langle x_1x_2x_3\rangle$ кортежи в количестве ***27-6=21*** позволяют однозначно кодировать ***А-***алфавит *моделируемой* ***1-ОС*** при $4\le a\le 21$. Нетрудно убедиться, что индекс соседства $X=\{-2,-1,0,1,2,\ldots,6n-4\}$ *моделирующей* ***1-ОС*** определяет *минимальный* ***ШС*** для обеспечения всей полноты информации о конфигурации ***ШС*** моделируемой структуры. Итак, произвольная классическая ***1-ОС*** с ***А-***алфавитом ($4\le a\le 21$) и ***ШС*** размера ***n 1-***моделируется классической ***1-ОС*** с алфавитом $A^*=\{0,1,2\}$ и ***ШС*** размера $L=6n-1$.

Наконец, в качестве моделирующей рассмотрим классическую ***1-ОС*** с алфавитом $A^*=\{0,1,2,3\}$, минимальный ***ШС*** которой требуется определить. В этом случае в качестве маркера выбирается кортеж ***<101>***, а из множества всех кортежей $\langle x_1x_2\rangle$ ($x_1,x_2\in A^*$) удаляются кортежи ***<01>*** и ***<10>***. Тогда оставшиеся кортежи в количестве ***14*** дают возможность однозначно кодировать символы ***А-***алфавита ($5\le a\le 14$) *моделируемой* классической ***1-ОС***. При этом, обеспечивается *уникальность* маркера ***<101>***, а также *рекурсивность декодирования* кортежей в каждой текущей ***КФ*** следующего вида, а именно:

$$\ldots\ldots\ |101|x^{k-1}_1x^{k-1}_2|101|x^k_1x^k_2|101|x^{k+1}_1x^{k+1}_2|101|\ \ldots\ldots$$

моделирующей классической ***1-ОС*** ($x^k_j\in A^*=\{0,1,2,3\}$; $j=1,2$; $k=-\infty\ ..\ +\infty$). Несложно убедиться, что индекс соседства $X=\{-1,0,1,2,\ \ldots,\ 5n-4\}$ обеспечивает полноту информации о конфигурациях ***ШС*** моделируемой классической ***1-ОС***. Таким образом, произвольная *классическая* ***1-ОС*** с алфавитом ***А*** ($5\le a\le 14$) и ***ШС*** размера ***n 1-***моделируется классической ***1-ОС*** с алфавитом $A^*=\{0,1,2,3\}$ и ***ШС*** размера $L=5n-2$. Вышесказанное резюмирует следующий основной результат [5,8,9].

<u>Теорема 106</u>. Произвольная классическая структура 1-ОС с А-алфавитом (a≥6) и ШС размера n 1-моделируется бинарной классической структурой 1-ОС с ШС размера $L=n\times[2\times\log_2(a+2)+1]-2$. ***Произвольная классическая 1-ОС с А-алфавитом*** ($4\le a\le 21$) ***и шаблоном соседства размером n 1-моделируется классической структурой 1-ОС с алфавитом*** $A^*=\{0,1,2\}$ ***и шаблоном соседства размера*** $L=6n-1$. ***Произвольная классическая структура 1-ОС с А-алфавитом*** ($5\le a\le 14$) ***и ШС размера n 1-моделируется классической 1-ОС с алфавитом*** $A^*=\{0,1,2,3\}$ ***и ШС размера*** $L=5n-2$.

Но так как из вышеотмеченного результата ***А. Смита*** [131] следует существование *универсальной* классической ***1-ОС*** с произведением значений ее основных параметров $a\times n=14\times 2$, то, используя ее в качестве моделируемой структуры, на основе теоремы ***106*** достаточно несложно убедиться в существовании *универсальных классических* ***1-ОС*** с произведениями: $a\times n=2\times 16$, $a\times n=3\times 11$ и $a\times n=4\times 8$. Теорема ***106*** доказывает существование *универсальных* классических структур ***1-ОС*** с достаточно небольшими размерами алфавита внутренних состояний и шаблона соседства, представляя на сегодня наилучший известный нам результат в этом направлении. Интересна сама технология использования результата теоремы ***106***. Методом прямого моделирования ***А.Р. Смит*** определил *универсальную* классическую ***1-ОС*** с произведением $a\times n=14\times 2$ наряду с *универсальной* структурой того же типа при условии $a\times n=2\times 40$; при этом использовался один и тот же метод *моделирования*. Применяя методику доказательства теоремы ***106***, в качестве моделируемой классической ***1-ОС*** выбираем универсальную структуру с произведением $a\times n=14\times 2$, которая, в свою очередь, будет продуктом моделирования, и на ее основе получаем моделирующую ее *бинарную* классическую ***1-ОС*** при условии $a\times n=2\times 16$, улучшив наш предыдущий результат в данном направлении. Это говорит о том, что методика, основанная на теореме ***106***, может служить в качестве достаточно неплохой отправной точки в задаче организации оптимизирующей техники моделирования в классических однородных структурах. Между тем, следует иметь в виду, что первый результат теоремы **106** предпочтительнее результата теоремы **104** лишь в очень *узких* диапазонах значений ***a*** и ***n***, в остальных случаях результат теоремы **104** является более предпочтительным. В связи со сказанным возникает интересный вопрос о существовании *универсальных бинарных* классических ***1-ОС*** с шаблоном соседства минимально возможного размера **(ρ)**; в этом направлении показано, что $5 \le \rho < 16$ [90]. Между тем, еще раз следует отметить, что подобного рода минимизации не так уж и столь принципиальны.

Действительно, задача определения *универсальной* классической ***d-ОС*** с *минимальным* значением величины ***dxaxn*** не представляется столь уж важной и по большому счету представляет, скорее, гносеологический интерес; как, впрочем, и для случая ***УМТ***. Между тем, как для практических, так и для теоретических приложений минимальные по сложности универсальные формальные вычислительные модели весьма громоздки и малообозримы.

Однако, наряду со сказанным, теоремы **104** и **106** позволяют существенно упрощать собственно технологию моделирования сложных процессов, требующих больших усилий для погружения их в *классические* структуры ***1-ОС***. В общем виде суть такой технологии сводится к следующему. На *первом* этапе некоторый сложный дискретный процесс погружается в *классическую* структуру ***1-ОС***, имеющую *минимальный* размер ***ШС***, соответствующий индексу соседства Неймана-Мура, и большой алфавит внутренних состояний. Этому этапу может предшествовать использование структур типа ***1-ОС**** (см. главу ***1***) с последующим переходом к эквивалентным им классическим структурам ***1-ОС***. На этих этапах параллельное программирование в классической ***1-ОС (1-ОС*)*** существенно упрощается благодаря использованию большого алфавита внутренних состояний и незначительного ***ШС***. На *последнем* этапе теоремы **104** и **106** позволяют осуществлять переход к практически важным классическим бинарным ***1-ОС*** с удовлетворительными размерами ***ШС***. В качестве иллюстрации сказанного можно рассмотреть два очень интересных примера, а именно: проблемы ***(1)*** *ограниченного* роста в классических ***ОС***-моделях и **(2)** *периодических* конечных ***КФ*** с максимальными периодами [5,54-56,88,90,536,567].

Первый пример весьма тесно связан с проблемой *ограниченного роста* в классических ***ОС***-моделях, рассмотренной для случая ***1-ОС*** в разделе ***1.2***. Параллельные алгоритмы выращивания цепочек активных автоматов фантастической длины, полученные здесь с использованием структур типа ***1-ОС****, погружаются в *классические* ***1-ОС*** с ***ШС*** размера $L=3$ и алфавитом внутренних состояний мощности $(4m+29)$, где m – скорость передачи управляющей информации в ***ОС****-моделях. Тогда на основе теоремы **106** достаточно несложно сделать вывод о существовании эквивалентных им бинарных классических ***1-ОС*** с шаблонами соседства размера $L = 3x[\log_2(4m+31)] - 2$.

В качестве *второго* примера может успешно служить задача определения *максимально* возможных минимальных размеров периодов для периодических конечных конфигураций в классических бинарных ***1-ОС***. В монографии [5] показано, что существует структура ***1-ОС****, функциональный алгоритм ***Fa***, которой допускает для любого целого $m \ge 3$ наличие периодических конечных ***КФ*** длины m с минимальным периодом $p=2^m-2$ при мощностях алфавитов внутренних состояний ***A*** и управляющих импульсов ***I***, равных ***3***. Там же показано, что эта структура ***1-ОС**** эквивалентна классической ***1-ОС*** с ***A****-алфавитом внутренних состояний ***(#A*=#A+#I=6)*** и индексом соседства *Неймана-Мура*. Последующее применение к данным результатам метода доказательства теоремы **104** приводит к установлению существования бинарных классических ***1-ОС*** с ***ШС*** размера $n=17$, обладающих *периодическими конечными* ***КФ*** длиной $(5m+3)$ $(m \ge 3)$ с *минимальным периодом* $p=2^m-2$. Итак, в общем случае просматриваются *три* основных этапа отмеченного типа моделирования в классических ***d-ОС***, а именно: ***d-ОС**** ⇒ классические ***d-ОС*** ⇒ бинарные классические ***d-ОС***.

Оценку для шаблона соседства моделирующей бинарной ***1-ОС*** в теореме **106** можно обобщить, исходя из некоторого используемого бинарного ***M***-маркера длиной m. В таком случае величину

L размера шаблона соседства моделирующей классической бинарной ***1-ОС*** можно представить как $L(a,n,m) = (n+1)([\log_2 a]+m)-2m-1$, где ***a*** и ***n*** – соответственно мощность ***A***-алфавита и размер ***ШС*** моделируемой классической структуры ***1-ОС***. Таким образом, в ряде случаев целесообразно увеличивать ***m***-размер ***М***-маркера, что затем ведет к уменьшению размера ***ШС*** моделирующей структуры; именно так и было сделано при доказательстве *предыдущей* теоремы. Следовательно, в каждом конкретном случае выбор ***ШС*** моделирующей ***1-ОС*** состоит в *минимизации* величины ***L(a,n,m)*** путем выбора подходящего ***М***-маркера. Используя технику моделирования *классических* ***1-ОС***, предложенную при доказательстве теоремы ***106***, возможно получить интересную оценку размера ***ШС*** моделирующих бинарных структур также и для случая высших размерностей.

<u>Теорема 107</u>. Любая классическая структура d-ОС (d≥1) с А-алфавитом внутренних состояний и с ШС, содержащимся в минимальном d-мерном параллелепипеде $p_1 x p_2 x \dots x p_d$, 1-моделируется бинарной классической структурой d-ОС (d≥1) с ШС следующего размера, а именно:

$$L = p_1 x\{[2x\log_2(a+2) + 1] - 2\}x p_2 x p_3 x \dots x p_d$$

Следует напомнить, что при построении перечисленных *моделирующих* бинарных классических ***d-ОС (d≥1)*** использовалась специальная *оптимизирующая* техника, состоящая в определении для них потенциально оптимальных моделирующих классических структур ***d-ОС*** с последующим приближением к ним конкретно программируемых структур. Между тем, возвращаясь вновь к теоремам ***104*** и ***105***, следует, однако, отметить, представленные в них *оценки* размеров шаблонов соседства ***1***-моделирующих структур улучшить достаточно трудно, если принять во внимание нижеследующее соображение (*на примере бинарных моделирующих структур*).

Выше мы определили потенциально оптимальную моделирующую классическую ***d-ОС***. Можно пойти еще дальше, положив для *бинарной моделирующей* ***1-ОС*** условие, что все символы алфавита ***A*** внутренних состояний ***1***-моделируемой ***1-ОС*** кодируются их бинарными представлениями, а маркеры-разделители отсутствуют. Для данной классической ***1-ОС*** предполагается возможность использования ее в качестве моделирующей структуры с *минимально* необходимым ***ШС*** размера $L^* = (n+1)[\log_2 a]-1$. Очевидно, определенная таким образом моделирующая структура является недостижимой. Между тем, соотношения для значений *реально* ***1***-моделирующей (***L*** *определяется теоремой* ***104***) и *недостижимой* (***L****) структурами $L/L^* \approx 1+(n+\beta)/\log_2 a$ и $L-L^*=(n+1)(n+\beta)+1$ говорят о достаточно хорошем приближении определенной теоремой ***104*** моделирующей *бинарной* ***d-ОС*** даже к такой недостижимой моделирующей структуре. Подобный анализ для случая результата моделирования, определяемого теоремой ***106***, еще раз подтверждает узость *рамок* его достаточно эффективного применения.

Оценку для размера ***ШС 1***-моделирующей бинарной ***d-ОС*** в теореме ***104*** можно обобщить, если исходить из некоторого используемого бинарного маркера-разделителя ***v***-длины. В этом случае величина ***L*** размера шаблона соседства ***1***-*моделирующей бинарной* ***1-ОС*** может быть представлена следующим определяющим соотношением, а именно:

$$L(a,n,v) = (n+1)[\log_2 a + \beta(a,v)] + n + [v(a) - 1]$$

где $\beta(a,v)$, $v(a)$ – функции соответствующих величин. А точнее, с ростом мощности ***A***-алфавита *моделируемой* ***d-ОС*** весьма целесообразно в определенных случаях увеличивать размеры *маркера*-разделителя, что приводит к уменьшению, порой существенному, величины $\beta(a,v)$, а в целом и всего размера ***ШС Т***-моделирующей структуры. Поэтому, в каждом конкретном случае выбор ***ШС*** моделирующей бинарной ***d-ОС*** состоит в *минимизации* величины ***L(a,n,v)*** путем выбора для него подходящего маркера-разделителя. В этом мы сможем убедиться уже на довольно простых примерах ***Т***-моделирования [8,9,53]. На основе наших данных представленные здесь результаты по ***1***-*моделированию* одной классической ***d-ОС*** другой структурой той же размерности являются на сегодня наилучшими, решая ряд ранее поставленных вопросов [3,5,8,9,53-56,88,90,536,567].

Достаточно существенный как теоретический, так и прикладной интерес представляет вопрос моделирования классических ***d-ОС*** структурами того же класса, но с понижением размерности. В работе [532] представлен и проанализирован один интересный подход к проблеме реализации моделирования классических ***3-ОС*** посредством ***2-ОС***, использующий некоторые результаты из работ [533,534]. Обобщение этого подхода позволяет моделировать ***d-ОС (d>2)*** структурой ***2-ОС***. Однако данный подход не работает для ***1-***мерного случая, не позволяя моделировать структуру ***2-ОС*** посредством ***1-ОС***. Нижеследующая теорема представляет иной подход, обеспечивающий моделирование классических ***2-ОС*** посредством структур ***1-ОС***.

<u>Теорема 108</u>. Произвольная классическая структура 2-ОС моделируется соответствующей ей классической структурой 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура.

Хорошо известно [3,5] (раздел ***6.1***), что произвольная *классическая* ***d-ОС*** *моделируется* структурой ***d-ОС*** с простейшим индексом соседства $X = \{(0,0,\ldots,0), (1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1)\}$, т.е. ее ***ШС*** содержит ***(d+1)*** единичных автоматов, из которых один автомат центральный и ***d***, прилегающих к нему по одному по *всем* осям координат E^d. Поэтому вполне достаточно ограничиться случаем *классической* структуры ***2-ОС*** с алфавитом внутренних состояний единичных автоматов $A=\{0,1,2, \ldots, a\text{-}1\}$ и простейшим индексом соседства $X=\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$. Сначала нам предстоит определить MT^sq, которая будет моделировать процесс генерации исходной структурой ***2-ОС*** произвольной последовательности конечных конфигураций $<c_o> = \{c_o\tau^{(3)k} \mid k=0,1,2,3,\ldots\}$ $(c_o \in C(A,2,\phi))$.

#	0	0	.....	0	0	
#	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	0	
#	a_{21}	a_{22}	.....	a_{2n}	0	
#	.....	.....	.....	.....	.....	
#	a_{m1}	a_{m2}	.....	a_{mn}	0	
#	0	0	.....	0	0	

(0,1)	
(0,0)	(1,0)

Простейший шаблон соседства в 2-ОС

Произвольную начальную ***КФ*** $c_o \in C(A,2,\phi)$ ограничиваем минимальным содержащим ее ***(nxm)-***прямоугольником, как это показано на предыдущей схеме. Очевидно, что ввиду типа шаблона соседства, указанного на этой же схеме, на каждом шаге применения к текущей конфигурации ***ГФП*** $\tau^{(3)}$ модификациям могут быть подвержены только состояния левой и нижней полосок из единичных автоматов структуры, затененных более темным цветом. Теперь для моделирования динамики исходной ***2-ОС*** определяем начальную ***КФ*** c_o для MT^sq в следующем виде, а именно:

□	#	0	0	...	0	#	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	.....	#	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	*	□
□	#	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	#	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	.....	#	0	0	...	0	*	□

▲q_o

Принцип организации начальной ***КФ*** для MT^sq весьма прост и состоит в следующем. Алфавит ***S*** состояний клеток на ленте ***структурируется*** на двух уровнях, где состояние (□□) определяет пустую клетку. Состояния начальной ***КФ*** c_o ***2-ОС*** *структурируются* в соответствии со строками ограничивающего ее прямоугольника и двух нулевых строк сверху и снизу. Более того, уровни располагаются согласно следующей нумерации строк: $0\div1,\ 1\div2,\ 2\div3,\ 3\div4, \ldots, (m\text{-}1)\div m,\ m\div(m+1)$. Каждая строка предваряется ***(##)-***префиксом, а завершает погружение ***КФ*** c_o в MT^sq состояние ***(**)***. Именно клетка с этим состоянием сканируется ***КА*** машины, находящимся в начальном q_o-состоянии. Алгоритм функционирования MT^sq (*программа ее работы*), моделирующей один шаг структуры ***2-ОС***, состоит из следующих этапов, а именно. На *первом* этапе работы машина MT^sq производит *раздвижку* конфигурации ленты после ее ячеек в состояниях ***(##)*** на ***1*** ячейку вправо. Выполняет эту работу следующая группа команд программы MT^sq:

$(xy)q_o \to (xy)q_o(-1)$ $\quad$ $(\#\#)q_o \to (00)q_o^{**}(-1)$ $\quad$ $(x_1y_1)q_o^{x_2y_2} \to (x_2y_2)q_o^{x_1y_1}(-1)$

$(\square\square)q_o^{\#\#} \to (\#\#)q_1(1)$ $\quad$ $(x_1y_1)q_1 \to (x_1y_1)q_1(1)$ $\quad$ $(^{**})q_1 \to (\#\#)q_o(-1)$

$(\square\square)q_o^{**} \to (\#\#)q_2(0)$ $\quad$ $x, y \in A;$ $\quad$ $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \{\#\} \cup A$

В результате выполнения вышеказанной группы команд программы конфигурация ленты ***MT^sq*** примет следующий вид при сканировании ***КА*** в состоянии q_3 самой левой **(##)**-клетки ленты.

□	#	0	0	0	...	0	#	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	...	#	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	□
□	#	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	#	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	...	#	0	0	0	...	0	□

▲q_2

Результат данного этапа позволяет затем достаточно просто *моделировать* реализацию машиной ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ симулируемой ***2-ОС***, точно сохраняя структурную организацию исходной ***КФ*** c_o. На данном этапе используются дополнительные символы {#,*,□} для структурированного алфавита клеток ленты наряду с алфавитом $Q_1 = \{q_o .. q_2, q_o^{xy}, q_o^{**}, q_o^{\#\#}\}$ [$\#(Q_1) = a^2+5$ *и* $\#(G)$ – *мощность произвольного множества* G] состояний ***КА MT^sq***, тогда как мощность алфавита S_1 на ленте равна $\#(S_1)=a^2 + 3$; при этом, на последующих этапах мощность обоих алфавитов будет увеличиваться. Несложно убедиться, что для реализации этого этапа требуется порядка $N_1 = (n+1)(m+1)^2+(m+1)$ шагов, где (nxm) – размер минимального прямоугольника, содержащего конечную *конфигурацию* $c_o \in C(A,2,\phi)$ моделируемой классической структуры ***2-ОС***.

На *втором* этапе машина ***MT^sq*** реализует выполнение ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}(x_o,x_1,x_2) = x_o^*$, соответствующей ***ГФП*** $\tau^{(3)}$ моделируемой структуры ***2-ОС***. Обеспечивается это следующей группой команд ***MT^sq***:

$(\#\#)q_2 \to (\#\#)q_2(1)$ $\quad$ $(xy)q_2 \to (xy)q_3(1)$ $\quad$ $(xy)q_3 \to (xy)q_3^y(-1)$

$(xy)q_3^h \to (x\sigma^{(3)}(x,y,h))q_2(1)$ $\quad$ $(\#\#)q_3 \to (\#\#)q_3^0(-1)$ $\quad$ $(xy)q_3^0 \to (x\sigma^{(3)}(x,y,0))q_2(1)$

$(\square\square)q_3 \to (\square\square)q_3^*(-1)$ $\quad$ $(xy)q_3^* \to (x\sigma^{(3)}(x,y,0))q_4(0)$ $\quad$ $x, y, h \in A$

В результате выполнения такой группы команд на ленте ***MT^sq*** будет сформирована следующая конфигурация, в которой символы $\hat{a}_j, \hat{a}_{kp} \in A$ $(j=0..n;\ k=1..n;\ p=1..m)$ – результат реализации ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}(x_o,x_1,x_2) = x_o^*$ моделируемой структуры ***2-ОС***, например, $\sigma^{(3)}(a_{11}, a_{21}, a_{22}) = \hat{a}_{21}$.

□	#	0	0	0	...	0	#	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	...	#	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	□
□	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	...	$\hat{a}_{2n}$	...	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	...	$\hat{a}_n$	□

▲q_4

На данном этапе ***MT^sq*** потребовала порядка $N_2 = (3n+4)(m+1)$ шагов (*команд*) с дополнительным алфавитом $Q_2 = \{q_3,q_3^t,q_4\}$ [$t \in \{*\} \cup A$; $\#(Q_2) = a + 3$] состояний ***КА*** машины, тогда как алфавит на ленте остался неизменным. Последующие этапы предназначены для приведения организации полученной ***КФ*** на ленте ***MT^sq*** к полному соответствию с организацией представления на ленте исходной конфигурации c_o. В частности, *третий* этап предназначен для замены подсостояний первого уровня состояний конфигурации на ленте на второй, что весьма просто обеспечивается двумя командами машины ***MT^sq***, а именно:

$(xy)q_4 \to (yy)q_4(-1)$ $\quad$ $(\square\square)q_4 \to (\square\square)q_5(1)$ $\quad$ $x, y \in \{\#\} \cup A$

□	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	...	$\hat{a}_{2n}$	...	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{m1}$	$\hat{a}_{m2}$	...	$\hat{a}_{mn}$	□
□	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	...	$\hat{a}_{2n}$	...	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	...	$\hat{a}_n$	□

▲q_5

В результате выполнения этой группы команд на ленте будет сформирована вышеприведенная конфигурация, затребовав порядка $N_3=(n+2)(m+1)+1$ шагов с *дополнительным* алфавитом $Q_3=\{q_5\}$ состояний ***КА*** машины, однако алфавит на *выходной* ленте машины MT^sq остался без изменения. Наконец, заключительный этап обеспечивает сдвиг подсостояний *первого* уровня состояний ***КФ*** на $(n+2)$ ячеек вправо, реализуемый следующей группой команд, а именно:

$$(\#\#)q_5 \to (\#\#)q_6(1) \qquad (oo)q_6 \to (o\tilde{o})q_6(1) \qquad o\in A;\ \tilde{o}\in\tilde{A};\ u,v,h\in\{\#\}\cup A$$
$$(\#\#)q_6 \to (\#\#)q_7(-1) \qquad (o\tilde{o})q_7 \to (o\tilde{o})q_7(-1) \qquad (\#\#)q_7 \to (\#\#)q_7^{\#}(0)$$

Предыдущие **5** команд подсостояния *второго* уровня для *первых* двух строк сгенерированной ***КФ*** $c_o\tau^{(3)}$ заменяют символами из $\tilde{A}$-алфавита, которые *взаимно* однозначно соответствуют символам алфавита A, однако с *верхней тильдой* **(~)**, например, $o\in A$ и $\tilde{o}\in\tilde{A}$. Делается это с той целью, чтобы было возможно контролировать величину сдвига первого *подуровня* на $(n+2)$ ячеек ленты вправо. Данная работа потребовала $N_4 = (2n+5)$ шагов (*команд*) машины MT^sq.

$$(uv)q_7^h \to (hv)q_7^u(1) \qquad (o\tilde{o})q_7^{\#} \to (\#\tilde{o})q_7^o(1) \qquad (\#o)q_7^0 \to (0o)q_7^{\#}(1)$$
$$(□□)q_7^u \to (u0)q_8(-1) \qquad (uv)q_8 \to (uv)q_8(-1) \qquad (\#\tilde{o})q_8 \to (\#o)q_7^0(0) \qquad (uv)\neq(\#\#)$$
$$(\#\#)q_8 \to (\#\#)q_9(1) \qquad (xy)q_9 \to (xy)q_9(1) \qquad (\#0)q_9 \to (\#\#)q_9(1) \qquad (xy)\neq(\#0)$$
$$(□□)q_9 \to (□□)q_0(-1) \qquad \tilde{o}\in\tilde{A};\ o\in A;\ x,y\in\{\#\}\cup A \qquad v\in\{\#\}\cup A\cup\tilde{A};\ u,h\in\{\#\}\cup A$$

В результате выполнения этой группы команд на ленте будет сформирована нижеприведенная конфигурация, затребовав порядка $N_5 = 2(n+2)^2(m+1)+(n+2)(3-m)$ команд с дополнительным Q_4 алфавитом $Q_4 = \{q_6..q_9, q_7^h\}$ $[h\in\{\#\}\cup A;\ \#(Q_4) = a+5]$ состояний ***КА*** машины, тогда как алфавит на ленте машины MT^sq расширен дополнительным алфавитом $\tilde{A}$, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами A-алфавита.

□	#	0	0	0	...	0	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	...	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{m1}$	$\hat{a}_{m2}$	...	$\hat{a}_{mn}$	□
□	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	...	$\hat{a}_{1n}$	#	$\hat{a}_o$	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	...	$\hat{a}_{2n}$	...	#	0	0	0	...	0	□

▲q_o

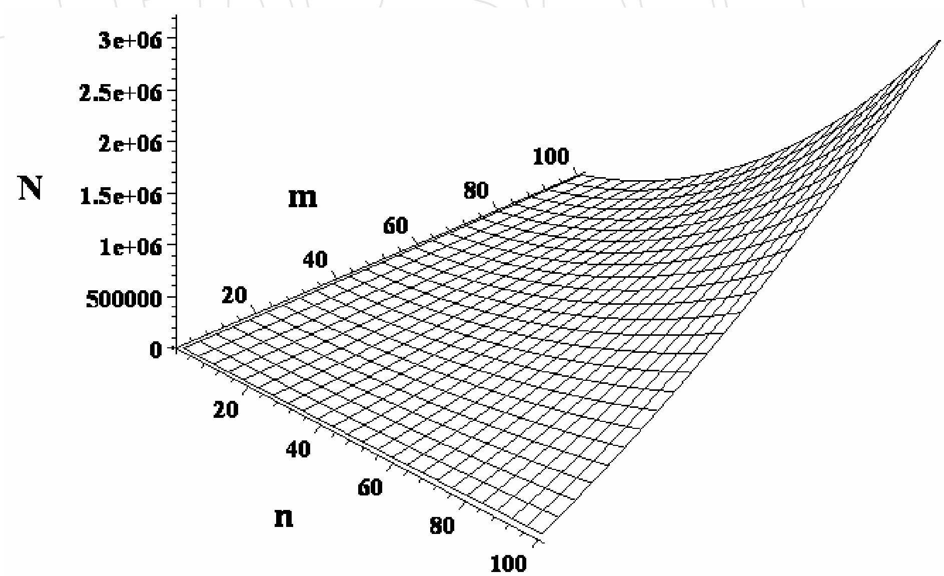
Между тем, несложно убедиться, что полученная конфигурация ленты машины MT^sq является представлением конфигурации $c_o\tau^{(3)}$, т.е. MT^sq со следующими определяющими параметрами:

$$S=\left\{\begin{matrix} □ & \# & * & x & x & \# & \# & x \\ □' & \#' & *' & y' & \tilde{y}' & y' & \tilde{y}' & \# \end{matrix}\right\} \qquad \#(S)=2a^2+3a+3 \quad (x,y\in A,\ \tilde{y}\in\tilde{A})$$

$$Q=\left\{q_o\dots q_9, q_o^{xy}, q_o^{**}, q_o^{\#\#}, q_3^h, q_7^t\right\} \qquad \#(Q)=a^2+2a+14 \quad (h\in\{*\}\cup A,\ t\in\{\#\}\cup A)$$

за число шагов порядка $N=(n+1)m^2+(2n^2+13n+15)m+2n(n+9)+28$ при сделанных предположениях реализует моделирование одного шага произвольной классической структуры **2-ОС.**

Как следует из вышесказанного, ценой данного моделирования являются весьма существенные временные издержки, выражаемые количеством команд, затребованных *моделирующей* MT^sq для реализации лишь одного шага *моделируемой* структуры **2-ОС** с индексом соседства простейшего вида. При этом, временные издержки определяются размерами исходной ***КФ*** c_o в *моделируемой* структуре как функция $N(n,m)$, приведенная выше, с ростом размера конфигураций растущая весьма быстро, как это иллюстрирует нижеследующий график ***N*-**функции, полученный в среде пакета ***Maple*** [112,116-118]. Между тем, сказанное относится лишь к эффективности реализации *моделирующего* алгоритма, а не к вопросу принципиальной возможности такого моделирования. В принципе, ничего сверхординарного в использованном подходе к обоснованию возможности *моделирования* классической структуры ***2-ОС*** посредством соответствующей MT^sq нет, а на этом моменте нами и раньше акцентировалось определенное *внимание*. Исходя из хорошо известного постулата, любой алгоритм реализуем на соответствующей машине Тьюринга, остаются только вопросы сугубо технического характера – алгоритмизация и программирование.



Трудно разрешимая задача – это задача, для решения которой не существует полиномиального по времени алгоритма. Причем, эти задачи не могут быть эффективно (*за полиномиальное время*) решены даже с помощью недетерминированного вычислительного устройства, обладающего способностью параллельно выполнять неограниченное количество *независимых* вычислений. Все известные задачи, трудно решаемость которых доказана, либо вовсе неразрешимы, либо трудно решаемы даже на недетерминированном вычислительном устройстве. В данном смысле задачу моделирования классических ***2-ОС*** посредством ***1-ОС*** с полным основанием возможно отнести к классу трудно разрешаемых задач из-за требуемого для их решения времени, растущего больше *полиномиального* с ростом размера конфигураций моделируемой динамики исходной структуры. Правда, лишь в том случае, если не будет обнаружено намного более быстрого моделирующего алгоритма, что представляется нам довольно непростой (*если вообще решаемой*) задачей. Пока же отнесение ее к классу трудно разрешаемых задач вполне уместно.

Таким образом, произвольная *классическая* структура $2\text{-}OC \equiv \langle Z^2, A, \tau^{(3)}, X\rangle$ с *простейшим* индексом соседства $X = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ моделируется машиной MT^sq с $\#(S) = 2a^2+3a+3$ и $\#(Q) = a^2+2a+15$. При этом, один шаг $c_o\tau^{(3)}$ структуры MT^sq моделирует за ***N*** шагов, где ***(nxm)*** – размер минимального прямоугольника, содержащего ***КФ*** $c_o \in C(A,2,\phi)$. С другой стороны, согласно теореме ***96*** следует, что для *произвольной* машины MT^sq существует *классическая* структура ***1-ОС*** с индексом соседства $X = \{-1,0,1\}$ Неймана-Мура и алфавитом ***B*** мощности $\#(B) = s+q+9$, которая ее ***8***-моделирует. Таким образом, произвольная классическая структура $2\text{-}OC \equiv \langle Z^2, A, \tau^{(3)}, X\rangle$ моделируется классической структурой $1\text{-}OC \equiv \langle Z^1, B, \tau^{(3)}, \{-1,0,1\}\rangle$ $\{\#(B) = 3a^2+5a+26\}$, что и завершает доказательство теоремы.

Представленный нами выше подход предназначен для моделирования историй конфигураций $\langle c_o\rangle = \{c_o\tau^{(3)k} \mid k = 0,1,2,3, \ldots\}$ $[c_o \in C(A,2,\phi)]$, однако с небольшой модификацией работает и в случае, когда ***КФ*** c_o являются *периодическими* в структурном, а не в динамическом смысле. В этом случае мы будем иметь дело не с конечной ***КФ*** c_o, а с ее конечным периодом. Таким образом, редукция представленных результатов позволяет нам сформулировать следующее достаточно интересное предложение, а именно.

<u>Предложение 26</u>. Произвольная классическая структура d-ОС (d≥1) моделируется посредством классической 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура.

В то же самое время следует еще раз подчеркнуть, вышепредставленный подход обеспепечивает моделирование динамики лишь конечных и/или структурно-периодических ***КФ*** в *классических* стабильных ***d-ОС (d ≥ 1)*** и на более общий случай не распростаним.

Использованный при доказательстве теоремы прием ***структурирования*** состояний ***КА*** машины Тьюринга и символов алфавита ее ленты довольно продуктивен, позволяя в целом ряде случаев существенно упрощать программирование MT^sq, а также погружать в ***ОС***-модели те либо иные процессы, явления, объекты и феномены. Между тем, имеет он и свои недостатки, прежде всего, *оптимизационного* характера – *упрощая* процесс программирования в ***ОС***-моделях, в ряде случаев оптимизируя временные характеристики; вместе с тем, он усложняет сами ***ОС***-модели, прежде всего, путем увеличения (*в целом ряде случаев и существенного*) мощности множества внутренних состояний единичного автомата структуры. Именно поэтому такой подход может быть успешно использован для *концептуального* решения задач ***ОС***-проблематики, а не *оптимизационных* задач, связанных со сложностью ***ОС***-моделей. Проиллюстрируем использование данного подхода для задачи моделирования MT^sq посредством структуры ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура.

Начальная ***КФ*** ленты MT^sq представляется начальной конфигурацией структуры ***1-ОС*** вида

$$\ldots[\square]\ldots\begin{bmatrix} s_{k-j} \\ \ \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} s_{k-2} \\ \ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k-1} \\ \ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k \\ q_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ \ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+2} \\ \ \end{bmatrix}\ldots\begin{bmatrix} s_{k+j} \\ \ \end{bmatrix}\ldots[\square]\ldots;\quad \square - \textit{empty symbol}$$

на которой отражено *сканирование* конечным автоматом машины, находящимся в состоянии q_k, s_k-символа на ленте. Команды MT^sq имеют вид $s_kq_k \to s^*_kq^*_k(\{-1|0|1\})$, где $\{-1|0|1\}$ обозначает соответственно сдвиг головки машины MT^sq влево, без сдвига и вправо.

$$\begin{bmatrix} s_{k-2} & s_{k-1} & s_k \\ & & q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k-1} \\ \ \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_{k-1} & s_k & s_{k+1} \\ & q_k & \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_k^* \\ \ \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_k & s_{k+1} & s_{k+2} \\ q_k & & \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ q_k^* \end{bmatrix}\quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} s_{k-2} & s_{k-1} & s_k \\ & & q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k-1} \\ q_k^* \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_{k-1} & s_k & s_{k+1} \\ & q_k & \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_k^* \\ \ \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_k & s_{k+1} & s_{k+2} \\ q_k & & \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ \ \end{bmatrix}\quad (-1)$$

$$\begin{bmatrix} s_{k-2} & s_{k-1} & s_k \\ & & q_k \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k-1} \\ \ \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_{k-1} & s_k & s_{k+1} \\ & q_k & \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_k^* \\ q_k^* \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} s_k & s_{k+1} & s_{k+2} \\ q_k & & \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ \ \end{bmatrix}\quad (0)$$

$$\begin{bmatrix} s_{k-1} & s_k & s_{k+1} \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} s_k \end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix} \square & \square & \square \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} \square \end{bmatrix}\qquad s_kq_k \;\to\; s_k^*q_k^*(\{-1|0|1\})$$

Из вышеприведенной локальной функции перехода моделирующей ***1-ОС*** несложно убедиться, что имеет место следующее достаточно полезное предложение.

<u>Предложение 27</u>. Произвольная машина MT^sq 1-моделируется классической структурой 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура и алфавитом А мощности #(А) = q(s + 1) + 1.

Таким образом, в этом случае использованный метод *структурирования* состояний обеспечивает простоту алгоритма моделирующей структуры ***1-ОС*** и ее индекса соседства, оптимальное время моделирования, существенно увеличивая мощность алфавита внутренних состояний. При этом, возможно существенно снизить мощность алфавита внутренних состояний, в частности, за счет усложнения индекса соседства моделирующей структуры.

Более того, используя метод *структурирования* состояний, докажем возможность моделирования произвольной $MT^s q$ *классической* структурой **1-ОС** с *простейшим* индексом соседства $X=\{0,1\}$. Как и ранее начальная **КФ** ленты $MT^s q$ представляется начальной c_o-конфигурацией **1-ОС** вида:

$$t=0 \quad c_o = \ ...[\square]\left[s_{k-j}\right]...\left[s_{k-2}\right]\left[s_{k-1}\right]\left[s_k/q_k\right]\left[s_{k+1}\right]\left[s_{k+2}\right]...\left[s_{k+j}\right][\square]...;\quad \square - \textit{empty symbol}$$

Для моделирующей ее классической **1-ОС** с простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$ определяем локальную функцию перехода $\sigma^{(2)}$ следующими параллельными подстановками, а именно:

$$s_k s_{k+1} \to \begin{bmatrix} s_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \quad s_k\square \to \square \quad \square s_k \to \square \quad \square\square \to \square \quad \left[s_k/q_k\right]s_{k+1} \to \begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \quad s_{k-1}\left[s_k/q_k\right] \to \begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}$$

После применения к **КФ** c_o заданных параллельных подстановок в следующий момент времени $t=1$ получаем нижеследующую конфигурацию c_1 структуры, а именно:

$$t=1 \quad c_1 = \ ...[\square]\begin{bmatrix} s_{k-j} \\ s_{k-j+1} \end{bmatrix}...\begin{bmatrix} s_{k-2} \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+2} \\ s_{k+3} \end{bmatrix}...\begin{bmatrix} s_{k+j} \\ s_{k+j+1} \end{bmatrix}[\square]...$$

Доопределим теперь мы **ЛФП** $\sigma^{(2)}$ моделирующей **1-ОС** группами параллельных подстановок в зависимости от типа сдвига сканирующей головки моделируемой машины $MT^s q$, а именно:

$$\begin{bmatrix} s_{k-1} \\ s_k \end{bmatrix}[\square] \to \left[s_k\right] \qquad [\square]\begin{bmatrix} s_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \to \left[s_k\right] \qquad \begin{bmatrix} s_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix} \to \left[s_{k+1}\right]$$

$$s_k q_k \to s_k^* q_k^*(1) \quad - \quad \textit{shift right}$$

$$\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix} \to \left[s_{k+1}/q_k^*\right] \quad \begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \to \left[s_k^*\right] \quad \begin{bmatrix} s_{k-2} \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix} \to \left[s_{k-1}\right]$$

$$s_k q_k \to s_k^* q_k^*(0) \quad - \quad \textit{fixed head}$$

$$\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix} \to \left[s_{k+1}\right] \quad \begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \to \left[s_k^*/q_k^*\right] \quad \begin{bmatrix} s_{k-2} \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix} \to \left[s_{k-1}\right]$$

$$s_k q_k \to s_k^* q_k^*(-1) \quad - \quad \textit{shift left}$$

$$\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \end{bmatrix} \to \left[s_{k+1}\right] \quad \begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k+1} \end{bmatrix} \to \left[s_k^*\right] \quad \begin{bmatrix} s_{k-2} \\ s_{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_k/q_k \\ s_{k-1} \end{bmatrix} \to \left[s_{k-1}/q_k^*\right]$$

Нетрудно убедиться, что на следующем шаге **(t=2)** моделирующая **1-ОС** в зависимости от типа сдвига сканирующей головки сгенерирует конфигурацию следующего вида, а именно:

$$t=2 \quad \begin{cases} ...[\square]\left[s_{k-j}\right]...\left[s_{k-2}\right]\left[s_{k-1}\right]\left[s_k^*\right]\left[s_{k+1}/q_k^*\right]\left[s_{k+2}\right]\left[s_{k+3}\right]...\left[s_{k+j+1}\right][\square]... & (1) \\ ...[\square]\left[s_{k-j}\right]...\left[s_{k-2}\right]\left[s_{k-1}\right]\left[s_k^*/q_k^*\right]\left[s_{k+1}\right]\left[s_{k+2}\right]\left[s_{k+3}\right]...\left[s_{k+j+1}\right][\square]... & (0) \\ ...[\square]\left[s_{k-j}\right]...\left[s_{k-3}\right]\left[s_{k-2}\right]\left[s_{k-1}/q_k^*\right]\left[s_k^*\right]\left[s_{k+1}\right]\left[s_{k+2}\right]...\left[s_{k+j+1}\right][\square]... & (-1) \end{cases}$$

Теперь уже несложно убедиться в справедливости следующего утверждения, а именно:

Классическая структура 1-ОС с алфавитом внутренних состояний А и простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$ 2-моделирует произвольную машину $MT^s q$ при условии $\#(A) = s(s+1)(q+1)+1$.

Неформально двумерная **МТ** является еще одной модификацией *классической* машины *Тьюринга*, не увеличивающей ее вычислительной мощности. Она состоит из обычного **КА**, однако ее лента разбита на бесконечное количество ячеек, расположенных в двух измерениях. В зависимости от состояния и сканируемого символа **КА** машины изменяет состояние, печатает новый символ и передвигает головку в одном из четырех направлений либо оставляет ее на месте. Аналогичный вышеприведенному прием позволяет легко доказать следующее утверждение, а именно:

Произвольная машина $MT^s q$ с двухмерной лентой 1-моделируется структурой 2-ОС с индексом соседства Неймана и алфавитом A мощности #(A) = q(s+1) + 1.

Доказательство этого утверждения оставляем читателю в качестве весьма простого упражнения. В этом же контексте представляется довольно интересным рассмотреть и моделирование других типов машины *Тьюринга* посредством классических ***ОС***.

Относительно проблемы взаимного моделирования таких формальных вычислителей как $\boldsymbol{MT^s q}$ (*последовательного действия*) и ***ОС*** (*высоко параллельного*) следует сделать довольно существенное замечание. Если в *первом* случае результат вычисления определяется переходом ***КА*** вычислителя в некоторое заключительное ***q****-состояние {*что вполне естественно для присущей* ***МТ*** *организации – внешняя память (лента) и устройство управления* ***(УУ/КА)***}, то для децентрализованной ***ОС****-модели* вычислителя, не обладающего ***УУ***, ситуация совершенно иная. Прежде всего, ***ОС***-вычислитель – генератор бесконечных последовательностей ***КФ***, начиная с некоторой начальной ***КФ***. Поэтому в качестве результата вычисления таким вычислителем естественно полагать ***(1)*** *достижение* ***КФ***, содержащей некоторый финальный символ-состояние, либо **(2)** достижение *пассивной* ***КФ*** – как результата вычисления. Однако, если при формальных построениях это вполне приемлемо, то при практической реализации ***ОС***-вычислителя данная проблема много сложнее, чем в случае с *машинами Тьюринга*. По этой причине нами в процессе исследования вышеупомянутых вопросов моделирования в классических ***ОС*** использовались оба указанных предположения.

6.4. Специальные вопросы моделирования в классических однородных структурах, связанные с их динамическими свойствами

Хорошо известно, моделирование в среде классических структур ***d-ОС*** является многоаспектной проблемой, включающей в себя такие довольно важные вопросы как: моделирование в реальное время, оптимальное *моделирование* по выбранным критериям оптимизации, методы и принципы упрощения процесса моделирования, получение оценок сложности взаимного моделирования структур, моделирование *отдельных* алгоритмов, объектов, процессов и явлений, моделирование в определенных классах структур и при различных условиях, др. В предыдущих разделах главы рассматривались вопросы моделирования в классических ***d-ОС*** без каких-либо дополнительных условий для моделирующих структур. И здесь мы представим результаты моделирования, когда на моделирующую классическую структуру накладываются определенные *ограничения* (*условия моделирования*), имеющие тот либо иной смысл и интерпретацию.

1. Интересный круг вопросов возникает в связи с моделированием динамики ***d-ОС (d≥1)*** одного класса структурами из другого класса. Здесь также представляют интерес вопросы оптимизации *моделирующих* структур и оценки их сложности. В частности, при обсуждении степени *общности* классических структур ***1-ОС*** был получен результат по моделируемости недетерминированных ***1-ОС*** классическими структурами [5,53,88].

<u>Теорема 109</u>. Любая недетерминированная структура SH(1,a,n,N) может быть смоделирована подходящей классической структурой 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура и алфавитом A* мощности #A* = $N(a^{n+1} - 1)/(a - 1) + a + n$.

Результат данной теоремы обобщается на ***d***-мерный случай, в определенной мере характеризуя степень общности классических ***ОС***-моделей. Здесь также представляются весьма интересными вопросы оптимизации моделирующих структур и оценки их сложности.

Интересные результаты по *стохастическим структурам* ***d-ОС*** были получены ***А. Матевосяном*** [182], исследовавшим вопрос возможности построения стохастической структуры, *универсальной* над некоторым классом стохастических структур той же самой размерности. Им был предложен один подход к моделированию одних стохастических ***d-ОС*** другими из того же класса, в рамках которого разработаны конструкция моделирующей структуры и соответствующая ей методика моделирования. На основе такого типа моделирования доказано существование ***R**-универсальных* стохастических ***d-ОС*** и исследованы оценки соответствующих сложностных и временных затрат моделирования. Наряду с этим показано, что для определенных подклассов ***B*** стохастических ***d-ОС*** существует универсальная бинарная стохастическая ***d-ОС***, моделирующая любую структуру из ***B***-класса в реальное время. Предложенный в работе [182] подход к изучению стохастических ***d-ОС*** было бы интересно применить и для изучения ряда других феноменов, рассматриваемых в математической ***ТОС***-проблематике и ее многочисленных приложениях.

2. Большой интерес представляет изучение динамических свойств ***ОС***-моделей в зависимости от типа их *локальных функций перехода* (***ЛФП***). Так в монографии [3] выделяются *два* больших класса ***ОС***-моделей с симметричными (***SF**-класс*) и асимметричными (***ASF**-класс*) ***ЛФП***. Можно показать, что ***SF***-класс образует *полугруппу* относительно операции *композиции*. *Композиция* симметричной и асимметричной ***ЛФП*** всегда дает асимметричную функцию, но существуют асимметричные ***ЛФП***, чьи композиции дают симметричную функцию. Например, простые ***ЛФП***, определенные соотношениями следующего вида:

$$\sigma_1^{(2)}(x,y) = xy^2 \pmod a; \qquad \sigma_2^{(2)}(x,y) = y^2 x \pmod a \qquad (a \geq 3)$$

в результате композиции дают симметричную ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}(x,y,z) = x^2y^5z^2 \pmod a$.

Относительно классов ***SF*** и ***ASF*** классических ***ОС***-моделей показано, в смысле вычислительных возможностей они эквивалентны, т.е. *универсальными классическими* ***ОС***-моделями обладают оба указанных класса. Между тем, по ряду других характеристик классы ***SF*** и ***ASF*** структур могут и существенно различаться. Так, в частности, существенные различия имеют место относительно структуры множеств неконструируемых ***КФ*** и конструктивных возможностей в *классических* ***ОС***-моделях с симметричными и асимметричными ***ЛФП***, что несомненно должно приниматься во внимание в во многих модельных приложениях [3,5,8,9,53-56,88,536].

Действительно, многие процессы и алгоритмы носят *ярко* выраженный *асимметричный* характер (*хотя в их основе на низших уровнях могут иметь место различной степени симметричные элементы*) и их намного проще погружать в *классические* ***ОС***-модели с асимметричными ***ЛФП***. Естественно, ввиду сказанного такие процессы и явления могут симулироваться *классическими* ***ОС***-моделями как с *симметричными*, так и с *асимметричными* ***ЛФП***, но для функций *первого* типа требуется, как правило, увеличение размера шаблона соседства, времени моделирования, мощности алфавита внутренних состояний моделирующей структуры относительно аналогичных структур *второго* типа. В качестве примера приведем интересный результат моделирования *произвольной* машины Тьюринга MT^s_q посредством классической структуры ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура и симметричной ***ЛФП*** [53]. Под симметричной нами понимается ***1***-мерная ***ЛФП***, определяемая параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n \rightarrow x^*_1 \quad \text{и} \quad (x_1x_2x_3 \ldots x_n)^R \rightarrow x^*_1 \quad (x_k, x^*_1 \in A;\ k=1 \ldots n)$$

где X^R – кортеж, симметричный ***X***-кортежу. Естественно, обобщение понятия ***симметричности ЛФП*** на случай высших размерностей особых затруднений не вызывает.

<u>Теорема 110</u>. Если машина MT^s_q реализует некоторый S-алгоритм за время T, то существует классическая структура 1-ОС с A-алфавитом внутренних состояний мощности #A=2(s+2q+1), индексом соседства Неймана-Мура и симметричной ЛФП, моделирующая этот же S-алгоритм за время не хуже, чем 4T.

Метод доказательства данной теоремы позволяет распространить полученный результат также на случай классических ***ОС***-моделей высших размерностей, но тогда возникает необходимость расширения алфавита внутренних состояний *моделирующей* структуры. Полученный результат не только еще раз подтверждает эквивалентность классических ***ОС***-моделей с симметричными и асимметричными ***ЛФП*** относительно их *вычислительных* возможностей, но в определенной мере иллюстрирует сложность моделирования в целом асимметричного алгоритма симметричными ***d-ОС (d≥1)***. В данном направлении интересные результаты получены также ***Х. Шверински*** [156] и ***Я. Кобуши*** [9,395], доказавшими возможность моделирования в реальное время произвольной классической ***1-ОС*** структурой той же самой размерности с индексом соседства Неймана-Мура и симметричной ***ЛФП***. Более того, моделирование в их работах рассматривалось относительно лишь множества ***C(A,ϕ)*** конечных ***КФ*** без сколько-нибудь серьезной *оптимизации*, что сказалось на параметрах моделирующих структур.

В связи с этим, нам хотелось бы еще раз акцентировать внимание на мнении, что оба класса ***SF*** и ***ASF*** *классических* ***ОС***-моделей обладают целым рядом специфических черт, но если исходить из более практических соображений, то между ними существуют два основных отличия, а именно: класс ***ОС***-моделей с *симметричными* ***ЛФП (ГФП)*** оказывается намного проще для практической реализации и представляет интерес с точки зрения ряда *биологических* интерпретаций (*например, симметричность* ***ЛФП*** *можно ассоциировать с отсутствием некоторого градиента при моделировании такими структурами того либо иного биологического феномена; в среде такого типа* ***ОС***-*моделей более естественно представляются и нейроподобные системы и т.д.*), тогда как классические ***ОС***-модели с асимметричными ***ЛФП*** в общем случае существенно лучше приспособлены к моделированию различных процессов и алгоритмов, т. е. обладают большей степенью конструктивности по ряду основных факторов. Действительно, как показывает опыт, для ярко выраженных *асимметричных* процессов, вообще говоря, невозможно удовлетворительно решать в среде *симметрических* ***d-ОС (d ≥ 1)*** задачи оптимизационного характера [536,567].

При моделировании в классических ***d-ОС (d ≥ 1)*** весьма важной является проблема *оптимального* моделирования того или иного объекта, алгоритма или явления. *Оптимизация* рассматривается, как правило, относительно основных параметров *моделирующей* структуры (*мощности алфавита внутренних состояний, размера* ***ШС***, *размерности структуры и времени моделирования*). В этом плане несомненный интерес представляет оптимизация *классической* ***d-ОС (d ≥ 1)*** с *симметричной* ***ЛФП***, *моделирующей* структуру той же размерности с *асимметричной* глобальной функцией перехода. В ***1***-мерном случае в данном направлении имеет место следующий основной результат [5,53,88,90].

Теорема 111. Произвольная классическая структура 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура моделируется структурой той же размерности и с тем же индексом соседства, алфавитом A* внутренних состояний мощности $2(4a^2+5a+12)$ и симметричной ЛФП за время не хуже, чем 4L; где L – длина перерабатываемой конечной КФ в моделируемой классической структуре.

Доказательство данной теоремы проводилось в два этапа: на *первом* этапе определялась машина *Тьюринга*, моделирующая произвольную классическую ***1-ОС***, затем к ней применялся результат теоремы ***110***. Исследования по проблеме *оптимизации* параметров моделирующих классических структур ***d-ОС*** представляют существенный интерес и им необходимо уделять соответствующее внимание, хотя подобные задачи представляются весьма *сложными* как, впрочем, и большинство задач оптимизации в целом. Наряду с целым рядом весьма интересных результатов по взаимной моделируемости классических однородных структур в книге [158] представлено моделирование произвольной классической ***2-ОС*** посредством классической ***2-ОС*** с индексом соседства Мура, алфавитом ***A*** мощности ***a = 7776*** и симметричной ***ЛФП***. Было бы весьма интересно существенно понизить это значение, которое, на наш взгляд, является в значительной степени завышенным.

Для дальнейшего нам понадобится одно полезное свойство симметричных ***ГФП***, определяемых ***ЛФП*** с простейшим индексом соседства ***X={0,1}***. Очевидно, что симметричные ***ЛФП*** с индексом соседства указанного типа определяются локальными параллельными подстановками простого вида $xy \Rightarrow x^*$ $(x,x^*,y \in A)$. Рассмотрим *три* основных случая, а именно: ***(a)*** пусть $(\exists x \neq 0)(x0 \equiv 0x \Rightarrow 0)$, тогда для **1**-мерной симметричной ***ГФП*** существуют исчезающие ***КФ*** уже вида c = □x□ $(x \in A)$, а значит, и ***НКФ*** (теорема **23**); ***(b)*** пусть имеет место следующее определяющее соотношение:

$$(\forall x \neq 0)(x0 \equiv 0x \Rightarrow \rceil 0)\ \&\ (\exists p \neq 0)(\exists k \neq 0)(pk \equiv kp \Rightarrow 0)$$

где $\rceil w$ – операция отрицания w. Но тогда существует ***КФ*** $c^* \in C(A,\infty)$ вида $c^*= ...pkpkpkpk...$ такая, что $c^*\tau^{(2)}$=□, т.е. множество $C(A,\infty)$ незамкнуто относительно симметричной ***ГФП*** классической ***1-ОС***. Поэтому согласно теоремы **29** такая *классическая* ***1-ОС*** будет обладать типами ***НКФ*** и/или ***НКФ-1*** неконструируемости. Наконец, случай ***(c)*** определяется соотношением вида $(\forall x \neq 0)(x0 \equiv 0x \Rightarrow \rceil 0)\&(\forall p,k \neq 0)(pk \equiv kp \Rightarrow \rceil 0)$. В этом случае, как нетрудно убедиться, имеет место соотношение $(\exists p,k,j \neq 0)(pk \equiv kp \Rightarrow v)\ \&\ (pj \equiv jp \Rightarrow v)$, что определяет наличие для ***ГФП*** пар ***ВСКФ*** вида c_1 = □pkp□ и c_2=□pjp□ $\{c_1\tau^{(2)} = c_2\tau^{(2)}\}$, а значит и ***НКФ*** (теорема **18**). Случаи ***(a..c)*** исчерпывают все основные виды локальных параллельных правил подстановки, определяющих симметричные ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ с простейшим индексом соседства, и их анализ позволяет сформулировать следующий полезный для многих последующих рассмотрений основной результат.

<u>Теорема 112</u>. Произвольная классическая структура 1-ОС с симметричной ГФП и простейшим индексом соседства Xn = {0,1} обладает неконструируемостью типов НКФ и/или НКФ-1.

На основе этого результата можно показать, что результат теоремы **111** уже для довольно общих методов моделирования *неулучшаем* в плане сведения к *простейшему* ***ШС*** моделирующей ***1-ОС*** с симметричной ***ГФП***. Точнее, в противовес теореме **111** *произвольная* классическая ***1-ОС*** не может моделироваться классической ***1-ОС*** с симметрической ***ЛФП*** и простейшим индексом соседства ***Xn***={***0,1***}≡{***-1,0***} при использовании довольно широкого класса понятий моделирования. В основу данного предложения положен тот факт, что в условиях целого ряда понятий моделируемости сохраняются такие свойства *моделируемых* структур как наличие/отсутствие типов ***НКФ, НКФ-3*** неконструируемости, ***ВСКФ*** и ***γ-КФ***. Результат теоремы **112** используется при изучении целого ряда аспектов *проблемы декомпозиции* глобальных функций перехода ***ОС***-моделей, обсуждаемой в следующей главе книги. Наряду с этим, результат со всей очевидностью еще раз подтверждает ранее высказанное предположение [5] о более *предпочтительных* конструктивных возможностях моделирования в среде классических ***d-ОС*** ***(d≥1)*** с асимметрическими ***ЛФП*** [5,54-56,88,90,536,567].

3. При изучении вопросов *универсальной* вычислимости и моделирования физических процессов в классических ***d-ОС*** возникает проблема обратимости в таких структурах. Довольно детальное обсуждение данной проблематики представлено в работах [5,90,273,378,536]. Весьма интересным в этой связи оказывается вопрос взаимосвязи свойств *обратимости* и *универсальной* вычислимости в классических ***ОС***-моделях. С данной целью используем понятие «*обратимости*» для динамики классических ***ОС***-моделей согласно определения **12** (глава **2**).

Универсальная вычислимость классических ***ОС***-моделей в нашей [1] и ***А.Р. Смита*** [131] трактовках определяется на основе моделирования структурами *универсальной машины Тьюринга* ***(УМТ)***. Еще ***Э. Кодд*** [125] показал, что необходимым условием универсальной вычислимости в классической ***ОС***-модели является наличие для нее неограниченных по размеру генерируемых конечных ***КФ***. А именно, классическая ***ОС***-модель не обладает свойством универсальной вычислимости, если существует такое целое $k>0$, что имеет место следующее определяющее соотношение, а именно: $(\forall c \in C(A,d,\phi))(\forall t)(max\ D(c\tau^{(n)t}) \leq \alpha D(c))$, где $D(c)$ – диаметр произвольной ***c-КФ***. Данное условие достаточно очевидно и соответствует необходимости наличия *потенциально* бесконечной ленты для ***УМТ***. Между тем, с другой стороны, несложно показать, что указанное условие *достаточным* не является, а именно: ***Простейшая классическая 1-ОС с бинарным алфавитом B, с индексом Xn соседства Xn***={***0,1***} ***и ЛФП*** $\sigma^{(2)}(x,y)=h=x+y \ (mod\ 2)\ \{x,y,h \in B\}$ ***для каждой начальной конечной КФ генерирует только растущие по длине КФ, однако универсальной вычислимостью не обладает.***

Весьма интересным в этой связи оказывается вопрос о взаимосвязи свойств *взаимной стираемости* и *универсальной вычислимости* в классических ***d-ОС***. Так как вычисление, вообще говоря, является необратимым процессом (*зная, например, о том, что число **67** получено в результате сложения пяти чисел, мы не можем однозначно определить исходные слагаемые*), то представляется вполне резонным, что существование в ***d-ОС*** пар ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, должно быть тесно связано со свойством универсальной вычислимости в классических ***ОС***-моделях. Между тем, уже достаточно простые классические ***ОС***-модели, располагающие ***ВСКФ (НКФ)***, не допускают свойства универсальной вычислимости. Например, бинарная ***1-ОС*** с индексом соседства ***X***=$\{0,1\}$ и ***ЛФП*** вида $\{\sigma^{(2)}(1,1)=1$ *и* $\sigma^{(2)}(x,y)=0$ *в противном случае*$\}$ обладает ***ВСКФ*** и ***НКФ*** уже в виде *блочной* ***КФ с=101***, однако для нее отсутствует свойство универсальной вычислимости. Значит, наличие для классической ***ОС***-модели ***ВСКФ (НКФ*** *и, возможно,* ***НКФ-3)*** не является достаточным условием для обладания ею свойством *универсальной* вычислимости. С другой стороны, на основе вышеупомянутого подхода к определению *универсальной вычислимости* было показано, что существование пар ***ВСКФ (НКФ)*** является *необходимым* условием для обладания классической структурой ***1-ОС*** данного свойства при условии использования только конечных конфигураций [1,3,5]. Этот результат в свое время вызвал широкую дискуссию и стимулировал дальнейшие исследования в данном направлении [1,3-5,29,30,43,53-56,63,66,68,70,73,77,80,88,90,160,184-187,258,259,263,268,273,314,318,536]. Между тем, на основе несколько иных подходов ***K. Morita*** доказал существование обратимой ***1-ОС***, которая симулирует произвольную ***1-ОС***, включая и *необратимые*, а ***J. Dubacq*** [536] доказал возможность симулирования машин Тьюринга обратимыми ***1-ОС***. ***T. Toffoli*** доказал [268] факт возможности моделирования произвольной структуры ***d-ОС*** обратимой ***(d+1)-ОС (d ≥ 1)***, доказав тем самым вычислительную универсальность обратимых ***d-ОС (d≥2)***. Тогда как ***K. Morita*** и другие доказали вычислительную универсальность обратимых ***1-ОС*** [321,322].

Поэтому, в связи со сказанным представляет особый интерес вопрос *моделирования* необратимых классических ***d-ОС*** *обратимыми* и в этой связи вопрос наличия обратимых универсальных ***d-ОС (d≥1)***. Так ***Т. Тоффоли*** [150,268,273,318,430], работая по результатам ***Аладьева-Смита***, связанным с проблемой вычислимости в классических ***ОС***-моделях, показал, что несмотря на полученные ими результаты, существуют обратимые универсальные классические ***ОС***-модели. А точнее, он доказал, что любая классическая ***d-ОС*** конструктивно погружаема в *обратимую* ***(d+1)-ОС*** того же класса, для которой *алгоритмически разрешима* проблема генерации неограниченных по размеру *конечных* ***КФ***. Таким образом, данный результат ***Т. Тоффоли*** [430] не противоречит полученным ранее нашим результатам и указанная ситуация *обусловливается* рядом довольно существенных факторов, определяющих эти противоречия; прежде всего, это связано с использованием разных понятий ***обратимости*** динамики классических ***ОС***-моделей, суть которых достаточно детально обсуждается также и в настоящей монографии.

Прежде всего, мы и ряд других исследователей, с одной стороны, и ***Т. Тоффоли*** и ряд других, с другой стороны, использовали принципиально различные подходы к понятию моделирования одной классической ***d-ОС*** другой, в результате чего ***Т. Тоффоли*** использовал более общий метод моделирования с увеличением размерности моделирующей структуры, что является достаточно существенной платой за полученный результат. Более того, под *обратимостью* ***Т. Тоффоли*** и ряд других исследователей понимают отсутствие для *моделирующей* структуры *взаимной стираемости (неконструируемости типов* ***НКФ и НКФ-3)***, тогда как мы понимаем отсутствие для ***d-ОС*** также и неконструируемости типа ***НКФ-1***, обоснование чего представлено выше. Использованный же ***Т. Тоффоли*** подход не только требует увеличения размерности моделирующей структуры, но и не освобождает также ее от неконструируемости типа ***НКФ-1***, не позволяя считать моделирующую структуру в полной мере обладающей свойством ***обратимости*** ее динамики.

Наряду с этим, ***Т. Тоффоли*** [318] для построения обратимых ***ОС***-моделей использовал также и структурный подход, представляя единичный автомат модели простой логической схемой из ***3*** элементов. Анализ данного подхода показывает, что обратимость достигается за счет неявного увеличения мощности алфавита состояний и относится к некоторому его подмножеству. Тогда как *глобальной обратимости* относительно расширенного алфавита не достигается. Тогда как мы под ***обратимостью*** классической структуры ***d-ОС*** понимаем именно ***глобальную обратимость*** динамики. В данном случае мы имеем дело с ситуацией, довольно схожей с проблемой удвоения классической ***1-ОС*** произвольной конечной ***КФ***, а именно: ***Определенная в А-алфавите 1-ОС не может удваивать произвольную конечную КФ, заданную в том же А-алфавите, однако решая эту же проблему за счет расширения исходного А-алфавита всего на один символ.***

И здесь весьма уместно обсудить два уровня ***обратимости –*** *локальный* и *глобальный*. ***Локальный*** уровень имеет ввиду *обратимость* в любой момент $t>0$ каждой *блочной* c_b***-КФ***, т.е. существование для нее *блочной* $c`_b$***-КФ*** (*блок которой содержит все автоматы и соседние им автоматы блока* $c_b$***-КФ***) такой, что $c`_b\tau^{(n)}=c_b$. Тогда как *глобальный* уровень подразумевает обратимость уже относительно конечных ***КФ*** в целом, т.е. существование для любой конечной ***c-КФ*** такой конечной ***c`-КФ***, что имеет место соотношение $c`\tau^{(n)}=c$. Очевидно, *глобальная* обратимость влечет за собой и *локальную* обратимость, тогда как обратное в общем случае неверно. Данное обстоятельство мотивируется наличием двух неэквивалентных типов неконструируемости в классических ***ОС***-моделях ***– НКФ (НКФ-3)*** и ***НКФ-1***, достаточно детально рассмотренных нами выше.

На уровне физических интерпретаций в определенном смысле вполне уместной представляется некоторая *аналогия* между *глобальной* и *локальной обратимостью* физических процессов на макро- и микроуровнях. И если обратимый макропроцесс обусловлен результатом действия обратимых микропроцессов, результатом действия *обратимых* микро-процессов может быть и необратимый макропроцесс. В полной мере данная *аналогия* может быть отнесена и к случаю вычислительных процессов, определяя качественные различия *макро*- и *микроуровней* процессов в целом [591-593].

В связи с вышесказанным возникает интересный вопрос: ***Может ли произвольная классическая d-ОС моделироваться обратимой d-ОС (d≥1)?*** Данный вопрос в свою очередь порождает целый ряд сопутствующих вопросов, в той либо иной мере характеризующих проблему *обратимости* в классических ***ОС***-моделях. В общем случае такие вопросы составляют проблему моделирования произвольной классической ***d-ОС*** ($d \geq 1$) структурой тех же класса и размерности, подавляющей заданные свойства *моделируемой* структуры. В отношении *глобальной* обратимости, определяемой наличием неконструируемости типа ***НКФ-1***, получен следующий основной результат [5].

<u>Теорема 113</u>. Произвольная классическая структура d-ОС (d≥1) 1-моделируется структурой из того же класса с минимальным расширением алфавита А внутренних состояний и при наличии для нее НКФ-2, но не обладающей неконструируемостью типа НКФ-1.

Доказательство данного утверждения довольно прозрачно и сводится к следующему. Положим, что некоторая классическая ***d-ОС*** обладает ***НКФ-1***, но тогда для нее существуют ***КФ*** $c \in C(A,d,\infty)$ такие, что $c\tau^{(n)} = c^* \in C(A,d,\phi)$. Очевидно, что ***d-ОС*** не будет обладать ***НКФ-1***, но обладать ***НКФ-2***, если множество ***КФ*** $C(A,d,\infty)$ будет замкнутым относительно ее глобального преобразования $\tau^{(n)}$ структуры. Исходя из таких предпосылок, несложно определить ***d-ОС***, не обладающую ***НКФ-1***, обладающую ***НКФ-2*** и ***1***-моделирующую произвольную структуру той же размерности $d \geq 1$. Не нарушая общности, проиллюстрируем это на *примере* моделирования произвольной структуры ***1-ОС***. Хорошо известно [1,5], каждая классическая структура ***1-ОС*** моделируется с замедлением времени и расширением алфавита посредством ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства $X=\{0,1\}$.

Рассмотрим произвольную классическую структуру ***1-ОС*** с алфавитом ***A*** внутренних состояний, простейшим индексом соседства $Xn=\{0,1\}$ и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}(x,y)=x`$ $(x,y,x` \in A)$. Тогда как *моделирующую* ее классическую структуру ***1-ОС*** определяем в алфавите $A^*=A\cup\{\#\}$ $(\# \notin A)$ и с индексом соседства $X^* = \{0,1,2\}$, а ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ структуры определяем следующим образом, а именно:

$$\sigma^{(3)}(x,y,z) = \begin{cases} \sigma^{(2)}(x,z), & if \quad (x,z \in A) \,\&\, (y = \#) \\ \#, & if \quad <xyz> = <00\#> \\ x, & otherwise \end{cases} \qquad (55)$$

Используя теперь определение ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ ***(55)***, несложно установить, что если для произвольной конечной ***КФ*** $\alpha=□x_1x_2...x_m□$ *моделируемая* ***1-ОС*** генерирует за один шаг ***КФ*** $\alpha`=□x`_ox`_1x`_2...x`_m□$, то ***1-***моделирующая ее структура из ***КФ*** $\beta=□\#0\#x_1\#x_2\#x_3\#.....\#x_m\#□$ за один шаг генерирует ***КФ*** $\beta`=□\#0\#x`_o\#x`_1\#x`_2\#x`_3\#...\#x`_m\#□$; при этом, в алфавите $A$ имеют место соотношения, а именно: $\alpha \equiv \beta$ и $\alpha` \equiv \beta`$. Более того, нетрудно убедиться в том, что наличие для моделируемой структуры взаимной стираемости *(а значит* ***НКФ*** *и, возможно,* ***НКФ-3)*** сохраняется и для моделирующей ее структуры. В то же время из определения ***(55) ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ следует, что множество $C(A^*,\infty)$ замкнуто относительно глобального отображения $\tau^{(3)}$ *моделирующей* структуры, что влечет отсутствие для нее неконструируемости типа ***НКФ-1*** при наличии ***НКФ-2***, завершая доказательство. Исходя из вида ***(55) ЛФП***, в *моделирующей* ***1-ОС*** каждая ***КФ*** $c \in C(A,1)$, не содержащая ***#-***состояния, является *пассивной*, т.е. $c=c\tau^{(3)}$, тогда как из любой ***КФ*** $c^*=□\#x_1 ... x_m□$ $(x_1,x_m \neq 0;\ x_j \in A^*=A \cup \{\#\};\ \# \notin A;\ j=1..m)$ генерируется последовательность $<c^*>[\tau^{(n)}]$ возрастающих по длине конечных конфигураций.

В рамках исследования *необходимых* и *достаточных* условий наличия *универсальной вычислимости* в классических ***ОС-***моделях ***А.Р. Смит*** изучал влияние ряда *динамических* свойств генерируемых ими последовательностей $<c>[\tau^{(n)}]$ конечных конфигураций [131].

<u>Определение 24</u>. Проблема пассивности последовательности $<c>[\tau^{(n)}]$ ***состоит в эффективном определении того, содержит ли эта последовательность пассивную c`-КФ, т.е. КФ*** $c` \in C(A,d,\phi)$ ***такую, что*** $c`\tau^{(n)} = c`$. ***Проблема ограниченности последовательности*** $<c>[\tau^{(n)}]$ ***конечных КФ состоит в эффективном определении того, существует ли такое целое*** $\Delta \geq 1$, ***что имеет место следующее соотношение*** $(\forall c` \in <c>[\tau^{(n)}])(D(c`) \leq \Delta)$.

На основе моделирования ***УМТ*** в классических ***1-ОС*** было показано, что в общем случае данные проблемы для них алгоритмически неразрешимы. Более того, ***А.Р. Смит***, основываясь на одном понятии *универсальной* вычислимости в классических ***ОС-***моделях, доказал, что для ***ОС-***моделей, обладающих свойством универсальной вычислимости, проблемы *ограниченности* и *пассивности* последовательностей $<c>[\tau^{(n)}]$ алгоритмически *неразрешимы*. Между тем, в качестве следствия из доказательства теоремы ***113*** легко вытекает весьма интересный для последующих исследований по динамике классических структур ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ результат.

<u>Теорема 114</u>. Существуют универсальные классические структуры 1-ОС с индексом соседства Неймана-Мура $X=\{-1,0,1\}$, ***для которых алгоритмически разрешимы проблемы ограниченности и пассивности последовательностей*** $<c>[\tau^{(n)}]$ ***конфигураций.***

Данное противоречие в результатах является кажущимся и обусловливается *различием* подходов к определению понятий как универсальной вычислимости, так и моделируемости в *классических* однородных структурах. Точнее, вычислимость в ***ОС-***моделях можно определять либо на основе теории словарных рекурсивных функций непосредственно, или на базе того или иного понятия моделирования известных формальных алгоритмов переработки конечных слов ***(УМТ,*** *машины* Поста, ***SS-****машины*, ***TAG-***, ***LAG-****системы и др.).*

Значительно сложнее обстоит дело для случая неконструируемости ***НКФ-***типа, составляющего совместно с типом ***НКФ-1*** основу понятия ***обратимости*** классических структур ***d-ОС***. В рамках исследования данного вопроса было определено понятие ***WM-моделируемости***, охватывающее довольно широкий класс методов моделирования одной классической ***d-ОС*** другой структурой тех же класса и размерности. В рамках этого понятия был получен результат, характеризующий его возможности для задач моделирования и полезный в ряде теоретических изучений [53,54].

<u>Теорема 115</u>. Произвольная классическая d-ОС (d≥1) не может WM-моделироваться обратимой (в смысле отсутствия НКФ) структурой тех же класса и размерности.

Из понятия ***WM***-моделируемости и данного результата непосредственно вытекает заключение, что для возможности моделирования произвольной классической ***d-ОС*** обратимой структурой тех же класса и размерности необходимо использовать способы кодирования конечных ***КФ*** для моделируемой ***d-ОС***, допускающие бесконечное количество равноправных представителей для моделирующей структуры. Это составляет своего рода тест *первого* уровня на допустимость того либо другого способа моделирования структурами с указанным свойством обратимости. Более того, из данных результатов следует, что известные традиционные методики моделирования в классических ***d-ОС***, охватываемые понятием ***WM***-моделируемости, не могут привести к нужной цели, поэтому здесь требуются новые нетрадиционные подходы. Нами в процессе дальнейших исследований было определено понятие ***W-моделируемости***, существенно *расширяющее* понятие ***WM***-моделируемости и охватывающее чрезвычайно широкий класс известных и потенциально допустимых методов моделирования в *классических* структурах ***d-ОС***. При этом, рассматривается моделирование классических структур структурами одной и той же размерности. Между тем, и оно не позволило в своих рамках *положительно* решить проблему моделирования произвольной *классической* ***d-ОС (d≥1)*** *обратимой* структурой той же самой размерности, о чем свидетельствует следующий основной результат [5,53-57,88,90,567].

<u>Теорема 116</u>. Произвольная классическая d-ОС (d ≥ 1) не может W-моделироваться обратимой (в смысле отсутствия для нее НКФ) структурой тех же класса и размерности.

Таким образом, даже в рамках такого общего понятия, как ***W***-моделируемость, в общем случае невозможно моделировать произвольную классическую ***d-ОС (d≥1)*** обратимой структурой той же размерности. Этот результат служит довольно серьезным доводом в пользу предположения о невозможности такого типа моделирования. Между тем, выходя за рамки конечности алфавита ***A*** внутренних состояний, появляется возможность моделирования произвольных классических ***d-ОС***, включая обладающих *неконструируемостью* ***НКФ***-типа, структурами той же размерности, но без данного свойства. Не нарушая общности, рассмотрим случай структур ***1-ОС*** с алфавитом ***A***={***0,1, ..., a-1***} и индексом соседства ***X***={***0,1, ..., n-1***}. Очевидно, если для локальной функции $\sigma^{(n)}$ перехода классической структуры ***1-ОС*** выполняется нижеследующее соотношение, а именно:

$$\begin{gathered}(\forall < x_1 x_2 \dots x_{n-1} >)(x_o \neq x_o^* \rightarrow \sigma^{(n)}(x_o, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq \sigma^{(n)}(x_o^*, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) \\ x_j, x_o^* \in A = \{0,1,2,\dots,a-1\}; \quad j = 0..n-1\end{gathered} \qquad (\psi)$$

то структура не обладает парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***. *Структурируем* внутренние состояния единичного автомата *моделирующей* ***1-ОС**** на *двух уровнях* ***<b/p>***, где ***b∈A*** и ***p∈B***={***k*a+1 | k=1,2, ...***}. Множество ***B*** упорядочено в порядке возрастания, а его элементы пронумерованы, начиная с ***1***. При сделанных предположениях *локальную* функцию перехода $\sigma_1^{(n)}$ моделирующей структуры ***1-ОС**** определяем следующим образом, а именно:

$$\sigma_1^{(n)}: \begin{bmatrix} x_1 x_2 x_3 \dots x_n \\ y_1 y_2 y_3 \dots y_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \varphi(y_1 + x_1) \end{bmatrix}, \quad x_j \in A,\ y_j \in B = \{k*a+1 \mid k=1,2,\dots\};\ (j = 1..n)$$

$$\textit{where } \varphi(m) \textit{ calculates an element of } B \textit{ with order number } m$$

тогда как $\sigma^{(n)}$ определяет ***ЛФП*** моделируемой бинарной ***1-ОС***. В свете данного определения уже несложно заметить, что верхний уровень состояний ***КФ*** $<c_o/..(a+1)...>$ *моделирующей* ***1-ОС**** будет полностью симулировать динамику ***1-ОС*** для произвольной ***КФ*** $c_o \in C(A,1)$. Исходя из сделанных предположений оценим справедливость соотношения **(ψ)** для *моделирующей классической* ***1-ОС****.

$$\sigma_1^{(n)}:\begin{bmatrix} x_1 & x_2x_3\dots x_n \\ y_1 & y_2y_3\dots y_n\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^*=\varphi(x_1+y_1)\end{bmatrix} \equiv S_1^*; \qquad x_1, x_1^1, x_1^*, x_1^{1*} \in A=\{0,1,\dots,a-1\}$$

$$\sigma_1^{(n)}:\begin{bmatrix} x_1^1 & x_2x_3\dots x_n \\ y_1^1 & y_2y_3\dots y_n\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{1*} \\ y_1^{1*}=\varphi(x_1^1+y_1^1)\end{bmatrix} \equiv S_1^1; \qquad y_1, y_1^1, y_1^*, y_1^{1*} \in B=\{k*a+1 \mid k=1,2,\dots\}$$

Так как должно иметь место соотношение $<x_1/y_1> \neq <x_1^1/y_1^1>$, то вполне достаточно ограничиться рассмотрением лишь *трех* из четырех случаев, а именно: *(1)* $(x_1=x_1^1)\&(y_1\neq y_1^1)$ – в данном случае, очевидно, будет иметь место следующее соотношение $y_1^*=\varphi(x_1+y_1)\neq y_1^{1*}=\varphi(x_1^1+y_1^1)$, т.е. состояния $<S_1^*, S_1^1>$ будут различны $(S_1^*\neq S_1^1)$; *(2)* $(x_1\neq x_1^1)\&(y_1=y_1^1)$ – в данном случае на основе определения функции $\varphi\,(m)$ получаем следующее соотношение $y_1^*=\varphi(x_1+y_1)\neq y_1^{1*}=\varphi(x_1^1+y_1^1)$, т.е. и в данном случае состояния $<S_1^*, S_1^1>$ будут различны $(S_1^*\neq S_1^1)$.

(3) $(x_1\neq x_1^1)\&(y_1\neq y_1^1)$ – в данном случае будем исходить из того факта, что разность между двумя соседними членами из ***B*** равна ***a***. Следовательно, при одновременном выполнении *двух* условий $(x_1\neq x_1^1)\&(x_1, x_1^1\in A)$ и $(y_1\neq y_1^1)\&(y_1, y_1^1\in B)$ из определения функции $\varphi(m)$ просто усматривается, что $y_1^*=\varphi(x_1+y_1)\neq y_1^{1*}=\varphi(x_1^1+y_1^1)$, а значит и состояния $<S_1^*, S_1^1>$ будут различны $(S_1^*\neq S_1^1)$. Этим условие **(ψ)** полностью доказано. Таким образом, определенная нами моделирующая структура не будет обладать парами ***ВСКФ***, а значит и неконструируемостью типа ***НКФ***. Итак, может быть сформулировано следующее предложение.

Предложение 28. При условии использования бесконечного алфавита A внутренних состояний единичного автомата существует классическая d-ОС (d ≥ 1) без НКФ, моделирующая в строго реальное время произвольную структуру той же размерности.

Совершенно другой подход позволяет моделировать произвольные классические ***d-ОС (d ≥ 1)***, включая и обладающие неконструируемостью ***НКФ***-типа, классическими структурами той же размерности. Рассмотрим, не нарушая общности, данный подход на основе классических ***1-ОС***. Путь ***1-ОС*** является *классической* структурой с алфавитом ***A={0,1,…,a-1}*** и простейшим индексом соседства ***Xn={0,1}***. Хорошо известно, что любая классическая ***1-ОС*** моделируется с замедлением времени и расширением алфавита единичных автоматов ***1–ОС*** с индексом соседства ***Xn*** [1,5], т.е. с простейшим индексом соседства ***Xn={0,1} ≡ {-1,0}***. Данные простые структуры характеризуются однонаправленными информационными потоками.

В качестве моделирующей выбирается классическая ***1-ОС*** с индексом соседства ***X* = {-1,0,1, 2}*** и алфавитом $A^* = A\cup A' = \{h_1, h_2, \dots, h_a\}$; при этом, $A\cap A'=\varnothing$, ***#A=#A'=a***, где ***#G*** – мощность множества ***G***, множества ***A*** и ***A'*** упорядочены и между ними имеется взаимно однозначное соответствие, а именно: $0\equiv h_1$, $1\equiv h_2$, $2\equiv h_3$, …, $a-1\equiv h_a$. ***ЛФП*** $\sigma^{(4)}$ моделирующей структуры ***1-ОС**** определяем следующими правилами перехода единичных автоматов:

$$\sigma^{(4)}(x_{-1}, x_0, x_1, x_2) = \begin{cases} \sigma^{(2)}(x_0, x_2), & \mathit{if}\quad x_{-1}, x_1\in A' \;\; \mathit{and}\;\; x_0, x_2 \in A \\ \sigma^{(4)}(0,0,0,h_1) = h_1 & \\ \delta(x_{-1}, x_0), & \mathit{otherwise}\end{cases}$$

$$\mathit{where}\quad \delta(x,y) = \begin{cases} A_{d(x)}, & \mathit{if}\quad y\in A \\ A'_{d(x)}, & \mathit{if}\quad y\in A'\end{cases}; \qquad \sigma^{(2)}(x_0, x_2) - \mathit{LTF\ of\ the\ modelled\ 1\text{-}HS}$$

$$\mathit{where}\quad R_{d(x)} - d(x)\text{-}\mathit{th\ element\ of\ a\ set}\ R;\ d(x) - \mathit{number\ of}\ x\text{-}\mathit{element\ in\ appropriate\ set}$$

$$d(x) = x+1,\ \ \mathit{if}\ \ x\in A \quad \mathit{and}\quad d(x) = x-a+1,\ \ \mathit{if}\ \ x\in A'$$

Определяем произвольную начальную конечную ***КФ*** c_o=□$x_1x_2x_3$ ... x_n□ (x_1, $x_n \neq 0$; $x_j \in A$; $j=1..n$) *моделируемой* структуры ***1-ОС*** в *моделирующей* структуре ***1-ОС**** в виде конечной конфигурации c^*_o нижеследующего вида, а именно:

c^*_0:	...	0	0	0	0	0	h_1	0	h_1	x_1	h_1	...	h_1	x_n	h_1	0	h_1	0	h_1	0
c^*_1:	...	0	0	0	h_1	0	h_1	y_o	h_1	y_1	h^1_1	...	h^n_1	y_n	h^{n+1}_1	0	h_1	0	h_1	0
c^*_2:	...	0	h_1	0	h_1	z_{-1}	h_1	z_o	h_1	z_1	h^1_2	...	h^n_2	z_n	h^{n+1}_2	0	h_1	0	h_1	0
==																				

$$x_j, y_i, z_k \in A;\ j=1..n;\ j=0..n;\ k=-1..n;\quad h_1, h^t_p \in A';\ t=1..n+1;\ p=1..\infty$$

Теперь несложно убедиться, что определенная таким образом классическая ***1-ОС* 1-***моделирует динамику исходной структуры ***1-ОС*** для любой начальной конечной ***КФ*** $c_o \in C(A,1,\phi)$, а именно: из произвольной конфигурации $c^*_o \in C(A \cap A',1,\phi)$ генерируется последовательность $<c^*_o>[\tau^{(4)}]$, чьи конфигурации в алфавите ***A*** эквивалентны конфигурациям последовательности $<c_o>[\tau^{(2)}]$ моделируемой ***1-ОС.*** При вышеуказанной организации чередования символов алфавитов ***A*** и ***A'*** в конфигурациях моделирующей ***1-ОС**** алгоритм выделения конфигураций, соответствующих конфигурациям моделируемой структуры ***1-ОС,*** достаточно прост и прозрачен, когда элементы алфавита ***A'*** выполняют роль *маркеров*, разделяющих символы ***КФ*** *моделируемой* ***1-ОС.*** Покажем, что в ***1-ОС**** такой организации отсутствуют пары ***ВСКФ*** определенного типа при наличии пар ***ВСКФ*** с ***ВБ*** размера ***1,*** а значит и ***НКФ-неконструируемости.*** Очевидно, для произвольной ***1-ОС**** с индексом соседства $X^* = \{-1,0,1,2\}$ пары ***ВСКФ*** имеют следующий вид, а именно:

a	*b*	*c*	x_1	x_2	....	x_{n-1}	x_n	*d*	*e*	*f*
a	*b*	*c*	y_1	y_2	....	y_{n-1}	y_n	*d*	*e*	*f*
	*b**	*c**	z_1	z_2	....	z_{n-1}	z_n	*d**		

$$a, b, c, d, e, f, b^*, c^*, d^*, x_1, y_1, z_1 \in A^*=A \cup A';\quad (x_1 \neq y_1)\ \&\ (x_n \neq y_n)\quad j=1..n$$

Очевидно, при наличии в структуре пар ***ВСКФ*** именно по отношению к ***ВСКФ*** с минимальным ***ВБ*** вполне достаточно проводить все необходимые рассмотрения. Более того, из определения же ***ЛФП*** $\sigma^{(4)}$ *моделирующей* структуры довольно несложно убедиться в справедливости следующего определяющего соотношения, а именно:

$$(\forall <x_{-1}x_ox_1x_2>)(\sigma^{(4)}(x_{-1},x_o,x_1,x_2) \in \{A\,|\,A'\} \leftrightarrow x_o \in \{A\,|\,A'\}),\quad x_{-1},x_o,x_1,x_2 \in A^*=A \cup A' \qquad (\mu)$$

Не нарушая общности и для определенности, рассмотрим сначала *правую* часть представленной пары ***ВСКФ*** с минимальным ***ВБ*** следующего вида, а именно:

....	x_{n-1}	x_n	*d*	*e*	*f*
....	y_{n-1}	y_n	*d*	*e*	*f*
....	z_{n-1}	z_n	*d**	$x_n \neq y_n$	

Рассмотрим случай ($x_n \neq y_n$)&($x_n \in A$, $y_n \in A'$ или $x_n \in A'$, $y_n \in A$). Но тогда из определения ***ЛФП*** $\sigma^{(4)}$ моделирующей структуры ***1-ОС**** непосредственно следует, для нее имеет место определяющее соотношение **(μ),** вследствие чего не может быть получено *единое* значение для z_n в определении пары ***ВСКФ,*** т.е. имеет место следующее соотношение:

$$(x_n \in A \rightarrow \sigma^{(4)}(x_{n-1},x_n,d,e) = z_{na} \in A) \neq (y_n \in A' \rightarrow \sigma^{(4)}(y_{n-1},y_n,d,e) = z_{nb} \in A')$$

и наоборот, а именно:

$$(x_n \in A' \rightarrow \sigma^{(4)}(x_{n-1},x_n,d,e) = z_{nb} \in A') \neq (y_n \in A \rightarrow \sigma^{(4)}(y_{n-1},y_n,d,e) = z_{na} \in A)$$

Итак, данный случай устанавливает невозможность существования пар **ВСКФ** в **1-ОС*** как ввиду указанных предположений, так и ввиду выполнения следующего соотношения $A \cap A' = \varnothing$**.**

Рассмотрим случай $(x_n \neq y_n)\&(x_n \in A,\ y_n \in A)$**.** Ввиду возможности наличия для моделируемой **1-ОС** неконструируемости типа **НКФ** для нее будут существовать **(***ввиду критерия неконструируемости* **НКФ-***типа***)** также и пары **ВСКФ,** а следовательно, будет выполняться следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\exists x_n, \exists y_n \in A)(\ \sigma^{(4)}(x_{n-1},x_n,d,e) = \sigma^{(4)}(y_{n-1},y_n,d,e) = z_n \in A)$$

которое благоприятствует наличию пар **ВСКФ** и для *моделирующей* структуры **1-ОС*;** между тем, ввиду неравенства $x_n \neq y_n$ невозможно однозначное определение значения d^***,** т.е. выполняется следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\forall d \in A^*)\ (\sigma^{(4)}(x_n,d,e,f) \in A^* \neq \sigma^{(4)}(\ y_n,d,e,f) \in A^*)$$

что и в данном случае отрицает наличие в моделирующей структуре **1-ОС*** пар **ВСКФ.**

Рассмотрим случай $(x_n \neq y_n)\&(x_n \in A',\ y_n \in A')$**.** Поскольку состояние d в определении **ВСКФ** может быть произвольным и принадлежать обобщенному алфавиту $A^* = A \cup A'$**,** то в случае $d \in A'$ ввиду неравенства $x_n \neq y_n$ невозможно однозначное определение значения d^***,** т.е. имеем соотношение: $(\forall d \in A^*)(\sigma^{(4)}(x_n,d,e,f) \in A^* \neq \sigma^{(4)}(\ y_n,d,e,f) \in A^*)$.

Условие $\sigma^{(4)}(0,0,0,h_1) = h_1$ не способствует наличию пар **ВСКФ,** что легко следует из следующего фрагмента для правого конца пары **ВСКФ,** а именно:

0	*0*	*0*	h_1	**....**
0	*0*	*0*	h_k	**....**
	$\begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}$	c^*	z_1	**....**

Между тем, для моделирующей **1-ОС*** существуют пары **ВСКФ** с *минимальным* **ВБ** размера **1** уже следующего вида, а именно:

h_1	h_1	*0*	h_1	*0*	h_3	*0*
h_1	h_1	*0*	h_2	*0*	h_3	*0*
	h_1	*0*	h_1	*0*		

Таким образом, *моделирующая* **1-ОС*** обладает парами **ВСКФ** с **ВБ** *минимального* размера **1,** тогда как моделируемая **1-ОС** может не иметь неконструируемости **НКФ**-типа, либо обладать парами **ВСКФ** с **ВБ** минимального размера **> 1.**

Более того**,** ввиду соотношений**,** определяющих **ЛФП** $\sigma^{(4)}$ *моделирирующей* структуры, несложно убедиться, что для моделирующей **1-ОС*** наряду с *неконструируемостью* типа **НКФ** имеет место и неконструируемость типа **НКФ-1.** В качестве примера такого типа *неконструируемости* можно привести простую конфигурацию c=□h_1□**.** Рассмотренный *подход* к моделированию структур не является простейшим, однако представляет некоторый интерес с познавательной точки зрения. Более простым в этом контексте является следующий прием моделирования классических **1-ОС** с алфавитом $A=\{0,1,2,\ \ldots,\ a-1\}$ и простейшим индексом соседства $Xn=\{0,1\}$**.**

Очевидно, для наличия в такой классической **1-ОС** пар **ВСКФ (***а значит и* **НКФ)** необходимо **(***но не достаточно***)** существование по меньшей мере пары $<x_1,x_3>$, $<x_2,x_3>$ $(x_1 \neq x_2;\ x_1, x_2, x_3 \in A)$ такой, что $\sigma^{(2)}(x_1,x_3) = \sigma^{(2)}(x_2,x_3)$. При этом, минимальный ***ВБ*** пар ***ВСКФ*** будет **≥ 1.** Известно [19,20], что существуют классические ***1-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2,\ \ldots,\ a\text{-}1\}$ и простейшим индексом соседства $Xn=\{0,1\}$, обладающие парами ***ВСКФ*** с ***ВБ*** *минимального* размера ***a-1***. В качестве структуры ***1-ОС****, моделирующей структуру ***1-ОС***, выбирается структура с алфавитом $A^* = A\cup\{h\}$ $(h\notin A)$, индексом соседства $X^*=\{0,1,2\}$ и ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$, определяемой параллельными подстановками вида:

$$\sigma^{(3)}:\begin{cases} x_1\,h\,x_2 \;\rightarrow\; \sigma^{(2)}(x_1,x_2), \quad where \quad \sigma^{(2)}(x_1,x_2) - LTF\ of\ the\ modelled\ 1\text{-}OC \\ \;\;0\,0\,h \;\rightarrow\; h \\ \;\;u\,t\,w \;\rightarrow\; u, \quad otherwise \\ \qquad\qquad u,t,w\in A^*=A\cup\{h\};\; x_1,x_2\in A;\quad A=\{0,1,2,\ldots,a\text{-}1\} \end{cases}$$

Легко убедиться, что определенная таким образом классическая ***1-ОС* 1***-моделирует исходную структуру ***1-ОС***, а именно: если произвольная конечная ***КФ*** $c=\square x_1x_2\,x_3\ldots x_n\square$ для моделируемой структуры в моделирующей представляется конфигурацией $c_o\in C(A,1,\phi)$ следующего вида:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} c_o = & \square & 0 & 0 & h & x_1 & h & x_2 & h & x_3 & \ldots & h & x_n & h & \square \\ c_o\tau^{(3)} = & \square & h & x'_o & h & x'_1 & h & x'_2 & h & x'_3 & \ldots & h & x'_n & h & \square \end{array}$$

под действием ***ГФП*** $\tau^{(3)}$ *моделирующей* ***1-ОС**** она переводится в ***КФ*** $c_o\tau^{(3)}$, в алфавите $A^* = A\cup\{h\}$ эквивалентной ***КФ*** $c\tau^{(2)}=\square x'_ox'_1x'_2\ldots x'_n\square$. Более того, можно показать, что в такой моделирующей структуре будут существовать пары ***ВСКФ*** лишь тогда, если моделируемая ***1-ОС*** будет обладать неконструируемостью ***НКФ***-типа. При этом, размер *минимального* ***ВБ*** пар ***ВСКФ*** моделирующей ***1-ОС**** будет равен ***1***, тогда как пары ***ВСКФ*** иметь вид, например, $<h0\,|\,x_1\,|\,hx_3>$, $<h0\,|\,x_2\,|\,hx_3>$ при условии, что для моделируемой ***1-ОС*** имеет место соотношение $\sigma^{(2)}(x_1,x_3)=\sigma^{(2)}(x_2,x_3)$. Более того ввиду соотношений, определяющих ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ моделирирующей структуры, довольно несложно убедиться, что в моделирующей ***1-ОС**** наряду с неконструируемостью типа ***НКФ*** имеет место и неконструируемость типа ***НКФ-1***. В качестве простого примера этого типа неконструируемости можно привести конфигурацию $c=\square h\square$. В общем же случае структуры ***d-ОС*** $(d\geq 2)$ аналогичным образом выбирается моделируемая классическая структура с минимальным ***ШС*** и простейшим индексом соседства ***X*** следующего вида, а именно:

$$Xn = \underbrace{\{(\underbrace{0,0,\,\ldots\ldots\ldots,\,0}_{d}),\ (\underbrace{1,0,0,\,\ldots..,\,0}_{d}),\ (\underbrace{0,1,0,\,\ldots..,\,0}_{d}),\ \ldots\ldots.,\ (\underbrace{0,0,\,\ldots..,\,0,1}_{d})\}}_{d+1}$$

т.е. один автомат минимального ***ШС*** является центральным и от него по каждой оси координат расходится строго по одному единичному ***z***-автомату структуры. Тогда как в моделирующей ее динамику структуре ***d-ОС**** той же самой размерности все состояния начальной конфигурации соответствующим образом «*окружаются*» состояниями-маркерами ***h***. Затем способом, подобным вышеописанному, однако с учетом размерности ***ШС***, определяется ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, обеспечивающая ***1***-*моделирование* исходной структуры ***d-ОС*** и наличие неконструируемости типов ***НКФ*** и ***НКФ-1*** при условии существования в ней пар ***ВСКФ*** с минимальным ***ВБ*** размера ***1***. В общем случае для ***d***-мерной классической ***ОС****-модели используется простой индекс соседства ***X****, принимающий следующий вид, а именно:

$$X^* = \underbrace{\{(\underbrace{0,\,\ldots,\,0}_{d}),\ (\underbrace{1,\,\ldots,\,0}_{d}),\ (\underbrace{2,\,\ldots,\,0}_{d}),\ (\underbrace{0,1,0,\,\ldots..,\,0}_{d}),\ (\underbrace{0,2,0,\,\ldots..,\,0}_{d}),\ \ldots\ldots,\ (\underbrace{0,0,\,\ldots..,0,1}_{d}),\ (\underbrace{0,0,\,\ldots..,\,0,2}_{d})\}}_{2d+1}$$

т.е. один автомат ***ШС*** является центральным и от него вдоль каждой оси координат расходится строго по два единичных ***z***-автомата моделирующей структуры. Общий принцип организации моделирующей структуры *един* для структур всех размерностей. Таким образом, вышесказанное позволяет сформулировать следующий достаточно интересный результат, а именно [88,90].

<u>Предложение 29.</u> Произвольная классическая структура d-ОС ($d \geq 1$) с простейшим индексом Xn соседства и алфавитом A={0,1,…,a-1} 1-моделируется классической структурой d-ОС* с очень простым индексом соседства X* и алфавитом A*=A∪{h} ($h \notin A$), и обладающей типами НКФ-1 и НКФ неконструируемости при условии существования для нее пары ВСКФ с ВБ минимального размера 1.

На основе вышеприведенных рассуждений, а также предложения **27** путем довольно очевидной умозрительной редукции, достаточно просто реализуемой практически, получаем возможность сформулировать следующий весьма интересный для ряда приложений *(включая теоретические)* результат, а именно.

<u>Предложение 30</u>. Произвольная классическая d-ОС($d \geq 1$) 1-моделируется классической d-ОС* с простым индексом соседства X* и существованием для нее неконструируемости типов НКФ и НКФ-1; при этом, для данной d-ОС* проблема существования неконструируемости каждого из указанных типов алгоритмически разрешима.

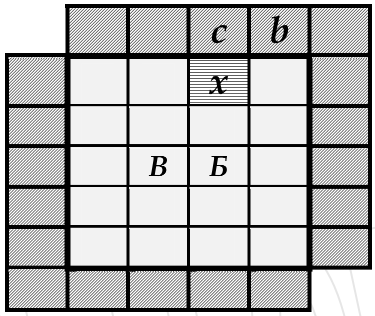
Между тем, эта теорема совершенно не противоречит результату, что в общем случае проблема существования для произвольной *классической* структуры ***d-ОС ($d \geq 2$)*** неконструируемости типа ***НКФ (НКФ-3)*** алгоритмически неразрешима [5,88,90]. Действительно, если моделируемая ***d-ОС ($d \geq 1$)*** обладает неконструируемостью ***НКФ***-типа, а значит и парами ***ВСКФ***, то моделирующая ее структура ***d-ОС****, использующая описанный алгоритм, будет также обладать парами ***ВСКФ*** с ***ВБ*** минимального размера ***1***. Следовательно, проблема существования для нее неконструируемости ***НКФ***-типа *разрешима*. С другой стороны, можно показать, что при существовании для ***d-ОС**** пар ***ВСКФ*** *(неконструируемости **НКФ**-типа) моделируемая* ***d-ОС*** этим свойством может и не обладать. Таким образом, наличие ***НКФ***-неконструируемости для ***d-ОС*** влечет ее наличие и для ***d-ОС****, но не наоборот, вообще говоря. Итак, *разрешимость* проблемы существования неконструируемости ***НКФ***-типа для структуры ***d-ОС**** не переносима на моделируемую ею структуру ***d-ОС ($d \geq 2$)***.

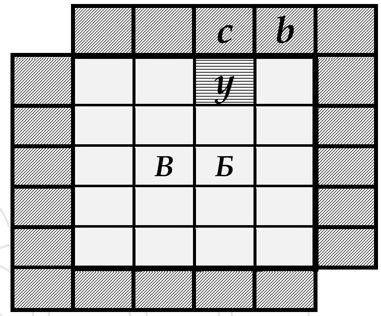
Совершенно другой подход позволяет моделировать произвольные *классические* структуры ***d-ОС ($d \geq 1$)***, включая обладающие неконструируемостью ***НКФ***-типа, структурами размерности на ***1*** большими, т.е. классическими структурами ***(d+1)-ОС***. Рассмотрим, не нарушая общности, такой подход на основе *классических* ***1-ОС***. Пусть ***1-ОС*** является классической структурой с алфавитом ***A={0,1,2, …, a-1}***, простейшим индексом соседства ***Xn={0,1}*** и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}(x,y)=x^*$; $x,y,x^* \in A$. Хорошо известно, произвольная *классическая* ***1-ОС*** моделируется с замедлением времени и расширением алфавита ***A*** структурой того же класса, той же размерности и с простейшим индексом соседства $X_n=\{0,1\}$. Определим моделирующую ее классическую ***2-ОС*** с тем же алфавитом ***A***, простейшим индексом соседства $X^*_n=\{(0,0), (0,1), (1,1)\}$ и ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$, правила которой определены следующими параллельными подстановками, а именно:

$$\boxed{\begin{array}{l} \qquad\qquad S(x,y)_{t+1} = \sigma^{(2)}(S(x,y+1)_t, S(x+1,y+1)_t) \otimes S(x,y)_t \\ where:\ \sigma^{(2)}(c,d)\ -\ LTF\ of\ the\ modelled\ classical\ \ 1\text{-}HS; \\ c \otimes d\ -\ computes\ \ c+d\ \ (mod\ a);\quad c,d \in A = \{0,1,2,\dots,a-1\} \qquad\qquad (GS) \\ S(x,y)_t - a\ state\ of\ elementary\ automaton\ with\ coordinates\ (x,y)\ at\ a\ moment\ t \geq 0 \\ \qquad\qquad x,y \in \{0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\};\ t = 0,1,2,3,\dots\ . \end{array}}$$

Вышеопределенная локальная функция перехода $\sigma^{(3)}$ моделирующей ***2–ОС*** достаточно проста и оперирует с минимальным шаблоном соседства, определяемым простейшим индексом соседства $X^*_n = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$. Между тем, она поддерживает весьма простой алгоритм моделирования.

Прежде всего, покажем, что таким образом определенная моделирующая классическая ***2-ОС*** не обладает неконструируемостью ***НКФ***-типа. Действительно, в противном случае в соответствии с критерием существования данного типа ***НКФ*** (теорема ***18)*** структура должна была бы обладать парами ***ВСКФ*** следующего вида, а именно:





В предположении о наличии для структуры пар ***ВСКФ*** указанного вида, выбираем пару ***ВСКФ*** прямоугольной формы с *минимальным* ***ВБ***, в которых каждые соответствующие друг другу грани содержат по меньшей мере ***1*** пару единичных автоматов, находящихся в различных состояниях $x \neq y$ $(x,y \in A)$. Выбрав теперь в данной паре ***ВСКФ*** самую правую верхнюю пару соответствующих автоматов ***ВБ*** в различных состояниях $x \neq y$ $(x,y \in A)$, несложно убедиться, что на основе ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ ***(GS)*** моделирующей структуры в следующий момент времени t снова получаем для выбранной пары единичных автоматов *различные* состояния, точнее, справедливо следующее соотношение: $(\forall c,b \in A)(x \neq y \rightarrow \sigma^{(2)}(c,b) \otimes x \neq \sigma^{(2)}(c,b) \otimes y)$. Таким образом, структура ***2-ОС*** с ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$, заданной соотношениями ***(GS)***, не обладает парами ***ВСКФ***, а значит (*согласно критерия; теорема* ***18***), она не обладает и неконструируемостью ***НКФ***–типа. Использованный для доказательства такого факта критерий неконструируемости ***НКФ***-типа, базирующийся на понятии ***ВСКФ***, является в данных случаях наиболее эффективным, превосходя по возможности критерий на основе ***γ–КФ***.

Покажем теперь, что определенная нами ***2-ОС*** моделирует произвольную классическую ***1-ОС*** с алфавитом $A=\{0,1,2,...,a-1\}$, простейшим индексом соседства $Xn=\{0,1\}$ и локальной функцией $\sigma^{(2)}$ перехода $\sigma^{(2)}(x,y) = x^*$; $x,y,x^* \in A$. Помещая в среду ***2-ОС***, состоящую из единичных автоматов в ***0***-состояниях «*покоя*», произвольную конечную либо бесконечную (*не нарушая общности конечную*) ***1***-мерную конфигурацию $c=□x_1x_2x_3 \ldots x_n□$ $(x_1, x_n \neq 0;\ x_j \in A;\ j=1..n)$, скажем, в строку единичных автоматов с координатами $\{(0,j) \mid j=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$, отследим *динамику* ее развития под действием ***ГФП*** $\tau^{(3)}$, определяемой соответствующей ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ ***(GS)*** моделирующей структуры. Следующая схема достаточно наглядно иллюстрирует факт ***1***-моделирования *классической* структурой ***2-ОС*** произвольной классической структуры ***1-ОС***, а именно:

....													
	...	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	...
t=0	$c_o =$	...	0	0	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_{n-1}	x_n	0	...
	...	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	...
....													
	...	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	...
t=1	...	0	0	0	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_{n-1}	x_n	0	...
	...	0	0	$x^1{}_o$	$x^1{}_1$	$x^1{}_2$	$x^1{}_3$	$x^1{}_4$	...	$x^1{}_{n-1}$	$x^1{}_n$	0	...
	...	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	...
....													
	...	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	...
	...	0	0	0	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_{n-1}	x_n	0	...
t=2	...	0	0	$b^1{}_o$	$b^1{}_1$	$b^1{}_2$	$b^1{}_3$	$b^1{}_4$	...	$b^1{}_{n-1}$	$b^1{}_n$	0	...
	...	0	$x^2{}_{-1}$	$x^2{}_o$	$x^2{}_1$	$x^2{}_2$	$x^2{}_3$	$x^2{}_4$	...	$x^2{}_{n-1}$	$x^2{}_n$	0	...
	...	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	...
....													

t=3	...	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	...
	...	0	0	0	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_{n-1}	x_n	0	...
	...	0	0	$b^1{}_o$	$b^1{}_1$	$b^1{}_2$	$b^1{}_3$	$b^1{}_4$	...	$b^1{}_{n-1}$	$b^1{}_n$	0	...
	...	0	$b^2{}_{-1}$	$b^2{}_o$	$b^2{}_1$	$b^2{}_2$	$b^2{}_3$	$b^2{}_4$	...	$b^2{}_{n-1}$	$b^2{}_n$	0	...
	...	$x^3{}_{-2}$	$x^3{}_{-1}$	$x^3{}_o$	$x^3{}_1$	$x^3{}_2$	$x^3{}_3$	$x^3{}_4$	...	$x^3{}_{n-1}$	$x^3{}_n$	0	...
	...	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	...
....													
$x_j^1 = \sigma^{(2)}(x_j, x_{j+1});\quad x_j^{k+1} = \sigma^{(2)}(x_j^k, x_{j+1}^k);\quad x_j, x_j^k, x_j^{k+1}, b_j^k \in A;\ k = 1, 2, \ldots;\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$													

Из представленной схемы легко усматривается факт, *классическая* структура **2-ОС** с простейшим индексом соседства ***X*={(0,0),(0,1),(1,1)}*** и алфавитом ***A*={*0,1,2, …, a-1*}** из каждой конечной ***КФ*** c_o генерирует последовательность конфигураций $<c_o>[\tau^{(3)}]$, которая в ***t***-строках {***t = 0,-1,-2,-3,-4, …***} содержит последовательность конфигураций $<c_o>[\tau^{(2)}]$, генерируемую из произвольной ***КФ*** c_o исходной структурой ***1-ОС*** с тем же алфавитом ***A*** и простейшим индексом соседства ***Xn***={***0,1***} (*на представленной схеме строки генерируемой последовательности затенены*). При этом, формирование промежуточных состояний $b_j^k, b_j^k \in A$ *полностью* определяется ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ ***(GS)*** и на собственно сам алгоритм моделирования влияния не оказывает. Таким образом, определенная нами структура ***2-ОС*** с системой параллельных подстановок ***(GS)***, определяющих ее ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ {***ГФП*** $\tau^{(3)}$}, будет ***1-***моделировать *динамику* произвольной *классической* ***1-ОС*** для любой начальной ***КФ*** $c_o \in C(A,1) = C(A,1,\phi) \cup C(A,1,\infty)$ как конечной, так и бесконечной. Описанный простой алгоритм естественно обобщается и на общий ***d***-мерный случай, что позволяет сформулировать следующий довольно интересный результат, а именно [88,90].

<u>Предложение 31.</u> Любая классическая структура d-ОС (d≥1) с простейшим индексом соседства X_n и алфавитом A=*{*0,1,2,…,a-1*}* 1-моделируется классической структурой (d+1)-ОС с индексом соседства X^*_n и тем же алфавитом A, не обладающей неконструируемостью НКФ-типа.

В общем случае классических структур ***d-ОС (d≥1)*** подобным образом доказывается следующий достаточно интересный для ряда приложений (*включая и теоретические*) результат, а именно.

<u>Теорема 117</u>. Произвольная классическая d-ОС (d≥1) с алфавитом A=*{*0,1,…,a-1*}* 1-моделируется (d+1)-ОС с тем же алфавитом A, не обладающей неконструируемостью НКФ-типа.

Следует отметить, что результат теоремы ***117*** определяет достаточно высокую цену такого типа моделирования – увеличение размерности моделирующей классической структуры на единицу относительно размерности моделируемой классической структуры. Из результатов теоремы ***108*** и предложения ***25*** непосредственно следует, что произвольная *классическая* структура ***d-ОС (d≥1)*** в рамках динамики конечных и/или структурно-периодических ***КФ*** моделируется посредством *классической* ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура. При этом, подход, использованный при доказательстве, обеспечивает моделирование *динамики* лишь в классических стабильных ***d-ОС (d≥1)*** и на более общий случай моделирования не распростаняется. Итак, с учетом сказанного и результата теоремы ***117*** можно сформулировать следующее довольно интересное предложение.

<u>Предложение 32.</u> Любая классическая структура d-ОС (d≥1) в рамках динамики конечных и/или структурно-периодических конфигураций моделируется классической структурой 2-ОС с X* = *{*(0,0),(0,1),(1,1)*}* индексом соседства, не обладающей неконструируемостью НКФ-типа.

При этом, в данном случае понятие «*классичности*» структур предполагает наличие для них по меньшей мере одного состояния «*покоя*», удовлетворяющего определяющему соотношению для локальной функции перехода структуры: $\sigma^{(n)}(x,x,...,x)=x$ $\{x \in A\}$. Такие ***ОС***-модели могут служить в качестве определенного аналога физических реалий и на протяжении всего изложения, если не оговорено противного, будут рассматриваться именно такого типа классические структуры.

Вопросы различий неконструируемостей типов ***НКФ***, ***НКФ-1***, ***НКФ-2 и НКФ-3*** в классических ***d-ОС (d≥1)*** довольно детально рассматривались выше. И если проблема *моделирования* структур, обладающих *неконструируемостью* типа ***НКФ-1***, структурами без этого типа *неконструируемости* решалась относительно несложно (теорема ***113***), то в случае с неконструируемостью типов ***НКФ (НКФ-3)*** вопрос, по-видимому, обстоит несколько сложнее и, прежде всего, по меньшей мере в рамках определенных выше *двух* довольно важных понятий ***WM***- и ***W***-моделирования, которые охватывают довольно широкий спектр алгоритмов *моделирования*, интересных как с прикладной, так и с теоретической точек зрения, данная проблема имеет отрицательное решение [88,90].

K. Morita доказал существование *обратимой* ***1-ОС***, симулирующей произвольную ***1-ОС***, включая и необратимые, а ***J. Dubacq*** доказал возможность симулирования машин Тьюринга обратимыми ***1-ОС*** [536]. Тогда как ***K. Morita*** и другие доказали вычислительную универсальность обратимых ***1-ОС*** [321,322]. Используя данные результаты и результат предложения ***26*** достаточно несложно доказать следующее интересное предложение.

<u>Предложение 33</u>. Произвольная классическая структура d-ОС (d≥1) моделируется посредством обратимой структуры 1-ОС.

В контексте различий неконструируемостей типов ***НКФ (НКФ-3)*** и ***НКФ-2***, с одной стороны, и ***НКФ-1***, с другой стороны, определенный интерес представляет заключительная часть теоремы ***10***. Поэтому здесь достаточно уместно привести набросок доказательства заключительной части теоремы ***10***. Положим $G=C(A,d,\phi)\setminus\{\square\}$, т.е. из множества $C(A,d,\phi)$ всех конечных ***КФ*** исключается также полностью нулевая ***КФ*** (□-***КФ***). В качестве примера ***d-ОС (d ≥ 1)***, для которой имеет место соотношение $G = NCF$, можно привести структуру, чья ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ удовлетворяет соотношению:

$$(\forall <x_1x_2 \ldots x_n>)(\sigma^{(n)}(x_1,x_2, \ldots, x_n)=0) \qquad \{x_j \in A;\ j=1..n\}$$

Очевидно, такую ***d-ОС*** можно рассматривать как уникально исключительный случай и в таком качестве она выступает в единственном числе, когда каждая конечная конфигурация является в ней неконструируемой ***НКФ***-типа.

В качестве примера классической ***d-ОС(d ≥ 1)***, для которой имеет место соотношение $G = NCF\text{-}2$, можно привести бинарную ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура и с квалифицирующим номером ***45*** (*рассматривается несколько ниже*). Показано, что для данной структуры все конечные ***КФ*** периодичны и множество $C(B,1,\infty)$ замкнуто относительно глобального $\tau^{(3)}$-преобразования. Следовательно, все конечные конфигурации в такой структуре образуют множество ***НКФ-2***, что и доказывает возможность соотношений $G = NCF\text{-}2$ для ***d-ОС (d ≥ 1)***.

Предположим теперь, для некоторой ***d-ОС (d≥1)*** имеет место следующее соотношение $G=NCF\text{-}1$. Рассмотрим произвольную ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$. По предположению она имеет предшественников c^* только из множества $C(A,d,\infty)$, т.е. $c^*\tau^{(n)}=c$ $(c \neq \square)$. Применяя к ***КФ c*** *глобальное* $\tau^{(n)}$-преобразование, получаем ***КФ*** $c_1=c\tau^{(n)}$. Если теперь $c_1=\square$, в структуре будут существовать пары ***ВСКФ***, а значит, и ***НКФ***, приводя к невозможности соотношения $G = NCF\text{-}1$, т.к. бесконечное подмножество $G^* \subset G$ будут составлять ***NCF***. В противном случае для ***КФ*** $c_1 \in C(A,d,\phi)$ будет существовать по меньшей мере один предшественник $c \in C(A,d,\phi)$, что вновь приводит к невозможности для произвольной классической структуры соотношения $G = NCF\text{-}1$, что и завершает доказательство второй части теоремы ***10***. При этом, следует иметь в виду, что в отличие от классических структур, проблема неконструируемости для структур ***d-ОС*** без выделенного состояния «*покоя*» сводится только к наличию ***НКФ***, т.е. ***γ-КФ*** и пар ***ВСКФ***. В данном случае не приходится говорить о типах ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3*** неконструируемости, теряющих свой смысл.

Особый интерес представляет более глубокое исследование взаимосвязи свойства ***обратимости*** классических ***d-ОС (d≥1)*** и их глобальной *динамики*. Вместе с тем, следует унифицировать и само понятие обратимости динамики ***ОС***-моделей во избежание недоразумений, подобных случаям неконструируемости типов ***НКФ***, ***НКФ-3*** и ***НКФ-1***, имевших место и ранее [1,3,5,9,88,131,184-187, 536]. Выше вопрос обратимости *динамики* ***ОС***-моделей рассматривался нами довольно детально. Наиболее интересные известные нам подходы к определению обратимых ***ОС***-моделей (*исключая модели, базирующиеся на динамических **ШС**, в частности, **ОСнР***) основываются на механизме, при котором, начав с конкретной конфигурации состояний единичных автоматов модели, на основе алгоритма, определяющего следующее состояние единичного автомата, мы имеем возможность восстанавливать и его предыдущее состояние. Типичный алгоритм подобного типа рассмотрен в разделе ***2.8***. Определенную таким методом *обратимость* единичного автомата структуры ***d-ОС*** можно рассматривать *локальной*, тогда как под ***обратимостью*** мы понимаем именно *глобальную* (*конфигурационную*) обратимость *динамики классических* структур, характеризующих обратимость их *траекторий* – последовательностей генерируемых ими конечных конфигураций.

(a) $\ldots \leftarrow c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-3} \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o \in C(A,d,\phi)$ ***обратимая траектория d-ОС***

$$\begin{array}{ll} & \ldots \leftarrow c^{\infty}_{-(j+1)} \\ \textbf{(b)} & \qquad \leftarrow c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-3} \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o \in C(A,d,\phi) \\ & \ldots \leftarrow c^{f}_{-(j+1)} \end{array}$$

необратимая траектория d-ОС

В случае же нашего понимания обратимости траекторий классических структур ***d-ОС*** (*динамики состояний-конфигураций*) графы состояний как *обратимой*, так и *необратимой* динамик конечных конфигураций принимают вид, представленный на вышеприведенной графической схеме. Эти графы исчерпывают все интересующие нас случаи динамики классических ***ОС***–моделей.

При этом, в графе состояний типа ***(a)*** конфигурация $c_o \in C(A,d,\phi)$ может повторяться бесконечное количество раз в случае ее *периодичности*, тогда как для графа типа ***(b)*** число предшественников на шаге ***t=–(j+1)*** обязательно не менее одного и они могут принадлежать как множеству ***C(A,d,ϕ)***, так и множеству ***C(A,d,∞)***. Именно при таком определении ***обратимости*** траекторий динамики классических ***ОС***-моделей и возникает вопрос моделирования необратимых классических ***d-ОС*** обратимыми. Японским математикам на базе результатов [321,322] по *универсальным* обратимым машинам Тьюринга удалось показать, что классические обратитимые ***1-ОС*** обладают свойством универсальной вычислимости, однако суть такой обратимости нами детально не исследовалась, поэтому подобное исследование представляется вполне уместным. Итак, вопрос моделирования произвольных *классических **d-ОС** обратимыми* структурами ***d-ОС (d≥1)*** все еще остается не совсем разработанным. Так, наши результаты по ***WM-*** и ***W***-моделированию классических ***d-ОС (d ≥ 1)*** говорят в пользу невозможности такого моделирования на основе достаточно широкого класса алгоритмов [88,90]. Между тем, при всей широте охвата моделирующих алгоритмов указанных классов они далеко не исчерпывающи, поэтому дальнейшие исследования по *поиску* алгоритмов моделирования необратимых классических ***d-ОС (d ≥ 1)*** обратимыми ***d-ОС*** не являются такими уж и бесполезными. Некоторые соображения в этом направлении нами уже сформировались и на их основе проводятся исследования, потребующие для своего завершения ряда дальнейших проработок и тщательной апробации. Усилия в получении *подобных* алгоритмов, доказательство их невозможности или алгоритмической неразрешимости проблемы заслуживают пристального внимания. Исследование принципов организации подобного типа моделирующих алгоритмов представляется достаточно интересным как с теоретической, так и с практической точек зрения, что и стимулировало ряд наших исследований [88,90,567].

4. В рамках общей проблемы моделирования в *классических* структурах ***d-ОС*** довольно большой прикладной интерес представляет вопрос симулирования *реальных* ***ОС***-моделей классическими. Здесь под ***реальной*** понимается такая ***ОС***-модель, которая отличается от классической тем, что ее единичный автомат при переходе в *следующий* момент времени в новое внутреннее состояние, определяемое ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, может перейти и в некоторое другое состояние из того же ***А***-множества внутренних состояний, т.е. *новое* внутреннее состояние автомата будет отличаться от *ожидаемого (на основе* ***ЛФП****)* состояния. Такое поведение единичного автомата в реальной ***ОС***-модели может объясняться целым рядом факторов, а именно: неисправность автомата, случайный сбой, выход его из строя и др. Поэтому данного типа структуры ***d-ОС*** естественно называть ***реальными***. Они представляют значительный интерес при исследовании ряда вопросов *практической* реализации параллельных вычислительных устройств на основе ***ОС***-моделей наряду с целым рядом других достаточно важных мотиваций.

Исследованию реальных ***ОС***-моделей, точнее вопросу надежности функционирования данного типа структур, посвящен целый ряд работ. Наиболее известной техникой *корректировки* ошибок функционирования реальных ***ОС***-моделей является метод ***Нишио-Кобуши*** [319], основная идея которого состоит в симулировании работы каждого единичного автомата реальной ***ОС***-модели тремя соседними автоматами. В этом случае симулирующая реальную ***ОС***-модель классическая структура на основе информации о соседях трех соседних автоматов в момент ***t>0*** безошибочно определяет состояние искомого единичного автомата в следующий момент времени ***t+1***. Однако функция выбора состояния в этом случае также должна выполняться вполне безошибочно.

До сих пор мы не занимались подобной проблематикой в рамках общей тематики однородных структур, но при первом же ее рассмотрении вполне уместным представляется использование уже имеющихся результатов по довольно развитой теории кодирования. Однако, здесь имеется и весьма существенное отличие. В теории кодирования схема «*кодер ⇒ канал передачи ⇒ декодер*» работает для сугубо последовательных цепочек символов, поступающих на вход кодера и затем появляющихся на выходе декодера. Повреждения в канале передачи информации носят также сугубо последовательный характер. Тогда как в реальных ***ОС***-моделях нарушениям подвержен одновременно ряд единичных автоматов структуры и исправлять эти нарушения *(во избежание существенного усложнения алгоритмов восстановления)* необходимо *одновременно* (*но не обязательно за один такт работы структуры*), так как все единичные автоматы в структуре функционируют строго синхронно. С этой целью наиболее естественным представляется ***блоковое*** кодирование символов конфигурации в ***ОС***-модели, суть которого состоит в помещении символа состояния единичного автомата структуры в специальным образом организованный кодировочный блок. Это соответствует замене реальной ***ОС***-модели с некоторым индексом соседства симулирующей ***ОС***-моделью, чей шаблон соседства включает ***ШС*** реальной модели, а организация его и способ функционирования *симулирующей* ***ОС***-модели позволяют *восстанавливать* того или иного класса нарушения, происходящие в *реальной* модели. При сделанном замечании представляется весьма перспективным использование для симулирующей ***ОС***-модели кодов на основе матриц *Адамара*, ортогональных латинских квадратов и ряд др. Наряду с этим результаты по теории *кодирования* могут иметь и другие приложения в ***ТОС***-проблематике. Предложенный подход к организации надежного функционирования *реальных* ***ОС***-моделей составляет одну из задач общей проблемы моделирования одной *классической* ***d-ОС*** другой структурой той же размерности при *подавлении* того или иного свойства моделируемой структуры (*в контексте отсутствия данного свойства для моделирующей структуры*).

К общей проблеме моделирования в классических ***d-ОС*** в значительной мере относится также и проблема надежности функционирования такого типа структур из реальных объектов. До сих пор предполагалось, что структуры ***d-ОС (d≥1)*** представляют собой сугубо абстрактную модель, функционирующую по вполне определенному параллельному алгоритму. Тогда как в *реальных* условиях функционирование ***ОС***-моделей, состоящее из довольно непростого взаимодействия составляющих их единичных автоматов, может быть подвержено различного рода нарушениям (*сбоям*), что влечет за собой крайне нежелательные последствия. В данной связи возникает очень важная задача такой *организации* ***ОС***-модели, которая позволяла бы для многих важных случаев корректировать возможные сбои в процессе функционирования реальной вычислительной ***ОС***-модели. Будем называть структуру ***d-ОС (d≥1)*** *самокорректирующейся*, если она в процессе своего функционирования способна устранять последствия сбоев в работе своих единичных автоматов и связующих их информационных каналов. Естественно, что для такого объекта как ***ОС***-модель, состоящего из бесконечного числа единичных автоматов (*возможно с довольно сложной внутренней организацией и большим числом внутренних состояний*), системы коммутации каждого единичного автомата с его непосредственными соседями, определяемыми индексом соседства, и сложными ***ЛФП***, вполне реальным представляется достаточно большое разнообразие аварийных ситуаций, возникающих при функционировании реальных ***ОС***-моделей. Здесь мы рассмотрим только два наиболее важных класса аварийных ситуаций, возникающих в реальных ***ОС***-моделях, а именно:

- ошибка при определении *следующего* внутреннего состояния единичного автомата структуры, т.е. сбой функционирования ее ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$;
- ошибка *при сборе* информации о состояниях единичных автоматов структуры, составляющих шаблон соседства, т.е. сбой в средствах коммутации структуры.

Рассматривая свойства ***ОС***-моделей на *поведенческом* (*динамическом*), а не на *структурном* уровне, мы вполне можем ограничиться только двумя данными типами аварийных ситуаций, которые в определенной мере являются результатом абстрагирования *реальных* условий. Более того, ввиду самого принципа функционирования ***ОС***-модели (*когда на получение информации о конфигурации* ***ШС*** *не затрачивается время*) нам вполне достаточно ограничиться рассмотрением лишь первого типа аварийных ситуаций. Согласно ранее введенному понятию ***ОС***-модели, в которых данного типа аварийные ситуации возможны, будем называть ***реальными***. В общем же случае в реальных ***ОС***-моделях в процессе их функционирования могут возникать и целый ряд других аварийных ситуаций (*выход из строя единичного автомата структуры, средств коммутации и др.*), однако мы в термин «***реальные***» вкладываем именно только приведенный смысл. Между тем, рассмотрение других типов аварийных ситуаций достаточно сложная и важная задача, подлежащая детальной разработке при *практических* реализациях ***ОС***-моделей [536]. Введем теперь понятие *надежности* реальной ***ОС***-модели.

<u>Определение 25</u>. Реальная структура d-ОС (d ≥ 1) обладает надежностью в $(1\text{-}1/m^d)\text{x}100\%$***, если в каждом d-мерном гиперкубе с ребром размера m может быть подвержено различным сбоям не более одного единичного автомата в один и тот же момент времени t > 0.***

Очевидно, что при граничных значениях $m=\infty$ и $m=1$ мы имеем дело соответственно с *надежными* (*классическими*) и *ненадежными* ***ОС***-моделями. Все другие промежуточные значения величины ***m*** дают различного *уровня надежности* реальные ***ОС***-модели. Рассмотрим теперь некоторые методы организации работы *реальных* ***ОС***-моделей, которые позволяют им быть *самокорректирующимися* вычислительно-информационными структурами.

В основу первого метода организации *самокорректирующихся* ***ОС***-моделей положены следующие соображения [53]. Состояния каждого единичного автомата *реальной* модели ***2-ОС*** кодируются в виде конфигурации *связного блока* из четырех автоматов согласно следующего индекса соседства ***X*={(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}***. Если *состояние* некоторого единичного автомата структуры есть $\alpha \in A$, то конфигурация представляющего его блока имеет следующий весьма вид, а именно:

α	*M*
α	α

где символ $M \notin A$ выполняет роль *маркера*, который позволяет упрощать функцию *корректировки*. Такого типа представление позволяет в *самокорректирующейся* структуре достаточно компактно представлять каждую конфигурацию. Здесь, не нарушая общности, рассматриваются реальные ***2-ОС***, но все сказанное в полной мере относится и к *реальным* ***d***-мерным ***ОС***-моделям ***(d>2)***. Если *реальная* ***2-ОС*** имеет шаблон соседства размера ***mxn***, то *самокорректирующаяся* структура, которая ей соответствует, будет иметь ***ШС*** уже размера ***(2mx2n)***. Пусть реальная ***2-ОС*** имеет надежность, определяемую значением $(1\text{-}1/m^2)x100\%$ $(m = 3)$.

Это значит, что в блоках автоматов размером *(3x3)* структуры не может возникать одновременно *более одного сбоя* в один и тот же момент времени ***t>0***. Определяем ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, заданную в алфавите $A \cup \{M\}$, в виде *суперпозиции* двух функций $\tau^{(q)}$ и $\tau^{(p)}$, таких, что соответствующие им ***ЛФП*** $\sigma^{(q)}$ и $\sigma^{(p)}$ определяют соответственно на основе конфигураций ***ШС*** размеров ***(2mx2n)*** и ***(3x3)*** *состояние* центрального автомата шаблона в следующий момент времени. При этом, предполагается, что в период выполнения ***ЛФП*** $\sigma^{(p)}$ сбоев не происходит, т.е. *сбоям* может быть подвержена лишь $\sigma^{(q)}$-функция. Таким образом, если функция $\tau^{(q)}$ осуществляет *симуляцию реальной* ***2-ОС***, то функция $\tau^{(p)}$ корректирует *все сбои* в единичных автоматах структуры, возникающие в момент *выполнения* $\tau^{(q)}$-функции. Следовательно, функция $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$ надежно симулирует реальную ***2-ОС***, образуя со способом кодирования состояний единичных автоматов *реальной* модели *самокорректирующуюся* ***ОС***-модель. Сказанное резюмирует следующий результат.

<u>Теорема 118</u>. Для каждой реальной d-ОС (d ≥1) надежности $(1\text{-}1/m^d)x100\%$ при $m \ge 3$ существует самокорректирующаяся структура той же размерности с алфавитом $A^*=A \cup \{M\}$ внутренних состояний и ГФП $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$, 2-моделирующая исходную реальную структуру, где $\tau^{(p)}$ – надежная корректирующая функция с индексом соседства Мура.

Задача корректировки реальных ***d-ОС*** весьма существенно упрощается, если предположить, что возникновение сбоев в единичном автомате структуры идентифицируется им же путем *перехода* в некоторое *сигнальное* состояние $g \notin A$. При таком предположении можно значительно упростить кодирование состояний реальной структуры и саму функцию $\tau^{(p)}$ *корректировки* сбоев. В случае реальной ***2-ОС*** состояние единичного автомата можно представлять линейной ***КФ*** вида ***«xxM»***, где ***M*** – маркер и $x \in A$. Тогда в соответствующей ей самокорректирующейся ***2-ОС ГФП*** $\tau^{(q)}$ будет иметь ***ШС*** размера ***(3mxn)***, а корректирующая $\tau^{(p)}$-функция – линейный ***ШС*** размера **3**, который располагается параллельно ***X***-оси в однородном Z^2-пространстве реальной структуры.

При сделанных выше предположениях вполне достаточно рассматривать сбои, происходящие в структуре в период выполнения ***ГФП*** $\tau^{(q)}$ в моменты времени $t > 0$, независимыми в линиях ***Y=h*** ***(h = 0; ±1; ±2; ±3; .....)*** единичных автоматов, а для любой линии ***Y=h*** в каждом линейном блоке из трех прилегающих автоматов не может происходить более одного сбоя. Тогда корректирующая $\tau^{(p)}$-функция имеет индекс соседства Мура для каждого ***Y***-значения и является весьма простой в реализации, что позволяет сделать ее очень надежной в практической *реализации* современными средствами микроэлектроники.

Интересные возможности для обеспечения *корректировки* можно получать при предположении, что единичный автомат в ***M***-состоянии работает без сбоев. Это вполне можно рассматривать как допустимое предположение, ибо для этого автомату нет необходимости собирать информацию и на ее основе определять свое последующее внутреннее состояние; достаточно лишь сохранять свое состояние постоянным в течение всего времени функционирования *реальной* ***ОС***-модели. В этом случае состояния единичных автоматов реальной ***ОС***-модели также кодируются линейной конфигурацией ***«xxM» (x∈A)***. При прочих *равных* условиях не потребуется наделять единичный автомат структуры свойством идентификации сбоев. Этот подход позволяет упрощать алгоритм функционирования единичного автомата моделиделирующей ***d-ОС (d≥1)***. Сказанное позволяет сформулировать следующий результат [53].

<u>Теорема 119</u>. Для каждой реальной d-ОС (d ≥ 1) надежности (1-1/m)x100% при m ≥ 3 существует самокорректирующаяся структура той же размерности с алфавитом внутренних состояний A*=A∪{M,g} и ГФП $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$, которая 2-моделирует исходную реальную d-ОС, где M, g – символы маркера и сбоя соответственно; $\tau^{(p)}$ есть надежная корректирующая функция с одномерным индексом соседства Неймана-Мура. При условии надежности функционирования автоматов в M-состояниях для каждой реальной d-ОС (d ≥ 1) той же надежности, что и выше, существует самокорректирующаяся структура той же размерности с алфавитом A*=A∪{M} внутренних состояний и ГФП $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$, 2-моделируещая исходную реальную структуру d-ОС (d≥1); при этом, надежная $\tau^{(p)}$-функция имеет следующий одномерный индекс соседства X={-2,-1,0,1,2}.

Дальнейшие работы по исследованию проблемы *самовосстановления* различного типа реальных структур ***d-ОС*** представляют значительный прикладной и познавательный интерес, и данному направлению следует уделить соответствующее внимание. К данному же направлению можно отнести и исследования по устойчивости того либо иного типа ***ОС***-моделей к различного рода сбоям. В этом плане представляют интерес структуры ***d-ОС*** из так называемого класса *пороговых* структур, для которых ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ выполняются по принципу порогового элемента: срабатывание происходит при достижении либо превышении некоторого порога сигналами, приходящими от автоматов шаблона соседства. Такого типа ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ уже в принципе своего функционирования содержат значительный элемент *надежности*, т.е. устойчивости к возможным сбоям. Быть может, это и есть одна из причин высокой надежности функционирования *реальных* нейроноподобных структур различной природы [536].

Из наиболее интересных тем исследования по надежности можно выделить следующие. Прежде всего, представляет интерес определение наиболее эффективных самокорректирующихся ***d-ОС*** относительно того или иного понятия сбоев. Большое прикладное значение имеет и достаточно удовлетворительное решение вопроса *надежности* вычислительных элементов, устройств, систем на основе ***ОС***-*моделей*, так как рассматриваемые до настоящего времени подходы носят, по своей сути, в значительной мере теоретический характер, представляясь недостаточно практичными в целом ряде *конкретных* реализаций. Между тем, такие подходы позволяют рассматривать задачу *надежности* различного рода и природы клеточных систем с различных точек зрения.

Из полученных результатов можно сделать ряд практических выводов. Так, использование этапа *корректировки* {$\tau^{(p)}$-*функция*} делает вполне целесообразным применение в *реальных* ***ОС***-моделях принципа переменной коммутации единичных автоматов в рамках некоторого максимального ***ШС***. Это же позволяет адекватно настраивать ***ОС***-модель на выполнение того либо иного класса параллельных алгоритмов. Это же в свою очередь служит новым источником *сбоев*, т.к. функция *коммутации* может быть достаточно сложной и часто изменяться в процессе функционирования реальной ***ОС***-модели. Сравнение теорем ***118*** и ***119*** по моделированию реальных ***d-ОС*** говорит в пользу наделения единичного автомата структуры некоторой возможностью *идентифицировать* собственные сбойные ситуации или способностью надежно сохранять *особое* состояние – *маркер*, что позволяет весьма существенно упрощать алгоритмы корректировки и снижать требования к надежности самих единичных автоматов, не снижая общего требования к *надежности* структуры в целом. Дальнейшие исследования в данном направлении крайне желательны со многих точек зрения и, в первую очередь, прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики.

Предложенные приемы *корректировки* реальных ***ОС***-моделей представляют определенный, как уже отмечалось, скорее всего, теоретический интерес (*нося черты общего принципиального подхода*), но для целей *практического* применения они недостаточно эффективны по требуемым ресурсам (*увеличение размера* ***ШС*** *и временные затраты*). Поэтому для практических задач требуется создать более эффективные методы *корректировки сбоев*, т.е. повышения *надежности* функционирования реальных ***ОС***-моделей и реализуемых на их основе конкретных устройств. Так, в практических реализациях вычислительных ***ОС***-моделей в целях обеспечения *надежности* функционирования наиболее естественным представляется структурный подход, основная суть которого состоит в обеспечении специальными корректирующими логическими схемами единичного автомата и, возможно, системы коммутации шаблона соседства ***ОС***-модели. Эти логические схемы на основе входной информации и текущего состояния единичного автомата должны иметь возможность достаточно эффективно осуществлять локальный анализ ***(тестирование)*** надежности каждого единичного автомата и при необходимости производить соответствующие диагностические или корректировочные процедуры.

Здесь мы имеем довольно широкое поле деятельности, причем некоторые полезные идеи можно использовать также из теоретических рассмотрений. На самом же деле, в *первую* очередь степень надежности любой системы тесно связана с определенной избыточностью информации. Между тем, при обсуждении *классических* ***ОС***-моделей (*хотя и реальных*) мы не принимали во внимание структуру единичного автомата. По этой причине кодирование его состояний для обеспечения возможности корректировки сбоев потребовало *дополнительного* использования единичных (*от* **2** *до* **3**) автоматов. Это порождает на практике существенное усложнение ***ОС***-моделей. В реальных же условиях единичный автомат может иметь два и более регистров, содержащих одно и то же состояние. Осуществляя синхронное изменение состояний регистров на основе ***ЛФП*** структуры и сравнивая полученные результаты, можно определять сбои в любом единичном автомате ***ОС***-модели, и на основе этой информации предпринимать те или иные *корректировочные* операции. И, наоборот, на базе практических решений можно строить формальные модели *корректировки* реальных ***ОС***-моделей. Формализация сказанного приводит нас к следующему результату.

<u>Теорема 120</u>. Пусть в единичном автомате реальной структуры d-ОС (d≥1) с алфавитом A за любые n шагов может произойти не более m сбоев ($m \leq [n/2]$)***. Тогда существует моделирующая ее самокорректирующаяся d-ОС* с тем же индексом соседства X, алфавитом*** A^n ***внутренних состояний, ГФП вида*** $\tau^{(q)}\tau^{(p)}$***, которая (n+1)-моделирует исходную реальную структуру d-ОС, где*** $\tau^{(q)}$ ***– соответствует ГФП моделируемой структуры и*** $\tau^{(p)}$ ***– простейшая корректирующая надежная функция моделирующей структуры d-ОС*.***

В основу доказательства данной теоремы положена реализация обобщенного на параллельный случай принципа двойного счета. Этот подход довольно прост в реализации, позволяя получать реальные ***ОС***-модели с произвольной степенью надежности. В случае практических реализаций, по-видимому, достаточно полагать ***n=3, m=1***, что довольно хорошо согласуется с возможностями современной микроэлектронной технологии производства интегральных схем, которые смогут послужить в качестве элементной базы при проектировании *реальных* систем и устройств на базе *вычислительных* ***ОС***-моделей. Результаты по *самокорректирующимся* ***ОС***-моделям могут оказаться плодотворными не только с точки зрения вычислительных наук, но и в контексте исследований механизмов восстановления, которые имеют место при возникновении повреждений в реальных биологических клеточных структурах. И по указанным причинам в настоящее время вопросам разработки самовосстанавливающихся ***ОС***-моделей уделяется достаточно большое внимание и, прежде всего, в связи с созданием на их базе различных объектов и устройств с использованием нанотехнологий [536]. Завершив рассмотрение ряда традиционных вопросов моделирования в *классических* структурах ***d-ОС (d≥1)***, переходим теперь к *формальным* параллельным алгоритмам, определяемым такого типа одномерными однородными классическими структурами. При этом подходе однородные структуры исследуются как специальный *класс* формальных параллельных алгоритмов с *абсолютно* параллельными правилами подстановок, т.е. как сугубо математический объект исследования подобно другим формальным алгоритмам.

6.5. Формальные параллельные алгоритмы, определяемые классическими одномерными однородными структурами

Параллельные алгоритмы переработки слов, определяемые классическими ***d-ОС (d≥1)***, изучаются особенно интенсивно в последние годы, что вызвано их не только самостоятельным интересом в рамках общей теории алгоритмов, но и использованием ***d-ОС*** в качестве формальных моделей в таких областях современного естествознания, как математическое моделирование, дискретная синергетика, вычислительные науки, физика, биология развития и др. *Параллельные* алгоритмы, определяемые классическими ***d-ОС (d-ПАОС)***, играют весьма существенную роль в формальном описании целого ряда *биологических* процессов развития и различных программируемых систем, базирующихся на вычислительных однородных структурах. Между тем, несомненный интерес для решения важных задач конструирования языков мультиобработки представляет и изучение формальных языковых моделей, функционирующих сугубо параллельным образом. С данной целью нами были определены формальные *параллельные* τ_n-грамматики и соответствующие им формальные параллельные $L(\tau_n)$-языки, кратко рассмотренные в главе **5** книги и более детально с которыми можно ознакомиться в указанных там же источниках. Тогда как в алгоритмическом отношении объекты ***d-ПАОС*** представляют собой дальнейшее исследование классических ***d-ОС*** как параллельных систем переработки слов в конечных алфавитах. Данная проблематика имеет самое прямое отношение к вопросу моделирования в *классических* структурах ***d-ОС (d ≥ 1)*** как по рассматриваемым задачам, так и по целому ряду основных методов исследования. В настоящем разделе определяется класс ***1-ПАОС*** и обсуждаются вопросы их сложности относительно целого ряда хорошо известных формальных алгоритмов переработки слов.

По определению ***1-ПАОС(a,n)*** оперирует на словах {*конфигурациях из* ***C(A,ϕ)****-множества*}, которые определены в алфавите $A=\{0,1,...,a-1\}$. Способ функционирования ***1-ПАОС(a,n)*** задается ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ некоторой классической структуры ***1-ОС***, определяемой ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ с параллельными правилами подстановок следующего общего вида, а именно:

$$\underbrace{000\,....\,0}_{n} \Rightarrow 0 \qquad x^j_1x^j_2x^j_3\,...\,x^j_n \;\Rightarrow\; x^*{}^j_1; \quad x^*{}^j_1,\ x^j_k\in A\ (k=1\,..\,n;\ j=1\,..\,a^n-1) \tag{56}$$

применяемыми одновременно к каждому перерабатываемому алгоритмом слову ***S*** из множества ***C(A,ϕ)*** *конечных* ***КФ***. Как известно, параллельные правила подстановок **(56)** определяют ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ соответствующей классической ***1-ОС***. Для каждого слова $c\in C(A,1,\phi)$ параллельный ***1-ПАОС(a,n)*** определяет последовательность слов $<c>[\tau^{(n)}]$, в которой *слово* c_k называется *финальным*, если для него имеет место следующее соотношение $c_{k+1}=c_k\tau^{(n)}=c_k$. Пусть $C(A,1,\phi)$ будет множеством слов, перерабатываемых параллельным алгоритмом ***1-ПАОС(a,n)***, и ***F*** – частичная словарная функция в алфавите ***A***, если для некоторого конечного слова $c_j\in C(A,1,\phi)$ соотношение $F(c_j) = c^*{}_j\in C(A,1,\phi)$ имеет место. Для словарной ***F***-функции области существования и значений соответственно есть E_F и V_F. С учетом сделанных предположений будем говорить, что *словарная* ***F***-функция, которая определена в алфавите ***A****, ***ПАОС-вычислима***, если существует алгоритм ***1-ПАОС*** в алфавите $A = \{b\}\cup A^*$ $(b\notin A^*)$ такой, что для любого слова $c^*{}_o\in C(A^*,1,\phi)$, если c_o – представление слова $c^*{}_o$ вида: $c^*{}_o= \square b^{p+2}0^1b^20^{p+1}c^*{}_ob^{p+2}\square$, то выполняются *два* следующих основных определяющих условия:

1) если слово ***c**** принадлежит E_F-области существования ***F***-функции, то последовательность ***КФ*** $<c_o>[\tau^{(n)}]$ содержит ***финальное*** c_f-слово следующего общего вида, а именно:

$$c_f = \square b^{p+2}0^1b^10^{p+2}F(c^*{}_o)b^{p+2}\square, \qquad F(c^*{}_o)\in V_F; \tag{57}$$

2) если слово c^*_o не принадлежит E_F-области существования *F*-функции, то последовательность $<c_o>[\tau^{(n)}]$ не содержит ***финального*** c_f-слова вида *(57)*.

В свете вышеприведенного определения показано [3], что словарная *F*-функция является ***ПАОС-вычислимой*** тогда и только тогда, когда она вычислима по Тьюрингу. Эквивалентность строгих формализаций интуитивного понятия вычислимой функции представляет еще *один* достаточно сильный аргумент в подтверждение хорошо известного тезиса ***А. Черча.*** В теории формальных алгоритмов большое внимание уделяется вопросам вычислительной сложности и относительно класса параллельных алгоритмов ***1-ПАОС*** в данном направлении получен следующий довольно интересный результат [3,5,9,53,88].

<u>Теорема 121</u>. Каждая частично рекурсивная словарная функция F, определенная в некотором конечном алфавите A*, ПАОС-вычислима в расширенном алфавите $A = \{b\} \cup A^*$ $(b \notin A^*)$.

Из результата теоремы ***121*** следует, что параллельные *алгоритмы* ***1-ПАОС*** *эквивалентны* в смысле сложности *Маркова-Нагорного* нормальным алгоритмам Маркова. Нами были довольно детально проанализированы вопросы *параллелизма* класса алгоритмов ***1-ПАОС***, в результате чего удалось определить наиболее интересные направления для дальнейших исследований такие как: классы параллелизма, детализация и уточнение сущности параллелизма (*до сих пор носящей достаточно интуитивный характер*), выбор наиболее пригодных для эффективной реализации алгоритмов в вычислительных ***ОС***-моделях и целый ряд других. Так, в частности, был определен достаточно интересный класс т.н. *локально реализуемых алгоритмов* (***ЛРА***), сущность которого заключается в возможности представлять общий алгоритм обработки в виде *локальных идентичных* алгоритмов над отдельными подсловами каждого перерабатываемого общим алгоритмом слова. В качестве довольно простого примера такого алгоритма можно указать на задачу символьной сортировки. Проведенные исследования позволяют сформулировать предположение о том, что алгоритмы класса ***ЛРА*** могут реализовываться в ***ОС***-моделях наиболее эффективным образом. В этой связи возникает довольно интересный вопрос о существовании других классов алгоритмов, наиболее эффективно *реализуемых* в среде вычислительных ***ОС***-моделей, и каким образом они могут быть охарактеризованы.

Возвращаясь к задаче *символьной сортировки*, оценим эффективность ее реализации средствами ***1-ПАОС*** алгоритмов. Общая задача символьной сортировки определяется следующим образом. Пусть ***X*** – произвольное конечное слово в алфавите ***A***, для символов которого определена некая иерархия (*принцип приоритета*). Необходимо определить ***GSA***-алгоритм, который посимвольно сортирует произвольное конечное слово ***X*** согласно заданному принципу приоритета символов. Хорошо известно, что последовательные алгоритмы требуют для решения этой задачи не более, чем $M=\alpha|X|^2$ (*где* α *– константа и* $|X|$ *– длина слова* ***X***) просмотров ***X*** слова ***X***, тогда как ***1-ПАОС*** решает данную задачу за строго *линейное* время, а именно: ***Существует 1-ПАОС, сортирующий произвольные конечные слова X длины L за не более, чем L шагов.*** К подобной задаче сортировки непосредственно примыкает и *хорошо* известная *проблема Французского флага* (***ПФФ***), являющаяся формализацией проблемы регуляции и дифференциации реальных биологических клеточных структур, детально обсуждаемая в наших работах [3,5,26,27,33]. При этом, детальное обсуждение ***ПФФ*** показывает, что она является *одним* из типов сортировки в общем ее понимании, а модели, решающие ***ПФФ***, могут оказаться достаточно полезными при создании довольно эффективных алгоритмов сортировки, и наоборот, – решение ряда проблем, связанных с разработкой теории параллельных алгоритмов, сможет пролить свет и на многие биологические аспекты регуляции и дифференциации клеточных систем, а также и некоторых других проблем биологии развития в целом, что представляется достаточно важным и актуальным.

В этом же плане представляет интерес и задача зеркального обращения произвольной конечной строки (*конфигурации*) посредством $MT^s{}_q$ и классической структуры ***1-ОС***. Несложно убедиться, что для обращения строки длины m посредством $MT^s{}_q$ требуется порядка $2m^2$ шагов. Тогда как классическая **1-ОС** может решать эту же задачу за *линейное* время. Для данной задачи определим моделирующую классическую **1-ОС** следующим способом. В качестве алфавита G внутренних состояний единичного автомата моделирующей **1-ОС** с простейшим индексом соседства $X=\{0, 1\}$ выбирается множество *структурированных* состояний $G = \left\{ \begin{bmatrix} \varpi \\ \varphi \end{bmatrix} | \varpi, \varphi \in A \bigcup \{\Delta\} \right\}$, благодаря которому

каждая конечная **КФ** c_o =□$x_1 x_2$ ... x_m□ ($x_k \in A$; $k=1..m$) исходной (*моделируемой*) классической **1-ОС** в моделирующей структуре представляется в следующем общем виде, а именно:

Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ
Δ	Δ	x_1	x_2	x_3	....	x_{m-1}	x_m	Δ	Δ

(58)

Для решения задачи зеркального обращения произвольной **КФ** c_o определяем (*частично; только для конкретной цели моделирования*) **ЛФП** $\sigma^{(2)}$ с простым индексом соседства $X=\{0, 1\}$ следующими параллельными правилами подстановок, а именно:

$$\begin{bmatrix}\Delta\\x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\Delta\\x\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}\Delta\\x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\\Delta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\\Delta\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}\Delta\\\Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\Delta\\\Delta\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}w\\\Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\\Delta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\Delta\\\Delta\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}\Delta\\x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\\\Delta\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}y\\\Delta\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}\Delta\\\Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\\Delta\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}z\\y\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}x\\\Delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\w\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}y\\\Delta\end{bmatrix}\quad x, y, z \in A; w \in A \cup \{\Delta\}$$

Посредством несложных преобразований легко убедиться, что, начиная с **КФ** c_o вида **(58)**, через $t=2m-1$ шагов *моделирующая* классическая **1-ОС**, определенная вышеуказанными правилами $\sigma^{(2)}$ параллельных подстановок, переводится в **КФ** c_t следующего вида, а именно:

Δ	Δ	x_m	x_{m-1}	....	x_3	x_2	x_1	Δ	Δ
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ

являющуюся *рекурсивно* идентифицируемым представлением *зеркального* обращения начальной **КФ** c_o *моделируемой* структуры. Представленный способ структурирования алфавита состояний моделирующей структуры (*использованный нами и ранее* [53-56]) позволяет довольно эффективно решать целый ряд интересных задач моделирования, не являясь при этом оптимальным с точки зрения сложности классических **ОС**-моделей.

Таким образом, ***если $MT^s{}_q$ решает задачу зеркального обращения произвольной КФ s длины m за время порядка $t = 2m^2$, то соответствующим образом определенная классическая структура 1-ОС с простейшим индексом соседства решает эту же задачу за время $t = 2m-1$.*** Аналогичным методом можно показать, что: ***Задача распознавания симметрии произвольного слова s длины m решается $MT^s{}_q$ за время порядка $t=\beta m^2$ (β – константа), тогда как классическая 1-ОС решает эту же задачу за время порядка $t=[m/2]$.*** В монографии [1] для решения данной задачи за время $t=3[m/2]$ была определена весьма простая классическая **1-ОС** с индексом соседства $X=\{-2,-1,0,1,2\}$, тогда как представленный выше подход позволяет сократить это время в три раза при сведении индекса соседства решающей структуры к *простейшему*. Аналогичным образом можно показать: ***Существует классическая 1-ОС с простейшим индексом соседства, удваивающая каждую КФ длины m, определенную в некотором сужении алфавита A, за время $t = \beta m$ (β – константа), т.е. данная структура 1–ОС использует расширенный относительно удваиваемых КФ алфавит.***

Классическая **1-ОС** со *структурированным* алфавитом G внутренних состояний вида, например, $G = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} | x \in A; q \in Q; A \bigcap Q = \varnothing \right\}$, позволяет довольно эффективно (*относительно* ***A****-алфавита* **1-ОС,** *определяемого традиционно)* решать кроме вышерассмотренных и целый ряд других интересных задач моделирования в ее среде.

$$(\alpha)\ \begin{bmatrix} x_1 \\ q_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x`_1 \\ q`_1 \end{bmatrix} \qquad (\beta)\ \begin{matrix} q_0x_1q_1x_2q_2 \to x`_1 \\ x_1q_1x_2q_2x_1 \to q`_1 \end{matrix} \qquad x`_1, x_k \in A;\ q`_1, q_j \in Q\ \ (k = 1..3;\ j = 0..3)$$

Вместе с тем, она несложно погружается в классическую структуру ***1-ОС*** с индексом ***X*** соседства ***X=*{*-1,0,1,2,3*}**, алфавитом ***W=A∪Q*** внутренних состояний и ***ЛФП***, определяемой параллельными подстановками представленного выше вида **(α)**, соответствующим параллельным подстановкам **(β)** ***ЛФП*** $\sigma^{(4)}$ *исходной* классической структуры. В таком случае текущей ***КФ*** следующего общего вида, а именно:

....	□	x_1	x_2	x_3	....	x_m	□	....
....	Δ	q_1	q_2	q_3	....	q_m	Δ	....

моделирующей структуры соответствует текущая ***КФ*** $c = ...x_oq_ox_1q_1x_2q_2 \ldots x_mq_m...$ моделируемой структуры. Таким образом, уровневое структурирование состояний алфавита ***A*** структуры ***1-ОС*** позволяет в целом ряде случаев существенно упрощать решение задачи моделирования, а также и сам процесс параллельного программирования в классических ***ОС***-моделях.

$$\left.\begin{matrix}
\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_\kappa \\ s_\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s`_\kappa \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_\kappa \\ s_\kappa \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} q`_\kappa \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} q_\kappa \\ s_\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix}
\end{matrix}\right\},\ \ if\ z_k = -1;\quad \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_\kappa \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}
\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_\kappa \\ s_\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} q`_\kappa \\ s`_\kappa \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_\kappa \\ s_\kappa \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} q_\kappa \\ s_\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix}
\end{matrix}\right\},\ \ if\ z_k = 0;\quad
\left.\begin{matrix}
\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_\kappa \\ s_\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s`_\kappa \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_\kappa \\ s_\kappa \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa-1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} q_\kappa \\ s_\kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta \\ s_{\kappa+2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} q`_\kappa \\ s_{\kappa+1} \end{bmatrix}
\end{matrix}\right\},\ \ if\ z_k = 1; \qquad (G)$$

Предложенный метод структурирования состояний *(допускающий целый ряд довольно интересных обобщений)* алфавита позволяет естественно погружать в классическую структуру ***1-ОС*** машину MT^s_q, кодируя ее текущую конфигурацию соответствующей ***КФ*** моделирующей ***1-ОС*** вида:

Δ	Δ	Δ	Δ	q_k	Δ	Δ	Δ	Δ
Δ	s_{k-3}	s_{k-2}	s_{k-1}	s_k	s_{k+1}	s_{k+2}	s_{k+3}	Δ

Подобное структурирование внутренних состояний алфавита ***ОС***-модели позволяет достаточно эффективно разносить по уровням *управляющие* ходом выполняемого параллельного алгоритма модели информационные потоки. Но тогда каждая команда $s_kq_k \to s`_kq`_kz_k$ ($s_k, s`_k$ *– сканируемые символы на выходной ленте;* $q_k$, $q`_k$ *– состояния конечного автомата,* z_k=**{*-1*|*0*|*1*}** *– сдвиг сканирующей головки соответственно {влево|на месте|вправо})* MT^s_q просто ***1***-моделируется соответствующими *параллельными* подстановками *локальной* функции перехода ***1-ОС*** с индексом соседства ***X=*{*-1,0,1*}**

Неймана-Мура, как это проиллюстрировано в *(G)*, где Δ – пустой символ выходной ленты MT^s_q. В качестве полезного упражнения читателю рекомендуется протестировать данную программу работы моделирующей структуры. Данный прием моделирования позволяет более естественно переносить результаты, полученные по проблематике MT^s_q, на *классические* ***ОС***-модели, однако он не совсем пригоден, если требуется получать *оптимальные* (*либо близкие к ним*) параметры для моделирующей структуры. Между тем, для задач, требующих получения только *принципиальной* возможности решения той либо иной проблемы, он вполне приемлем.

Пусть в *моделируемой* структуре ***1-ОС*** с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$ и произвольным алфавитом ***A*** текущая ***КФ*** имеет вид $c=□x_1x_2x_3...x_m□$, тогда как соответствующая ей ***КФ*** *моделирующей* ***1-ОС*** с простейшим индексом соседства ***Xn***, *структурированным* алфавитом ***S*** и ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$, определяемой параллельными подстановками следующего общего вида, а именно:

$$(\alpha)\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x`_1 \\ x`_2 \end{bmatrix} \qquad (\beta)\ \ x_1x_2x_3 \to x`_1 \quad x`_1, x`_2, x_k \in A;\ (k = 1..4)$$

представляется двухуровневой конструкцией следующего весьма простого вида:

□	□	x_1	x_3	x_5	....	x_{m-1}	□	□
□	□	x_2	x_4	x_6	....	x_m	□	□

Параллельные подстановки (α) соответствуют подстановкам (β). Такая модификация принципа структурирования состояний алфавита ***S*** моделирующей структуры интересна со многих точек зрения и обобщается на произвольный ***ШС*** моделируемой структуры.

Вполне естественно предположить, что *распараллеливание* дает весьма существенный временной выигрыш, когда временная сложность алгоритма нелинейно зависит от входных данных задачи (*относительно последовательных моделей вычислений*) как, в частности, в случае задачи сортировки. Но даже в линейном случае распараллеливание может давать весьма существенный временной выигрыш. В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим известную задачу *нахождения образца на строках*. Пусть ***X*** и ***Y*** – две строки длин соответственно ***n*** и ***m*** символов из конечного алфавита ***A*** и требуется определить принадлежность подстроки ***X*** строке ***Y*** ($X \subset Y$?). ***Д. Кнут***, ***А. Морис*** и ***П. Пратт*** предложили решение данной задачи за время не хуже, чем $0(n+m)$. Вместе с тем, можно показать, что: ***Специальным образом организованная классическая 1-ОС с индексом соседства X Неймана-Мура может решать эту же задачу за время не хуже, чем 0(|n-m|*** [5,37]***)***. Имеет место целый ряд и других достаточно интересных примеров подобного характера [5,53-56,88,90,536].

Класс *параллельных* алгоритмов, определяемых *классическими* ***ОС***-моделями, представляет собой собственный подкласс класса всех *локальных* алгоритмов (***ЛА***), т.е. алгоритмов, устанавливающих свойства элементов множества и использующих на каждом шаге при этом информацию только об окрестности обрабатываемого в данный момент слова. В терминах ***ЛА*** естественным образом формулируются и решаются задачи о существовании или отсутствии эффективных алгоритмов для различных дискретных экстремальных задач [53-56]. Поэтому результаты и методы теории ***ЛА*** было бы весьма интересным применить и к исследованию класса алгоритмов ***d-ПАОС*** ($d \geq 1$).

В последние годы появляется все большее число работ, посвященных вопросам по *параллельным* алгоритмам, как составной компоненты общей теории алгоритмов. В данном отношении нами исследовался вопрос временной сложности ***1-ПАОС*** относительно ряда известных формальных моделей последовательных вычислений [5,35,37,47,88,90,536].

Теорема 122. Если некоторая частично рекурсивная словарная функция F может вычисляться параллельным алгоритом 1-ПАОС(a,n) за t шагов то соответствующая ему машина Тьюринга может вычислять эту же функцию за не более, чем $\{(n+1)t^2 + (n-1)t\}/2$ ***шагов.***

Проведенный анализ данного результата показывает достаточную степень *близости* полученной оценки к *оптимальной*. Следовательно, если некоторая частично рекурсивная *словарная* функция ***ПАОС***-вычислима за время t, то подходящая машина Тьюринга может вычислять ее за время не хуже, чем αt^2 (α – *константа*). Итак, для формальных вычислителей на основе *классических* ***1-ОС*** и *одноленточных* машин *Тьюринга* разница во времени вычислений имеет *квадратичный* порядок. Более наглядно можно проиллюстрировать вычислительные возможности алгоритмов ***1-ПАОС*** (*в плане их временной сложности*) на следующем примере. Хорошо известно, что двухсторонний стэковый автомат (***ДСА***) эквивалентен одноголовочной машине Тьюринга со временем работы t не хуже, чем $t=|x|^{\alpha|x|}$, где x – входное слово, α – некоторая константа. С детальным описанием ***ДСА*** и принципом его функционирования можно ознакомиться в [9,37]. Характеристика ***ДСА*** в терминах параллельных алгоритмов ***1-ПАОС*** дает существенно лучший результат относительно характеристики их временной сложности [5,37].

Теорема 123. При условии, что ДСА допускает некоторое множество конечных слов за t шагов, соответствующий ему параллельный алгоритм 1-ПАОС может допускать то же множество слов за не более, чем $2t^2$ ***шагов.***

Таким образом, посредством *параллельных* алгоритмов ***1-ПАОС*** для целого ряда вычислительных алгоритмов можно получать существенно более лучшие временные результаты, чем используя машины Тьюринга. Более того, следует отметить, что высокая степень параллелизма, присущая алгоритмам ***1-ПАОС***, использовалась лишь на уровне ***Т***-*моделирования* одного алгоритма другим; кроме того, в большинстве случаев существенно не использовался *параллелизм*, присущий самим моделируемым алгоритмам. В данном направлении дальнейшие исследования представляются нам весьма перспективными и актуальными [536].

Будем говорить, что машина Тьюринга MT^s_q допускает множество конечных слов G, заданных в алфавите A, если машина MT^s_q, содержащая на *выходной* ленте произвольное конечное ω-слово, определенное в алфавите A, переходит в *заключительное* состояние q_0 после анализа этого слова тогда и только тогда, когда $\omega \in G$. Пусть $S(c)$ будет множеством всех конечных предшественников некоторой ***КФ*** $c \in C(A,1,\phi)$ для классической ***1-ОС*** с алфавитом A внутренних состояний (*c^* есть предшественник конфигурации $c \in C(A,1,\phi)$, если $c^*\tau^{(n)}=c$*). Проблема определения *предшественников* конечных ***КФ*** в *классических* ***ОС***-моделях играет достаточно важную роль, прежде всего, с точки зрения исследования свойства обратимости динамики, фундаментального при использовании ***d-ОС*** ($d \geq 1$) в качестве концептуальных моделей пространственно-распределенных дискретных динамических систем, из которых физические системы представляются наиболее интересными. С учетом сделанных выше предположений имеет место следующий интересный результат [55], имеющий ряд достаточно важных приложений.

Теорема 124. Для любой конфигурации $c \in C(A,1,\phi)$ ***машина*** MT^s_q ***допускает множество*** $S(c)$ ***за не более, чем*** $2(|c^*|+n)^2$ ***шагов, где*** c^* ***– предшественник с-конфигурации, имеющей максимальную длину.***

Исследуя вопросы обратимости динамики в классических ***ОС***-моделях, ***Т. Тоффоли*** показал, что в случае *классических* ***d-ОС*** ($d=1,2$) [273,318] для любой ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ множество $S(c)$ может быть сгенерировано некоторым *недетерминированным* конечным *автоматом* (***НКА***), что позволяет нам делать определеные выводы о *временной* сложности генерации и распознавания *предшественника* конечной ***КФ*** классических ***ОС***-моделей посредством ***НКА*** и MT^s_q.

Как уже отмечалось выше, однородные структуры *на разбиении* (***ОСнР***), определенные в разделе **1.2**, моделируются в *реальное* время классическими ***d-ОС*** ($d \geq 1$) с *переменным* индексом соседства, правила применения составляющих *подиндексов* которого определяются координатами текущего единичного автомата Z^d-пространства структуры. Класс структур ***ОСнР*** представляет интерес, в первую очередь, из-за относительно несложного программирования в их среде такого важного с физической и ряда других точек зрения свойства, как обратимость динамики моделей. Данного типа ***ОС***-модели можно рассматривать как *простейший подкласс* класса всех *асинхронных* моделей и изучению его модельных свойств следует уделить особое внимание, т.к. на сегодня результаты в данном направлении носят достаточно эпизодический характер. Прежде всего, представляется необходимым исследование вопросов моделирования в среде структур ***ОСнР*** (*и возможно ряда их модификаций*), аналогичных случаю *классических* ***d-ОС*** ***(d≥1)***. Ряд результатов в этом направлении получен [90], однако здесь все еще остается немало и открытых вопросов.

В настоящее время известен целый ряд работ по исследованию *различных* концепций *магазинных* автоматов [5,390,536]. В рамках данного класса весьма существенное значение для структурного программирования представляют т.н. ***bc-автоматы***, получившие весьма широкую известность по работам, связанным с *представимостью* в них формальных языков. На основе описания этого ***bc***-автомата нетрудно убедиться, что для него существует трехголовочная $MT^s{}_q$, моделирующая его без замедления во времени, и одноголовочная $MT^s{}_q$, моделирующая его за время $2(t+1)^2$, где t – время обработки ***bc***-автоматом входного слова. Следующий результат оценивает временные затраты *параллельного* алгоритма ***1-ПАОС*** на выполнение той же самой работы, что и некоторый ***bc***-автомат [37].

<u>Теорема 125</u>. Если некоторый bc-автомат требует t шагов для обработки входного конечного слова S, то соответствующий ему параллельный алгоритм 1-ПАОС сможет выполнить ту же работу за не более, чем $2(t+1)^2$ ***шагов.***

Полученные нами в данном направлении результаты моделирования имеют различную *степень* близости к оптимальным, однако позволяют в определенной степени проводить сравнительные оценки *временных* сложностей классических ***ОС***-моделей и других известных последовательных формальных вычислительных моделей. В сочетании же с результатами других исследователей в этом направлении данные результаты позволяют получить достаточно полную картину в сфере вычислительной *сложности классических* ***ОС***-моделей. Так, например, в работе [171, 29; с. 210-218] ***А. Хеммерлинг*** представил довольно интересный обзор исследований по *сравнительному* анализу вычислительной сложности *классических* ***ОС***-моделей и ***d***-мерных машин *Тьюринга* ***(d≥1)***. Между тем, по сравнению с теорией последовательных формальных алгоритмов, теория параллельных *вычислительных* ***ОС***-моделей не является столь продвинутой. В следующей главе книги вопросы *сложности* ***d-ОС (d≥1)*** будут рассмотрены в *совершенно* ином аспекте, характеризующем свойства моделей не на уровне *общего* для них множества ***C(A,d,ϕ)*** *конечных* ***КФ***, а на уровне определяемых ими глобальных функций перехода $\tau^{(n)}$, позволяя дифференцировать сам класс ***d-ОС (d≥1)***.

6.6. Программное обеспечение и аппаратура для симулирования классических ОС-моделей

Несмотря на такое чрезвычайно простое понятие классических *однородных структур*, они имеют, вообще говоря, достаточно сложную динамику. Во многих случаях теоретическое исследование их *динамики* сталкивается с достаточно существенными затруднениями. Поэтому, компьютерное симулирование ***ОС***-моделей, которое эмпирическим путем позволяет исследовать их *динамику* – чрезвычайно мощный инструмент. В настоящее время, проблема компьютерного *симулирования* структур решается на двух основных уровнях, а именно: ***(1)*** программное обеспечение, которое симулирует *динамику* на вычислительных системах *традиционной* архитектуры, и ***(2)*** аппаратная архитектура ЭВМ, которая *максимально* соответствует ***ОС***-концепции, т.н. ***ОС***-ориентированная архитектура вычислительных систем. Компьютерное симулирование ***ОС***-моделей играет весьма существенную роль при теоретических исследованиях их *динамики*, однако оно еще более важно при практических реализациях ***ОС***-моделей различных процессов. К настоящему времени было разработано немало весьма интересных систем программного обеспечения и оборудования для помощи исследователям различных типов ***ОС***-моделей [536].

Программные средства симулирования ОС-моделей. ***Дж. фон Нейман*** и ***С. Улам***, пожалуй, были первыми, осознавшие широкие возможности компьютерного моделирования и симулирования. Так, в частности, ***С. Улам*** рассматривал эвристическое использование компьютеров для многих интересных приложений. Очевидно, ***С. Улам, Дж. Холладей*** и ***Р. Шрандт*** являются пионерами эффективного компьютерного симулирования ***ОС***-подобных моделей [431-434]. Данные ранние исследования динамики ***ОС***-подобных моделей основывались на двух формах конфигураций, а именно. Самые простые *конфигурации*, наблюдаемые в ряде естественных ***ОС***-систем (*кристаллы, органические молекулы и т.д.*), являются периодическими, и их свойства весьма широко изучались математически. Используемые здесь *правила* роста приводят к намного более сложной и в общем случае *непериодической* динамике конфигураций, свойства которой намного сложнее установить математически, несмотря на всю относительную простоту задаваемых рекурсивных отношений. Вышеупомянутые авторы использовали весьма мощные компьютеры в Лос-Аламосской научной лаборатория (*USA*) для генерации огромного числа данного типа конфигураций и рассмотрели целый ряд свойств их *морфологии* во времени и пространстве. Большинство в этом направлении результатов являются *эмпирическими* по природе, однако пока имеется не так уж и много общих свойств, которые могут быть получены теоретически. Подобная картина имеет место и для ***ОС***-моделей в целом, поэтому компьютерное симулирование и моделирование становится одним из *основных* исследовательских методов в ***ТОС***-проблематике и связанных с ней сугубо прикладных направлениях данного типа динамических объектов [536].

Последующий этап в развитии компьютерного подхода к исследованию ***ОС***-подобных моделей восходит к исследователям *Logic of Computer Group* Мичиганского университета, которыми была создана первая аппаратно-программная система для эвристического исследования ***ОС***-моделей [128]. ***Р. Брендер*** [1,174] был, по-видимому, первым, разработавшим систему программирования для симулирования ***ОС***-моделей. Последующее развитие компьютерного модельного подхода характеризуется созданием большого количества *программных* систем различного характера для симулирования и эмпирического исследования различных динамических аспектов ***ОС***-моделей. В частности, в наших работах [8,9,15,19,20,54-56,90,94,98,103,118] представлено немало программ в среде различных языков программирования для различных компьютерных платформ. Средства математического пакета ***Mathematica*** [93] поддерживают алгебраические правила подстановок, которые достаточно легко моделируют локальные функции перехода *классических* ***1-ОС***. В этом контексте немало интересных программ для *симуляция* ***ОС***-моделей в среде пакета ***Mathematica*** могут быть найдены, например, в книге [167].

В качестве одного примера представим довольно простую процедуру ***CA_HS_1D(Co,n,R,P,H,LF)***, которая выполняется в среде известного математического пакета ***Maple*** [101-118]. Эта процедура имеет шесть формальных аргументов, позволяя симулировать динамику классических *бинарных* ***1-ОС*** с произвольным индексом соседства. Первые ее четыре аргумента определяют начальную бинарную конфигурацию ***(Co)***, размер шаблона соседства ***(n)***, определяющий номер ***1-ОС (R)*** и число итераций ***(P)***. Тогда как через два *последних* аргумента ***H, LF*** соответственно возвращаются последовательность конфигураций (*история*) и локальная функция перехода $\sigma^{(n)}$ *заданной* ***1-ОС***. Начальная конфигурация определяется бинарной строкой, например ***Co = «10110011011010001»***. Размер шаблона соседства структуры должен быть не менее **2**, а его значение ограничено лишь размером доступной памяти компьютера. Определяющие номера ***1-ОС*** мы поясним следующей таблицей, представляющей множество всех локальных функций перехода ***127*** бинарных ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура, а именно:

000 ⇒ 0	***000 ⇒ 0***	***000 ⇒ 0***	***000 ⇒ 0***	***.....***	***000 ⇒ 0***	***.....***	***000 ⇒ 0***
001 ⇒ 0	***001 ⇒ 0***	***001 ⇒ 0***	***001 ⇒ 0***	***.....***	***001 ⇒ 1***	***.....***	***001 ⇒ 1***
010 ⇒ 0	***010 ⇒ 0***	***010 ⇒ 0***	***010 ⇒ 0***	***.....***	***010 ⇒ 1***	***.....***	***010 ⇒ 1***
011 ⇒ 0	***011 ⇒ 0***	***011 ⇒ 0***	***011 ⇒ 0***	***.....***	***011 ⇒ 0***	***.....***	***011 ⇒ 1***
100 ⇒ 0	***100 ⇒ 0***	***100 ⇒ 0***	***100 ⇒ 0***	***.....***	***100 ⇒ 0***	***.....***	***100 ⇒ 1***
101 ⇒ 0	***101 ⇒ 0***	***101 ⇒ 0***	***101 ⇒ 1***	***.....***	***101 ⇒ 0***	***.....***	***101 ⇒ 1***
110 ⇒ 0	***110 ⇒ 1***	***110 ⇒ 1***	***110 ⇒ 0***	***.....***	***110 ⇒ 1***	***.....***	***110 ⇒ 1***
111 ⇒ 1	***111 ⇒ 0***	***111 ⇒ 1***	***111 ⇒ 0***	***.....***	***111 ⇒ 1***	***.....***	***111 ⇒ 1***
1	***2***	***3***	***4***	***.....***	***99***	***.....***	***127***

При этом, нами рассматриваются только *классические стабильные* ***ОС***-модели, для которых имеет место определяющая параллельная подстановка вида ***000 ⇒ 0***. Как говорилось выше, локальная функция перехода *(в частности)* бинарных ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура ***X***={***-1,0,1***} определяется множеством параллельных подстановок $\sigma^{(n)}$, которые *(за исключением тривиального случая)* могут быть пронумерованы целыми числами от ***1*** до ***127***. Таким способом каждая модель этого класса может быть охарактеризована как *бинарными* векторами $[0,b_7,b_6,b_5,b_4,b_3,b_2,b_1]$, так и определяющим номером типа $R = \sum_k b_k 2^{k-1}$ ($b_k \in \{0,1\}$; $k=1..8$). Если ***1-ОС*** при вызове процедуры ***CA_HS_1D*** задается ее определяющим номером ***R***, то через ***LF***-аргумент возвращается локальная функция перехода в виде вышеуказанного *бинарного* вектора. Значение ***P***-аргумента определяет *число* применений *(итераций)* глобальной функции перехода $\tau^{(n)}$ {*определенной соответствующей локальной функцией перехода* $\sigma^{(n)}$}. Через ***H***-аргумент процедура возвращает последовательность конфигураций, сгенерированную указанной ***1-ОС*** из начальной бинарной конфигурации ***Co***. В целях удобства и вследствие ряда других причин *бинарные* ***КФ*** представляются их десятичными *эквивалентами*, в частности, конфигурация вида ***Cf***=«***11111011001***» имеет десятичный эквивалент Cf_d=***2009***. Этот подход позволяет интерпретировать произвольную *бинарную* ***1-ОС*** как генератор целых чисел и решать целый ряд достаточно интересных задач из теории чисел [536].

```
CA_HS_1D:= proc(Co::{string, symbol}, n::integer, R::integer, P::integer, H::evaln, LF::evaln)
local k, k1, k2, C1, C2, G, F, N, L, T, h, p, Con_N, Delta, alpha, psi, rho;
  Con_N := proc(s::{string, symbol})
    local Art, Kr;
      Art := convert(s, 'bytes'); sum((Art[Kr] - 48)*2^(nops(Art) - Kr), Kr = 1 .. nops(Art))
    end proc;
  assign(alpha = 2^n - 1, rho = 2^(2^n - 1) - 1, h = 0, psi = cat(seq("0", k = 1 .. n - 1)));
  T := matrix(rho, alpha, [seq(0, k = 1 .. alpha*rho)]);
  for k to rho do
    Delta:= convert(convert(k, 'binary'), 'symbol');
    for p from length(Delta) by -1 to 1 do
      T[k, alpha - h] := convert(substring(Delta, p), 'decimal', 'hex'); h:= h + 1
    end do;
    h := 0
  end do;
  if R < 1 or rho < R then error "Definition of local transition function is incorrect"
  else
    assign(C1 = cat(psi, Co, psi), N = 0, L = Con_N(Co), LF=[0, op(convert(linalg[row](T, R), 'list'))]);
    assign(F = [seq(convert(linalg[row](T, R)[k], 'string'), k = 1 .. alpha)], G = [psi = "0"])
  end if;
  for k to alpha do
```

```
    G:= [op(G), convert(cat(cat(seq("0", p =1 .. n - length(convert(convert(k, 'binary'), 'string')))),
    convert(convert(k, 'binary'), 'string')), 'string') = F[k]]
  end do;
  while N <> P do
    C2 := "";
    for k to length(C1) - 1 do C2 := cat(C2, subs(G, substring(C1, k .. k + n - 1))) end do;
    if Con_N(C2) = 0 then return "Co is vanishing configuration"  end if;
    for k1 to length(C2) do if substring(C2, k1) <> "0" then break end if end do;
    for k2 from length(C2) by -1 to 1 do if substring(C2,k2) <> "0" then break end if end do;
    L := [op(L), Con_N(substring(C2, k1 .. k2))];
    if nops(L) <> nops({op(L)}) then return assign(H = L), L, "CA history is periodical" end if;
    assign('C1' = cat(psi, substring(C2, k1 .. k2), psi), 'N' = N + 1)
  end do;
  assign(H = L), "Density is:", evalf(nops(L)/(L[nops(L)] - L[1]), 6)
end proc:
> Co, Period, Infinity, Vanish:= "1",[],[],[]:  for k to 127 do R:= CA_HS_1D(Co,3,k,200,H,LF):
  if R[2] = "CA history is periodical"  then  Period:= [op(Period),k]  elif  R[1] = "Density is:" then
  Infinity:=[op(Infinity), k] else Vanish:=[op(Vanish), k] end if  end do: Period, Infinity, Vanish;
[8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46,
47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 96, 97, 100, 101,
112, 113, 116, 117], [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95,
98, 99, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 114, 115, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126,
127], [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]
> alpha[period] := evalf(nops(Period)/127, 2);      ⇒    α_period := 0.50
> beta[infinity] := evalf(nops(Infinity)/127, 2);   ⇒    β_∞ := 0.38
> delta[vanish] := evalf(nops(Vanish)/127, 2);      ⇒    δ_vanish := 0.12
```

Выше представлен исходный текст процедуры ***CA_HS_1D*** на ***Maple***-языке и некоторые примеры ее применения. Например, процедура использовалась для изучения *динамики примитивных* ***КФ Co=«1»*** в *бинарных* ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура ***X={-1,0,1}***, относительно ***3*** аспектов, а именно: *периодичных*, *бесконечных*, *исчезающих* (*нулевых*) ***КФ***. Следующая схема достаточно четко представляет распределение бинарных ***1-ОС*** с индексом соседства Неймана-Мура относительно примитивной начальной конфигурации ***Co=«1»***, а именно:

• • • • • • • ■■■■■■■■ • • • • • • • • ■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■■ ♦♦♦♦♦♦♦♦
1 7 8 15 16 23 24 55 56 63

■■■■■■■■ ♦♦♦♦♦♦♦♦ ■■■■■■■■ ♦♦♦♦♦♦♦♦ ■■ ♦♦ ■■ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦ ■■ ♦♦ ■■ ♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦
64 71 72 79 80 87 88 95 96 98 100 102 111 112 114 116 118 127

где •, ■ и ♦ – *исчезающие*, *периодические*, *бесконечные* последовательности ***КФ*** соответственно, тогда как числовая шкала обозначает определяющие номера ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ в ***1-ОС***.

Исследовали мы также и *динамику* ***1-ОС*** с определяющим номером ***105*** относительно генерации ею *простых* чисел. На основе ряда экспериментов с процедурой ***CA_HS_1D*** нами были получены как достаточно интересные результаты, так и сформулирован ряд предположений по динамике бинарных ***1-ОС***. Для понимания организации этой процедуры вполне достаточно знания основ ***Maple***-языка в объеме, например, наших книг [97-118].

На основе компьютерного симулирования ряда ***ОС***-моделей было получено немало достаточно интересных результатов по теории классических ***ОС*** и их приложениям в биологии развития. В качестве теоретических могут быть отмечены результаты такие, как: типы взаимно-стираемых конфигураций в классических ***1-ОС***, некоторые динамические аспекты ***ОС*** с рефрактерностью, комбинаторная проблема *Штейнгауза* и др. [3,4,19,20,54], тогда как в качестве сугубо прикладных можно отметить результаты такие, как: дифференцирование, регуляции и регенерации клеток, проблема Французского флага, регуляция осевых структур и др. [4,17,26,27,31]. При этом, в этих работах обсуждаются вопросы разработки *эффективных* программ симулирования ***ОС***-моделей. В интересных работах [212,435,536] также можно найти обсуждение подобных вопросов.

В настоящее время данный экспериментальный подход к исследованию динамики ***ОС***-моделей характеризуется *тремя* основными направлениями, а именно:

(1) разработка специализированных языков программирования для обеспечения эффективного погружения в соответствующую вычислительную среду различных типов и общности структур ***d-ОС (d≥1)*** наряду с их сугубо практическими реализациями**;**

(2) разработка программ**,** обеспечивающих компьютерную симуляцию специальных типов ***d-ОС (d≥1),*** описывающих те либо иные процессы, объекты, явления и феномены**;**

(3) разработка программных систем и комплексов, обеспечивающих компьютерную симуляцию достаточно широкого класса структур ***d-ОС (d≥1)***.

Из средств *первой группы* мы можем отметить следующие программные средства. На наш взгляд, первой из известных нам в данном направлении и практически реализованной является система ***Брендера*** для симуляции классических ***ОС***-моделей [174]. Для симуляции ***ОС*** был создан также целый ряд интерпретаторов, например, ***Фольмара*** [253], ***SIBICA Пехта*** [250] и др**.** Однако более интересными **(***прежде всего***,** *с практической точки зрения***)** представляются программные *поддержки* именно практических реализаций вычислительных систем на основе ***ОС***-моделей в их наиболее чистом виде. Так, для программного обеспечения ***ML-****процессоров* венгерскими исследователями был создан интерактивный язык ***InterCELLAS*,** неплохо приспособленный для симулирования и ***ОС***-моделей [243]. С архитектурой ***ML-****процессоров***,** их программной средой можно ознакомиться в работах [169,175].

В свою очередь, вычислительная среда машин ***САМ*** программно поддерживается специальным подмножеством языка *Forth* **(***CAM Forth***),** обеспечивающим, прежде всего, определение *локальных* правил перехода. Такая программная среда обеспечивает интерактивный режим работы с ***САМ*** машинами**,** погружение в нее исследуемой модели, документирование результатов и т.д. Сюда непосредственно можно отнести и программу ***CAMEX*,** написанную на языке ***С*** и покрывающую довольно обширную коллекцию ***ОС***-моделей размерностей от ***1*** до ***3*.** Тогда как ***САМ***-симулятор, созданный в университете ***ELTE*** **(***Венгрия***),** представляет собой программу, симулирующую ***ОС***-модели на базе ***САМ-6*.** На общем уровне как с ***САМ***-машинами, так и с их программной средой можно ознакомиться в прекрасной книге [150], тогда как за деталями рекомендуется обратиться к работам [151,152,165,376,394,430]. Некоторую общую информацию по ***САМ*** можно найти ниже в разделе ***8.3*.** В упомянутой книге [150] можно также найти описание целого ряда практических ***САМ***-реализаций весьма интересных физических моделей, широко использующих указанную программную поддержку. Очень интересные материалы можно найти в [536]. Из отечественных разработок в этом направлении вполне можно отметить достаточно интересную универсальную лабораторию клеточных автоматов ***pyCAlab*** [536] на языке ***Python*,** которая позволяет несложно конструировать ***ОС***-модели из готовых элементов **(***правила перехода и шаблоны соседства***).** Между тем**,** не взирая на удобства для разработчиков**,** системы на этом языке характеризуются довольно низкой производительностью**.** Поэтому авторами планируется перенос системы ***pyCAlab*** в среду языка ***C++*** с последующей реализацией системы на основе ***GPGPU-****концепции* **(***вычисления общего назначения на видеоадаптерах***).** В случае успешной реализации данного проекта можно было бы говорить о еще одном довольно интересном средстве симуляции как классических, так и других типов однородных структур ***d-ОС (d = 1,2,3).***

Язык параллельных подстановок **(ЯПП)** может служить примером весьма удобного алгебраического средства для описания и анализа параллельных *микропрограмм*. ***ЯПП*** является лингвистическим формализмом довольно *узкого* класса вычислительных ***ОС***-моделей, базирующегося на понятии *систем параллельных подстановок* **(СПП)**, которые определяют локальную функцию перехода для классических ***ОС***-моделей. В [53] мы показали, что относительно ***СПП*** имеет место результат:

Проблема непротиворечивости алгоритмов параллельных подстановок (АПП), определяемых системой параллельных подстановок (СПП), конструктивно разрешима.

Этот результат позволил получить ряд довольно интересных выводов, включая прикладные для разработки некоторых управляющих микропрограммных систем [54,88,90,536,567].

Представляет также интерес язык программирования *ARCAL*, разработанный ***Д. Мэйдвилом*** и который поддерживает эффективную работу, практически, на любого типа микропроцессоре либо универсальном компьютере. Язык особенно хорошо подходит для широко доступных ***ПК***. Однако, наряду с простотой *ARCAL* является *низкоуровневым* языком и его можно рассматривать в качестве «*машинного*» языка ***ОС***-моделей. Для компиляции и выполнения программ на *ARCAL* в среде *Windows* предназначен *SARCASim*-симулятор.

Очевидно, ***ОС*** **–** модели децентрализованных систем высокопараллельной обработки. В данных системах упорядоченные конфигурации могут возникать без централизованного управления. На основе известного языка программирования *Logo* была создана и параллельная версия языка *Logo – StarLogo*, который представляет собой программную среду для моделирования процессов функционирования децентрализованных систем. С языком *StarLogo* мы получаем возможность довольно эффективно моделировать многие явления реальной жизни. *StarLogo* особо подходит как для симулирования разнообразных моделей *искусственной* жизни, так и для симулирования различного типа ***ОС***-моделей [437,536].

Итальянскими исследователями был создан высокоуровневый язык программирования *CARPET* **(*C*ellul*AR* *P*rogramming *E*nvironmen*T*)**, базирующийся на ***С***-языке с целым рядом дополнительных конструкций для описания *локальных* функций перехода единичного автомата клеточной среды [428]. Язык *CARPET* обеспечивает довольно эффективную поддержку параллельной обработки информации в вычислительных ***ОС***-моделях. Как весьма интересное программное обеспечение симулирования ***ОС***-моделей выступает также и *Cellang* **(*Cel*lular Automata programming *lang*uage)**, созданный ***Д. Эккертом*** [436]. Язык программирования *Cellang* – специализированный язык для программирования довольно широкого класса ***ОС***-моделей. Язык является весьма небольшим и простым. *Cellang* предназначен как способствовать для привлечения университетских студентов к миру ***ОС***-моделей, так и в качестве удобного языка описания таких систем при их изучении и исследовании. В настоящее время *Cellang* поддерживается платформами *Unix* и *Windows*. На наш взгляд, *Cellang* – довольно полезная система программирования, ориентированная, прежде всего, на структуры ***d-ОС (d=1..3)***. Используя систему *Cellang*, возможно за относительно короткий срок и со значительно меньшими затруднениями решать целый ряд важных как теоретических, так и прикладных проблем компьютерного ***ОС***-симулирования [536,567].

CxC **–** простой *параллельный* язык для инженеров и ученых, предназначенный как для описания, так и для макетирования и выполнения научных алгоритмов на ***ПК*** либо лаптопе на платформе *Windows* и *Linux*, а также и на супер-ЭВМ либо супермощных кластерах с линейным ускорением и неограниченной расширяемостью на платформе *Linux* и ряде *клонов Unix*. Язык ***CxC*** позволяет упростить моделирование весьма большого числа взаимосвязанных элементов, их параллельной динамики и взаимодействий; поддерживается компилятором ***CxC™***, разработанным *Engineered Intelligence Corp*. Его применения включают такие области как: клеточные автоматы **(*ОС-модели*)**, искусственные нейронные сети, гидрогазодинамика, динамика частиц и ряд других численных приложений в целом ряде областей [536,567].

Из других довольно интересных языков программирования ***ОС***-моделей можно отметить такие как ***CEPROL*** [438], ***CELIP*** [439], ***CAL*** [440], и некоторые др. Указанное программное обеспечение предназначено для эмпирического исследования целого ряда важных динамических аспектов у *классических* ***ОС***-моделей. С его помощью было получено немало очень интересных результатов как теоретического, так и прикладного характера. Наш немалый опыт, полученный в процессе как создания, так и эксплуатации программного обеспечения вышеуказанного типа позволили сформулировать общую концепцию интерактивной программной системы ***(SVEGAL)***, которая предназначена для симулирования ***ОС***-моделей достаточно широкого набора типов [8,78,85]. К сожалению, как по субъективным, так и по объективным причинам эта система осталась только на уровне эскизного проекта [88,441-442]. Определенный интерес представляет также *CDL*-язык для клеточной обработки и язык *ALPACA* описания ***ОС***-моделей. Язык программирования *RW1* изначально создавался для программирования боевых роботов. Для упорядочивания различных применений языка *RW1* предлагается ***4*** направления, называемых виртуальными платформами. Каждая из данных платформ определяется способом работы с графикой и своей спецификой. В частности, *RW1P2* – платформа для реализации клеточных игр. В ее среде можно весьма удобно программировать довольно-таки широкий класс задач, включая также и ***ОС***-модели [536].

Вторая группа средств на сегодня наиболее многочисленна и дает возможность *экспериментально* исследовать и удобно визуализировать требуемые динамические свойства той или иной модели ***ОС*** для конкретного применения. Большинство средств данной группы служат для симуляции известной игры «*Жизнь (Life)*» либо различных ее как модификаций, так и обобщений. Сегодня игра «*Life*» – вероятно наиболее популярный пример ***ОС***-модели, а также очень хороший объект для компьютерного симулирования [5,80,168,172,239,444,536]. В частности, программа *Life32* ***Дж. Бонтеса*** выполняется на платформе *Windows* и, на наш взгляд, является *наилучшей* программой для ***32***-разрядной *Windows*. Программа ***Дж. Харпера*** *WinLife* является, вероятно, лучшей полной *Windows* программой для «*Life*». Наконец, программа *LifeLab* ***А. Треворова*** выполняется на *Mac* и является довольно развитой. Программа автоматически обнаруживает глайдеры, осцилляторы, поддерживает простое редактирование и автоматический поиск *новых* конфигураций. Тематика игры «*Life*» достаточно обширна, заинтересованный читатель может получить о ней достаточно полную информацию в [536] и в интернете по ключевой фразе «*Conway's Game of Life*».

Целый ряд исследователей использовали для экспериментального исследования проблематики интересные программы, из которых можно отметить представленные в работах [280,329,446,447]. В качестве простых симуляторов ***ОС***-моделей можно отметить такие, как *CALAB*, *CAPOW*, *LCAU* и др. [366]. Недавно компания *Mandriva* объявила о готовности операционной системы *Mandriva Linux 2008*. В составе дистрибутива *Mandriva Linux* много интересных приложений. В частности, в систему включен ряд программных средств для работы с ***ОС***-моделями. Мы также подобно ряду других авторов использовали специальные программы, разработанные в среде таких известных языков программирования как *C+*, *Basic*, *PL/1*, *Pascal* и *Reduce*, а также в средах хорошо известных систем компьютерной алгебры *Mathematica* и *Maple* с целью эмпирического исследования целого ряда конкретных динамических и прикладных аспектов структур ***d-ОС (d=1..3)*** [5,8,9,11,15,54-56, 96,102,112,118,536]. В частности, ряд процедур для исследования некоторых *специальных* аспектов динамики классических ***d-ОС (d=1,2)*** включен также и в нашу библиотеку программных средств для математического пакета ***Maple***, которая доступна для свободной загрузки [545].

Наконец, средства *третьей группы* обеспечивают компьютерную *симуляцию* довольно широкого класса ***ОС***-моделей. Здесь можно отметить очень интересный симулятор *MCell* ***Войтовича*** [448], ориентированный на достаточно широкий класс типов ***ОС***-моделей размерностей ***1*** и ***2***. Данное программное обеспечение поставляется безвозмездно совместно с большой библиотекой типов поддерживаемых ***ОС***-моделей, локальных функций перехода и оригинальных ***КФ***. Симулятор *MCell* открыт для расширения, программисты могут добавлять *новые* правила, программируя их как внешние *DLL*. *MCell* имеет весьма простой и дружелюбный интерфейс. *MJCell – Java* апплет, позволяющий использовать более ***300*** локальных функций перехода ***ОС***-моделей и с более, чем ***1400*** различными конфигурациями. *MJCell* позволяет использовать функции перехода ***13*** видов ***ОС***-моделей вместе с рядом видов, определенных *DLL* пользователя. *Java* апплет позволяет также экспериментировать с собственными функциями перехода. *MJCell –* упрощенная версия *MCell*. *MJCell* не допускает расширений среды *MCell*, между тем, его использование не ограничивается *Windows*-платформой. Из других симуляторов подобного типа можно отметить такие, как *CASE* [451], *CelLab* [449], *SARCASim* [450] и др. Определенный интерес представляет и симулирующая динамику ***ОС***-моделей программа *SRCA*, поддерживающая целый ряд довольно сложных ***ЛФП ОС***-модели, характеризуемых большим алфавитом внутренних состояний единичного автомата ($\geq 2^{32}$). Данные ***ЛФП*** обеспечивают необходимую динамику конфигураций, включая и феномен самовоспроизведения конечных конфигураций [536]. Достаточно интересным представляется и интерактивный генератор динамики классических ***1-ОС***, реализованный ***К. МакДермотом*** [536] в среде *C++*. Довольно простой апплет [536] представляет собой ***ОС***-модель с рефрактерностью, симулирующий сердечную активность; более того, отрезок времени, в котором каждый автомат находится в текущем состоянии, так же как и размер ***ШС*** и порога активации, являются просто настраиваемыми параметрами. Вполне определенный интерес представляет также и *Java*-аплет ***М. Шеллера*** *CAOS*, обеспечивающий симулирование ***1-ОС*** [536]. Программа «*Visions Of Chaos*», созданная ***Я. Рампе***, позволяет генерировать фракталы, ***ОС***-динамику, аттракторы и некоторую другую хаос-подобную динамику. *Dr.Cell* – программа для симулирования ***ОС***-моделей, которая реализована на языке программирования *Scheme* (*диалект Lisp*), позволяя симулировать *динамику* ***1-ОС*** и ***2-ОС*** с шаблонами соседства и локальными правилами перехода, определяемыми самим пользователем. *Scheme* – прозрачный и достаточно небольшой, однако достаточно мощный язык, пригодный для использования в качестве универсального языка программирования. *Язык Scheme* разработан для обеспечения различных стратегий *реализации*, из которых большинство является открытым программным обеспечением. Имеются *прямые* интерпретаторы языка (*подобные Basic*), компиляторы (*подобные C или Pascal*), а также компиляторы для *мобильной* виртуальной машины (*подобные Java*). Вполне определенный интерес представляет программа *CABuilder* создания ***3-ОС***, тогда как соответствующая ей программа *CAReader* позволяет осуществлять удовлетворительный анализ структур, созданных первой программой. Довольно полную информацию по указанным средствам можно найти в обширной библиографии [536].

Х-Х. Чоу создал программно-симуляционную систему *Trend&jTrend* для моделирования в ***d-ОС*** процесса *самовоспроизведения* – основной компоненты любой живой системы на Земле. Система состоит из двух частей: *Trend* – универсальная ***ОС***-среда для моделирования с интегрированным компилятором с языка высокого уровня, весьма дружелюбным пользовательским графическим интерфейсом и быстрым кэшированным механизмом симулирования. Так как симулятор очень гибкий по отношению к размерам клеточного пространства, клеточным структурам, шаблонам соседства и правилам перехода единичных автоматов, *Trend* может моделировать почти все ***1-ОС*** и ***2-ОС***. Он также имеет достаточно развитую возможность отслеживания динамики ***ОС***-модели в обратном порядке. Возможно, *Trend* – один из наиболее удобных симуляторов ***2-ОС***, тогда как вторая часть системы *jTrend* является *Java*-симулятором, наследующим все основные черты *Trend*. С описанием отмеченных и целого ряда других достаточно интересных ***ОС***-симуляторов можно ознакомиться в работах [452-454,536], значительная их часть распространяется бесплатно.

Интересным представляется и пакет (*CAT – Cellular Automaton Tool*) [536], созданный в Институте проблемно-ориентированного программного обеспечения и технологии (*Германия*). Этот пакет функционирует на операционных платформах *Windows 3.1*, *Windows* для *Workgroups 3.x*, *Windows NT* или *OS/2 2.1*. Основными *целями* пакета являлись получение средств для изучения некоторых особенностей *парадигмы* программирования на параллельных компьютерах на базе ***ОС***-моделей.

Каждая ячейка ***ОС***-модели имитирует независимый процессор параллельного компьютера. *CAT* служит также в качестве достаточно удобного в работе инструмента для создания ***ОС***-моделей.

Для эмпирического исследования ***ОС***-моделей определенный интерес может представить пакет *DDLab* – интерактивная графическая программа для исследования *динамики* конечных *бинарных* сетей: от бинарных ***ОС***-моделей до вероятностных булевых сетей. *DDLab* хорошо подходит для исследования сложности, нейронных сетей и ряда аспектов в теоретической биологии. Кстати, сеть может быть определена любой архитектуры от ***ОС***-моделей до вероятностных *булевых* сетей с произвольными связями и неоднородными функциями перехода. Более того, булева сеть либо ***d-ОС*** может иметь размерности ***d=1 .. 3*** и неоднородные размеры шаблона соседства. В процессе выполнения *DDLab* имеется возможность вычислять как глобальную динамику изучаемых сетей, так и традиционную последовательную динамику (*историю*) конфигураций. Для глобальной же динамики есть возможность для *обратного* процесса выполнения для генерации конфигураций-предшественников. Например, можно получать все множество *неконструируемых* конфигураций (*в нашей терминологии*). С рядом как типичных, так и специальных приложений системы *DDLab* для изучения сетей, бинарных ***ОС***-моделей и связанных с ними вопросов можно ознакомиться в работах [269,279,455,456]. Версии *DDLab* функционируют на платформах *Linux/PC*, *DOS-PC*, *Mac* и *UNIX/Xwindows/Sun* [484,536,567].

Достаточно интересным для исследования и изучения ***ОС***-моделей представляется нам также и программный пакет *JFLAP*, созданный в ***1990*** и ныне развиваемый под руководством ***С. Роджер.*** *JFLAP* – программное обеспечение для экспериментирования с такими *формальными* автоматами и грамматиками, как некоторые типы грамматик синтаксического анализа, *недетерминированные* конечные автоматы, недетерминированные автоматы с магазинной памятью, многоленточные машины Тьюринга, ***L***-системы Линденмайера и др. [536].

Для исследования задач фрактальной геометрии группой *Stone Soup* (*Канада*) создана программа *Fractint*, представляющая собой генератор фракталов и поддерживающая платформы: *Windows*, *Ms-Dos*, *Unix*, *Mac* [457]. *Fractint* является наиболее *универсальной* фрактальной программой среди программного обеспечения подобного типа. Насколько нам известно, это, пожалуй, наилучший на сегодня фрактальный генератор. Немало очень интересных проблем *фрактальной* геометрии было исследовано с помощью *Fractint*. В частности, ***В. МакУортер*** создал достаточно неплохую обучающую программу для ***L***-систем, используя программу *Fractint*. Согласно предположению, что ***L***-системы и ***ОС***-модели во многих отношениях являются довольно похожими, мы уверены, что ряд исследователей ***ОС***-моделей найдет программу *Fractint* достаточно полезным средством. Наш опыт в этом отношении говорит в пользу данного предположения.

В курсе лекций [458] были рассмотрены практические методы и основные камни преткновения при создании компьютерных симулирований таких объектов, как ***ОС***-модели и сети. Основной процесс модельной конструкции, симулирования и анализа проиллюстрирован рядом *довольно* интересных практических примеров. Кроме того, лекция представляет концепцию и стратегию *компьютерного* симулирования, представляющего полученные экспериментальные наблюдения, теоретические модели, а также их логические следствия. Целый ряд представленных в лекциях соображений могут оказаться достаточно полезными, прежде всего, авторам вновь создаваемых симулирующих средств для различного типа и класса ***ОС***-моделей.

Подобный эмпирический подход к изучению ***ОС***-моделей не позволяет, естественно, получить строгие математические результаты, однако, дает возможность не столько получать достаточно конкретные результаты, сколько позволяет сформулировать весьма интересные для *дальнейших* исследований предположения и гипотезы. Тогда как для достаточно простых типов ***ОС***-моделей на этом пути удается получать даже вполне исчерпывающие ответы относительно тех или иных динамических свойств путем перебора всех возможных вариантов, например, для *бинарных* ***1-ОС*** с достаточно простыми индексами соседства. Между тем, и в таком случае требуются достаточно производительные компьютеры либо вычислительные кластеры.

Новый подход к компьютерному симулированию ***ОС***-подобных моделей состоит в создании для их описания достаточно эффективных лингвистических средств – высокопараллельных языков программирования. Однако, в этом направлении возникают достаточно сложные проблемы как организации, так и описания параллельной обработки в таких ***ОС***-моделях, которые могут быть ориентировочно распределены на *три* общих класса, а именно:

- ***параллелизм на уровне одновременного выполнения множества различных задач;***
- ***параллелизм на уровне одновременного выполнения отдельных частей и/или операций одного и того же алгоритма;***
- ***различного уровня сочетания обоих типов параллелизма.***

ОС-модели допускают все *три* уровня *параллелизма*, но в их реализации возникают затруднения различной сложности по следующим направлениям, а именно:

- ***синхронизация параллельных вычислительных процессов;***
- ***сложность подготовки алгоритмов для реализации в вычислительной ОС-модели;***
- ***сложность параллельного программирования наиболее массовых задач обработки;***
- ***количество требуемых ресурсов (число элементарных автоматов ОС-модели);***
- ***сокращение времени вычислений (за счет увеличения требуемых ресурсов ОС-модели).***

Далее, особо не вдаваясь в тонкости, мы обсудим эти аспекты относительно двух первых классов *параллелизма*. Интуитивно проблемы синхронизации для случая второго класса представляются более сложными из-за функциональной связи отдельных частей того же алгоритма. Сложность подготовки алгоритма для реализации его в *однородной вычислительной среде* ***(ОВС)*** определяется сложностью так называемой процедуры «*распараллеливания*» последовательных алгоритмов. Эта процедура достаточно сложна уже просто потому, что мы должны пересмотреть (*прежде всего для себя самих)* традиционный последовательный подход к вычислениям и обработке информации сам по себе, который сформировался в течение длительной истории человечества. Однако *ломка* традиций, как известно, влечет весьма большие осложнения различного характера.

Уже даже простой пример типа распараллеливания алгоритма матричного умножения, которое позволяет делать это легко, вызывает в большинстве случаев большие заттруднения, связанные с традиционностью последовательного мышления. Таким образом, наш переход к параллельным вычислениям потребует весьма серьезного пересмотра многих наших традиционных подходов к *вычислениям*. С другой стороны, сложность самой процедуры распараллеливания определяется, естественно, также непосредственно внутренними специфическими особенностями алгоритма. Много очень интересных примеров *распараллеливания* представлено в многочисленных работах, например, [11,12,15,36,40,48,49,54,202,357,459-462,536]. Целый ряд весьма интересных вопросов по сложности распараллеливания алгоритмов, включая алгоритмы в вычислительных ***ОС***-моделях, обсуждается в работах [465,466], а также в ряде статей и трудов конференций [463-467,536].

Сложность программирования параллельных алгоритмов первого класса достаточно близка и к сложности средств распараллеливания, встроенных в ряд известных языков программирования. С другой стороны, современные языки *программирования* не располагают какими-либо довольно удобными средствами для представления параллельных алгоритмов из второго класса. Поэтому возникает весьма насущная необходимость разработки *языков* программирования, позволяющих наиболее эффективно описывать подобные параллельные алгоритмы.

Здесь было бы вполне уместным, на наш взгляд, упомянуть следующий важный момент. Ввиду устойчивости традиций последовательного мышления маловероятно, что мы сразу же найдем самое подходящее решение данной проблемы. Поэтому, следующее предложение заслуживает особого внимания. Прежде всего, нами анализируется большое количество распараллеливаемых алгоритмов, чтобы установить общие объективные закономерности в их структуре, а также и во взаимосвязях их отдельных частей. Даже данная работа позволит обнаружить ряд объективных закономерностей, которые впоследствии могут послужить достаточно хорошим основанием для модели языка параллельного программирования. По нашему мнению, подобная модель должна учесть следующие важные аспекты, а именно:

♦ автоматическое затребование дополнительных вычислительных ресурсов наряду с наличием возможности частичной трансляции при последовательной обработке в критическом состоянии (*отсутствие требуемых ресурсов*). Данный подход довольно актуален для повышения живучести модели относительно требуемых вычислительных ресурсов.

На основе такой модели мы получаем возможность создавать языки *программирования*, наиболее приемлемые для описания параллельной обработки. При этом, предполагается, что детальный анализ вышеуказанных общих аспектов параллельной обработки в каждом классе алгоритмов позволит разработать некоторые критерии степеней распараллеливания, позволяя приписывать каждый алгоритм одной из достаточно хорошо определенных групп параллелизма, и на основе данной информации автоматически формировать процесс обработки его в ***ОВС***.

В этой связи существует весьма настоятельная потребность в разработке теории параллельных алгоритмов, которая несомненно должна включать и анализ степени параллелизма. Интересно также определить классы задач, с различной эффективностью решаемые на ***ОВС*** (***ОС-****моделях*). При этом, теория параллельных алгоритмов должна включать два общих аспекта: ***прикладной*** и ***теоретический***. Теоретический аспект включает, вообще говоря, исследование возможностей и свойств параллельных алгоритмов, которые являются строго присущими параллелизму, в более широком контексте феномены параллельной и последовательной обработки не касающиеся, на самом деле, самой сути вычислений. Тогда как прикладной аспект должен состоять в разработке (*универсальных и специальных*) процедур распараллеливания реальных алгоритмов, методики их распараллеливания, вопросов реализации в ***ОВС*** конкретных параллельных алгоритмов и т.д. и т.п. Следовательно, теория параллельных алгоритмов должна иметь структуру, в значительной степени аналогичную структуре теории последовательных алгоритмов. Теоретические аспекты параллельных алгоритмов изучены несколько лучше [8,202,356,365,372,470-474], тогда как работа по прикладным аспектам находится в значительной степени в стадии становления. В настоящее время данная область достаточно бурно развивается и много новых приложений обнаруживают пересечения с целым рядом важных научных дисциплин [202,353,356-358,361-363,367,373,460-463, 475,476,536].

Успех в данном направлении в значительной степени определит и эффективность прикладных разработок, и вычислительных ***ОС***-моделей. В данной связи необходимо обратить внимание на следующий момент. Действительно, производительность ***ОС***-моделей не имеет теоретического предела из-за *параллельной* обработки и возможности неограниченного наращивания требуемых ресурсов в виде единичных автоматов модели. Однако скорость *выполнения* любого конкретного алгоритма все же имеет собственный более низкий *предел*, который зависит от двух таких общих параметров как *степень* распараллеливания и *временные* характеристики используемых моделью вычислительных ресурсов. Таким образом, эффективность использования *параллелизма* модели определяется низшим уровнем ее физической реализации.

Временной ***предел*** вычислительных ресурсов определяется физическими свойствами материалов и максимальной скоростью ***v*** передачи информации в среде (***v < c***, ***c*** – *универсальная константа – скорость света в вакууме*). Степень распараллеливания произвольных алгоритмов лежит в весьма широком диапазоне и, скорей всего, *предельные* границы этого диапазона весьма неопределенны, ибо не существует как реально *параллельных* алгоритмов, так и действительно последовательных за исключением тривиальных. Исследование спектра *распараллеливания* поможет сформировать одну из основных составляющих теоретических и прикладных аспектов в теории параллельных алгоритмов. Таким образом, хорошо разработанная теория параллельных алгоритмов позволит, в частности, определить временные возможности моделей параллельных компьютеров.

Так как *параллельные* алгоритмы (*которые сами по себе не добавляют ничего нового к собственно самой сущности вычислений*) позволяют реализовывать эффективные во *временном* отношении системы вычислений и обработки информации, можно придти к выводу о необходимости *практического* прогнозирования основных теоретических результатов в данном направлении. И на наш взгляд, системы, базирующиеся на ***параллельных*** формальных вычислительных моделях, должны будут учитывать следующие *три* основных структурных уровня, а именно:

(1) Методы распараллеливания алгоритмов <==> Теория параллельных алгоритмов
⇓ ⇓ ⇓
(2) Параллельное программное обеспечение (Software) ←
⇓ ⇓ ⇓
(3) Параллельная вычислительная среда (Hardware)

Наряду с этим, для создания наиболее эффективных *систем параллельной обработки информации* ***(СПОИ)*** необходимо, на наш взгляд, разрабатывать каждый такой уровень с учетом требований предыдущего уровня в соответствии с данной иерархией уровней. Так, в вышеуказанной схеме ***первый*** уровень представляет собственно *параллельную алгоритмизацию* (*процесс распараллеливания последовательного алгоритма*). Тогда как ***второй*** уровень предоставляет набор алгоритмических языков для описания параллельных процессов. Данные языки базируются как на традиционных языках программирования (*например*, *Fortran*, *Pascal*, *C*, *Ada*, *PL/1 и др.*) с встроенными средствами распараллеливания, так и на *новых* лингвистических средствах, уже априори ориентируемых на параллельную обработку. Наконец, на ***третьем*** уровне мы имеем дело прямо с параллельными аппаратными средствами, которые непосредственно базируются на используемой формальной параллельной вычислительной модели, включая параллельные ***ОС***-модели либо другие модели так называемого *массивного параллелизма*. При этом, выбранная модель *параллельных* аппаратных средств представляет на рассмотрение достаточно конкретные требования к собственно самим лингвистическим средствам – *параллельным* языкам программирования, как это и указывается в упомянутой структурной схеме параллельной обработки информации [5,54-56,88,90,536].

Таким образом, формальная параллельная вычислительная модель требует *специализированных лингвистических* средств, которые должны с *максимально* возможной эффективностью описывать допускаемый моделью уровень распараллеливания вычислений либо обработки информации в целом. *Лингвистические* средства для современных *коммерческих* параллельных вычислительных систем, основанных на *различных* формальных вычислительных моделях (*исключая* ***ОС***-*подобные модели*), а также перспективы их развития рассматриваются достаточно подробно в целом ряде работ, в частности, в [5,11,12,36,94-96,369,477-482,536].

В настоящее время во многих странах проводятся весьма интенсивные работы по проблематике параллельной обработки и параллельных алгоритмов. Современное состояние этих разработок вместе с попытками их систематизации представлено в ряде трудов конференций, книг, статей и др. [477-482,536]. Так, сборник [461] представляет всесторонний обзор последних разработок в весьма быстрорастущей и изменяющейся области параллельных алгоритмов. Он охватывает все основные разделы проблематики, а именно: модели и механизмы *параллельных* вычислительных систем, дискретные и комбинаторные алгоритмы, теоретические статьи по *распараллеливающим* компиляторам, параллельные алгоритмы для матричных и векторных вычислений, генерация псевдослучайных чисел, дифференциальные уравнения, новые параллельные компьютерные системы и их программное обеспечение. Тогда как книга [462] охватывает основные элементы параллельной обработки и параллельных алгоритмов. Она уникальна тем, что самодостаточна и охватывает все фундаментальное о параллельной обработке информации – от компьютерной архитектуры до параллельного программирования и параллельных алгоритмов. Данная книга может послужить хорошим справочником для профессионалов, интересующихся всеми этапами параллельной обработки и параллельного программирования. Наши университетские пособия (*раздел «Языки параллельного программирования»*) предназначены, главным образом, для новичков в параллельном программировании, но также могут представить довольно полезный материал для профессионалов, интересующихся всеми этапами *параллельного* программирования [94-96].

В настоящее время мы имеем довольно много аппаратно-программных систем, предназначеных для параллельной обработки. Эти системы используют как различную *параллельную* аппаратную архитектуру, так и параллельное программное обеспечение (*как системное, так и прикладное*) [11, 12,13,48-50,52,353,356-359,361-363,365,367,369,372,373,460-462,470,471,473,474]. Так, в наших работах [42,52] представлена ***П**араллельная **С**истема **О**бработки **И**нформации* (***ПСОИ***), а также ***П**араллельная **У**правляющая **С**истема* (***ПУС***) для ***ОВС*** и показано, что на основе данных систем *информационное распараллеливание* позволяет создавать системы обработки данных очень *высокой* эффективности вплоть до систем с прямым экономичным эффектом. В работе [51] представлено описание ***ПУС*** в терминах систем алгоритмических алгебр. Это представление основано на автоматной модели ***ПУС*** и позволяет использовать системы алгоритмических алгебр для *оптимизации* программного обеспечения ***ПУС***. При этом, вышеуказанные работы на самом общем уровне использовали ***ОС***-концепцию в качестве формальной параллельной модели вычислений. Между тем, целый ряд *параллельного* программного обеспечения использует *параллельные* алгоритмы, которые присущи именно вычислительным ***ОС***-моделям. Например, вышеупомянутая ***ПУС*** использует целый ряд параллельных алгоритмов, присущих биологической ***ОС***-модели [26] и которые базируются на принципе *глобально-локального* действия [4,23]. Достаточно интересный подход к использованию высокопараллельных ***ОС***-алгоритмов может быть найден в [459]. В настоящее время имеется ряд параллельного программного обеспечения, ориентируемого на весьма различные архитектуры параллельных аппаратных средств. На сегодня имеется также ряд высокопараллельных языков программирования, ориентируемых, прежде всего, на вычислительные ***ОС***-модели. Эти языки формируют как лингвистические средства, так и исследовательские инструментарии для весьма широкого класса параллельных ***ОС***-моделей [241,243,250,428,438-440,453,483,536].

<u>Практическая реализация вычислительных ОС-моделей</u>. Группа венгерских исследователей под руководством ***Т. Легенди*** в процессе работы по клеточным процессорам существенно упростила и модифицировала клеточную модель ***Дж. фон Неймана*** и целого ряда его последователей [124, 128,169,170,175,288-291]. Дальнейшие исследования в этом направлении привели их к созданию практических реализаций вычислительной ***ОС***-модели в виде «*клеточных процессоров Легенди*», а затем и *клеточных* ***ML***-сопроцессоров для *IBM*-совместимых ***ПК*** [171,175]. При этом, многолетнее сотрудничество исследовательских групп ***Т. Легенди*** (*Венгрия*) и ***Р. Фольмара*** (*Германия*) явилось причиной создания как функционирующих коммерческих моделей *клеточных* процессоров, так и их удовлетворительной теоретической проработке, включая создание набора компьютерных симулирующих средств системного и прикладного параллельного программного обеспечения. В рамках совместной деятельности по указанной проблематике проводился целый ряд широко известных международных конференций ***PARCELLA*** (***PAR**allel **CELL**ular **A**utomata*) в Германии, издавались сборники трудов и научные отчеты [156,165,179,308,536].

В трудах ***PARCELLA*** [464-467] представлен целый ряд интересных результатов по конкретным вычислительным архитектурам и по отдельным устройствам, основывающимся на ***ОС***-моделях. Представленные здесь работы охватывают чрезвычайно широкий круг вопросов, прежде всего, прикладных вопросов ***ОС***-моделей, а именно: клеточная диагностика, быстрые параллельные алгоритмы в систолических массивах, параллельные алгоритмы задач обработки изображений, надежные сети для булевых функций небольшой сложности, модульные высокопараллельные вычисления и архитектуры, конвейерные автоматы как модели нециклических систолических систем, самоконтролируемые элементарные процессоры в регулярных матрицах, параллельная клеточная память, фундаментальные исследования по *клеточной* обработке и вычислениям, ***ОС***-методика в параллельной архитектуре **VLSI**, параллельное микропрограммирование, массивы микропроцессоров и многие др. Из отечественных же практических разработок по реализации вычислительных ***ОС***-моделей можно отметить интересные результаты групп исследователей из Новосибирска, Санкт-Петербурга, Таганрога, Москвы и Кишинева [15,176-178]. Особый интерес представляют здесь достаточно перспективные разработки, выполненные в Новосибирске под руководством ***О.Л. Бандман*** и в Таганроге под руководством ***А.В. Каляева*** [555]. Между тем, ряд весьма интересных и перспективных разработок в данном направлении сделан и в целом ряде других стран [536].

Иной весьма интересный и перспективный подход к практической реализации вычислительной ***ОС***-модели был предложен ***Т. Тоффоли*** и ***Н. Марголус***, создавших серию т.н. «*машин клеточных автоматов*» (***C****ellular* ***A****utomata* ***M****achines* – ***CAM)*** [150-152,165,318,376]. В настоящее время последней моделью является ***САМ-8*** [165], популярное описание ***САМ***-серии и результатов экспериментов с ними можно найти в прекрасной книге [150]. При этом, *практическое* применение машин ***САМ*** оказалось весьма эффективным при моделировании сложных задач гидродинамики, экологии и изучении математических свойств ***ОС***-моделей, моделей обработки изображений, физического моделирования, получения специальных эффектов и целого ряда др. [166,366,384,392,394]. Серия машин ***САМ*** вывела ***ТОС***-проблематику на качественно новый уникальный уровень, дополнив *формальные* ***ОС***-модели их непосредственными вычислительными *аналогами*. Это обстоятельство позволяет весьма существенно расширять прикладную *модельную* ***ТОС***-проблематику по многим направлениям. Несколько детальнее ***ML***-сопроцессоры и ***САМ*** представлены в разделе ***8.3.***

К настоящему времени имеется целый ряд других весьма интересных практических реализаций вычислительных ***ОС***-моделей, из которых отметим лишь некоторые [410,436,485-495]. Например, в [486] авторы обсуждают принципы ***ОС***-моделей и довольно детально представляют *разработку* расширяемой машины с программой решения лабиринтной задачи. Все обилие материалов по прикладной проблематике вычислительных ***ОС***-моделей не позволяет дать их сколько-нибудь удовлетворительный *анализ*. Однако, заинтересованному читателю рекомендуются труды таких конференций, как [360-363,473,476,479,480,493] и им подобных, а также многочисленные статьи в различных журналах соответствующей тематики [371,536]. Между тем, в виду больших успехов микроэлектроники и перспектив использования нанотехнологий целый ряд авторов уже сейчас предлагают практические подходы к реализации сверхбольших интегральных схем на основе, в первую очередь, концепции ***ОС***-моделей, которые могут быть разработаны в ближайшее время. В связи с развитием технологии интегральных схем (*где сама специфика производства такова, что там весьма удобно создавать устройства итеративной архитектуры*) наряду с новыми подходами к созданию перспективных архитектур ***ВТ*** (*квантовые клеточные процессоры, нанокомпьютеры и др.*) с широким использованием нанотехнологий интерес к ***ТОС***-проблематике неуклонно растет. К рассмотренным вопросам *непосредственно* примыкает и тематика, связанная с *клеточной логикой*, которая имеет дело с математическими моделями и техникой для анализа и синтеза цифровых сетей на основе вычислительных ***ОС***-моделей. Между тем, ввиду обширности данной тематики ее рассмотрение выходит за рамки настоящей монографии. Для более полного ознакомления с данной проблематикой рекомендуются источники [496,536], где представлена наиболее полная библиография по ***ОС***-моделям, параллельным вычислениям и обработке информации, а также связанным темам, включая статьи, книги, труды конференций, научные отчеты, журналы и т.д.

Глава 7.
Проблема декомпозиции глобальных функций перехода в классических ОС-моделях

Проблема ***декомпозиции*** *глобальных функций перехода* ***(ГФП)*** в ***ОС-***моделях представляет большой теоретический и прикладной интерес. Основная задача *декомпозиции* ***ГФП*** в ***ОС-***моделях состоит в определении эффективных процедур, позволяющих по заданной ***ГФП*** определять *композицию* из более простых функций, эквивалентную исходной ***ГФП.*** Данная проблема аналогична задаче расчленения сложной системы на более простые подсистемы, представляя большой интерес для многих разделов ***ТОС-***проблематики. В частности, эта проблема непосредственно примыкает к вышеупомянутой проблеме сложности ***A(X).*** Она имеет самое непосредственное отношение и к вопросам конструктивной сложности, играющим весьма важную роль в конкретных *реализациях* различного рода ***ОС-***моделей. Первые постановка и результаты по проблеме *декомпозиции* ***ГФП*** восходят к ***С. Аморозо*** и ***Дж. Эпштейну*** [316], показавшим, в частности, что во множестве ***GS*** всех бинарных ***1-***мерных ***ГФП*** существуют функции, не представимые в виде композиции конечного числа более простых функций того же класса и типа. Используя достаточно простую численную процедуру, ***Д. Батлер*** [141,142] показал, что во множестве всех ***d-***мерных ***ГФП*** также существуют функции, не представимые в виде т. н. ***минимальной*** *композиции* конечного числа более простых ***ГФП*** из того же множества функций. В ряде наших работ [3-5,9,11,53-56,] проблема *декомпозиции* ***ГФП*** получила дальнейшее развитие, полученные по ней результаты позволили рассмотреть ее с ряда новых весьма интересных точек зрения, рассматриваемых несколько ниже.

Прежде всего, проблема *декомпозиции* в определенной степени относится к проблеме сложности ***ГФП,*** а именно: ***Может ли произвольная ГФП быть представлена композицией конечного числа более простых функций того же класса?*** При этом, ниже мы будем говорить, что ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ *проще* функции $\tau^{(m)}$ (*обе функции одинаковой размерности и определены в одном и том же алфавите* ***A***), если $n < m$; $n<m$ определяет соотношение между количествами единичных автоматов обоих структур ***d-ОС,*** составляющих их ***ШС.*** Вышеупомянутые три проблемы ***ОС-***моделей: *сложности* конечных ***КФ, полноты*** для полигенных структур и ***декомпозиции ГФП*** оказываются тесно связанными, во всех своих взаимосвязях и приложениях представляя собой весьма обширную и перспективную область для дальнейших исследований в ***ТОС-***проблематике [5,8,9,54-56,88,90,536].

Наши первые результаты, относящиеся к проблеме *декомпозиции*, базировались на более ранних результатах по *неконструируемости* в *классических* структурах и позволили решить эту проблему для случая ***1-ОС*** [41,44]. Основным результатом в данном направлении явилось доказательство существования ***1-***мерных ***ГФП*** с *произвольными* индексом соседства ***X*** и алфавитом ***A*** внутренних состояний, проблема *декомпозиции* для которых имеет отрицательное решение. Между тем, для дальнейшего обсуждения проблемы декомпозиции ***ГФП*** нам понадобится ряд новых понятий и определений, вводимых по мере необходимости.

<u>Определение 26</u>. Проблема декомпозиции ГФП (d-ПДФ) $\tau^{(n)}$ ***сводится к вопросу о возможности представления произвольной ГФП в виде композиции конечного числа более простых функций того же класса и в том же самом А-алфавите, а именно:***

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\,\tau^{(n_2)}\,\tau^{(n_3)}\ \ldots\ldots\ \tau^{(n_m)} \qquad (n > d+1;\ n_j < n;\ j = 1..m) \qquad (59)$$

где глобальные функции $\tau^{(n)}$, $\tau^{(n_j)}$ (j=1 .. m) имеют одинаковую размерность и определены в одном и том же A-алфавите внутренних состояний единичного автомата; при этом, для глобальных функций $\tau^{(n_j)}$ допускаются кратные вхождения в представление (59). Для случая 1-мерных $\tau^{(n)}$ в декомпозиции (59) имеет место следующее соотношение $n = \sum_j n_j - m + 1$ (j = 1..m).

При этом, сразу же имеет смысл акцентировать наше внимание на кажущемся (*на первый взгляд*) недоразумении, которое может возникнуть из самого факта отрицательного решения проблемы декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и универсальности ***ОС***-моделей с простейшими индексами соседства ***X***. Действительно, произвольная классическая ***d-ОС*** моделируется структурой той же размерности и с простейшим индексом соседства, соответствующий ***ШС*** которого содержит всего лишь ***(d+1)*** единичных автоматов. Но в случае моделирования мы имеем дело, вообще говоря, с *различными* множествами ***КФ***, на которых действуют моделируемая и моделирующая структуры, тогда как в случае проблемы *декомпозиции* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и функции, составляющие ее декомпозицию, действуют на одном и том же множестве ***C(A,d)*** конфигураций и в одном и том же самом ***A***-алфавите.

Наряду с хорошо известной ***d-ПДФ*** весьма интересно исследовать так называемую ***обобщенную*** проблему декомпозиции ***d***-мерных ***ГФП (d-ОПДФ)***, заключающуюся в вопросе о возможности представления произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в виде композиции ***(59)*** при условии, что глобальные $\tau^{(n_j)}$ функции представления не связаны обязательным ограничением ($n_j < n$) ***(j=1 .. k)***, допуская знак равенства и исключая тривиальные случаи представления. Следовательно, в случае ***d-ОПДФ*** в представлении ***(59)*** допускается использование произвольных ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ ($n_j \leq n$), которые имеют одинаковые с исходной функцией $\tau^{(n)}$ и размерность, и алфавит. Очевидно, что положительное решение ***d-ПДФ*** для произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ влечет за собой положительное решение для нее и ***d-ОПДФ***, тогда как в общем случае обратное неверно. Следовательно, ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ***, *вообще говоря*, являются *неэквивалентными* проблемами декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$. Наряду с общей ***d-ПДФ*** значительный интерес представляет вопрос *специального* представления ***ГФП*** в виде композиции *конечного* числа более простых функций. Под *специальным* будем в дальнейшем понимать любое представление произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в форме ***(59)*** при условии, что как исходная функция $\tau^{(n)}$, так и составляющие ее декомпозицию функции $\tau^{(n_j)}$ выбираются из заданного класса функций, в указанном количестве и т.д., т.е. на них накладываются некоторые специальные ограничения, имеющие ту либо иную трактовку в конкретных контекстах.

Прежде всего, нас будет интересовать вопрос взаимосвязи свойств неконструируемости ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и входящих в ее представление ***(59)*** глобальных функций перехода $\tau^{(n_j)}$ ($n_j < n$). На базе теоремы **27** достаточно несложно убедиться в справедливости следующего результата.

<u>Теорема 126</u>. ГФП $\tau^{(n)}$ обладает НКФ тогда и только тогда, когда по меньшей мере одна ГФП $\tau^{(n_j)}$ ($n_j < n$) обладает НКФ; если по крайней мере одна из ГФП $\tau^{(n_j)}$ ($n_j < n$) обладает НКФ-1, то и их композиция $\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\, \tau^{(n_2)} \ldots \tau^{(n_k)}$ будет обладать НКФ-1 и/или НКФ.

При этом, особо следует акцентировать внимание на переносимости целого ряда *нижеследующих* результатов по ***ПДФ***-проблематике и на ***ОС***-модели, отличные от классических.

7.1. Декомпозиция специальных глобальных функций перехода в классических ОС-моделях

Однако, перед рассмотрением вопросов декомпозиции ***ГФП*** *специальных* классов вновь вернемся к случаю классических ***1-ОС***, для которых ***1-ПДФ*** в общем случае имеет *отрицательное* решение, представленное в наших работах [3,5,44,53-56,63,65,67,77,88,90,536].

<u>Теорема 127</u>. Для произвольного конечного алфавита A существует бесконечное множество 1-мерных ГФП $\tau^{(n)}$, для которых 1-ПДФ имеет отрицательное решение.

Как уже отмечалось выше, данный результат впервые был нами получен на основе результатов по неконструируемости в классических ***1-ОС***, а затем был передоказан более конструктивными методами на базе результатов ***Х. Ямада*** и ***С. Аморозо*** по проблеме полноты для *полигенных* ***d-ОС*** (***d≥1)*** и наших результатов по неконструируемости (гл. ***3*** [54-56]). Получив отрицательный ответ на решение ***1-ПДФ*** в общем случае, мы оставляем в стороне также целый ряд важных вопросов, связанных со структурой множества всех ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, не имеющих вышеуказанного представления, с влиянием на возможность решения проблемы декомпозиции основных параметров и свойств классических ***1-ОС*** (*алфавита внутренних состояний*, *индекса соседства*, *неконструируемости и др.*). Для исследования отмеченных и других вопросов по проблеме *декомпозиции* нам потребовались новые подходы и методы, часть из которых будет рассмотрена нами несколько ниже.

Прежде всего, рассмотрим класс всех бинарных ***1-ОС***, для которых ***1-ПДФ*** согласно теоремы ***127*** в общем случае имеет отрицательное решение. В рамках данного класса исследуем влияние на решение ***1-ПДФ*** ограничения проблемы на случай *всех бинарных* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, которые не обладают неконструируемостью ***НКФ***-типа, т.е. инъективных на множестве ***C(A,1,φ)*** глобальных функций. Из результатов по неконструируемости в классических ***1-ОС*** хорошо известно, что доля данных структур (*не обладающих* ***НКФ)*** невелика и довольно быстро убывает с ростом размера ***ШС 1-ОС***. При этом, класс данных структур является замкнутым относительно операции композиции, что довольно существенно для решения ***1-ПДФ***. Следующий результат дает ответ на поставленный выше вопрос [5,54-56,88].

<u>Теорема 128</u>. В классе всех бинарных инъективных одномерных ГФП $\tau^{(n)}$ 1-ПДФ имеет в общем случае отрицательное решение.

Итак, сужение класса всех одномерных бинарных ***ГФП*** до собственного подкласса инъективных функций сохраняет отрицательность решения ***1-ПДФ***. При этом, наряду с общего типа ***d-ПДФ*** значительный интерес представляет вопрос *специального* представления ***ГФП*** в виде композиции конечного числа более простых функций. При этом, под специальным представлением будем понимать любое представление ***ГФП*** в виде ***(59)***, которое отлично от определения ***26***, т.е. в виде композиции заданного числа функций, функций из заданного множества и т.д. Некоторые из такого типа специальных представлений рассматриваются нами несколько ниже.

В связи с *отрицательным* в общем случае решением проблемы ***d-ПДФ*** возникает ряд интересных сопутствующих задач, среди которых вполне естественно можно выделить и следующую. Пусть ***M(A,d,GS)*** будет подмножеством множества всех ***d***-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$, определенных в некотором конечном алфавите ***A*** и обладающих некоторым общим для них свойством ***GS***. Но тогда *частная* проблема декомпозиции сводится к вопросу возможности представления произвольной ***ГФП*** из множества ***M(A,d,GS)*** в виде композиции ***(59)*** функций из того же множества ***M(A,d,GS)***. Данная частная ***d-ПДФ*** представляет существенный теоретический и прикладной интерес в *зависимости* от соответствующего выбора *определяющего* множества ***M(A,d,GS)*** (***d≥1)*** глобальных функций $\tau^{(n_j)}$ перехода классических ***ОС***-моделей.

Прежде всего, рассмотрим ***1-ПДФ*** относительно класса всех ***1***-мерных линейных ***ГФП***, которые определены в разделе ***3.2*** монографии. Функции данного класса обладают общим свойством ***GS*** *универсальной воспроизводимости* конечных ***КФ*** в смысле Мура. Ниже будут приведены основные результаты исследований по проблеме декомпозиции для классов ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, включающих также функции из множества ***M(A,d,GS)***. Здесь же мы рассмотрим несколько более глубоких вопросов декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ для одного интересного подмножества множества ***M(A,d,GS)*** – *линейных*

1-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, соответствующие *ЛФП* $\sigma^{(n)}$ которых определяются следующими линейными соотношениями, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + x_n + \sum_{2}^{n-1} b_k x_k) \quad (mod\, a);\ b_k \in \{0,1\};\ x_k \in A \quad (k = 1..n-1)$$

Данное подмножество ***M(A,d,GS)***-множества ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ будем обозначать через ***M*(A,1,GS)***. В этой связи рассмотрим замкнутость множества ***M*(A,1,GS)*** относительно операции композиции, для чего целесообразно представить его в виде объединения двух непересекающихся подмножеств $M^*_1(A,1,GS)$ и $M^*_2(A,1,GS)$ (*для краткости в дальнейшем* M^*_1 *и* M^*_2) соответственно подмножеств ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ($n \geq 2$) со *связным* и *несвязным* шаблонами соседства размера ***n***; т.е. $M^*(A,1,GS) \equiv M^*_1 \cup M^*_2$ и $M^*_1 \cap M^*_2 = \varnothing$, где **Ø** – пустое множество. Глобальные функции перехода из этих подмножеств будем обозначать соответственно как $\tau_1^{(n)}$ и $\tau_2^{(n)}$. При сделанных предположениях имеет место следующий *основной* результат, имеющий целый ряд довольно интересных приложений [53-56].

<u>Теорема 129</u>. Множество $M^*(A,1,GS)$ ***и подмножество*** M^*_1 ***незамкнуты относительно операции композиции входящих в них ГФП. Никакая ГФП*** $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ ***не может быть представлена в виде композиции двух более простых функций из того же самого множества*** M^*_1.

Несмотря на результат данной теоремы, можно показать [54], что расширение множества ***ГФП***, допускаемых в качестве элементов представления ***(59)*** для произвольной функции из множества M^*_1, на множество функций M^*_2 позволяет положительно решать ***1-ПДФ*** для глобальных $\tau^{(n_j)}$ функций перехода из множества M^*_1, а именно.

<u>Теорема 130</u>. Каждая ГФП $\tau_1^{(2k)} \in M^*_1$ ***представима в следующем виде*** $\tau_1^{(2k)} = \tau_1^{(k)}\tau_2^{(k+1)} = \tau_2^{(k+1)}\tau_1^{(k)}$, ***где*** $\tau_1^{(k)} \in M^*_1$ ***и*** $\tau_2^{(k+1)} \in M^*_2$ ***с индексом соседства*** $X_2=\{0,k\}$ (k=2, ...). ***Каждая ГФП*** $\tau_1^{[p(2k+1)]}$ ***из*** M^*_1 ***представима в виде*** $\tau_1^{[p(2k+1)]} = \tau_1^{(p)}\tau_2^{[p(2k+1)-2]} = \tau_2^{[p(2k+1)-2]}\tau_1^{(p)}$, ($p$=3,5,7,9,...; k=1,2,3,...). ***Каждая ГФП*** $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ ***при условии*** $n=pxq$ ***представима в следующем виде*** $\tau_1^{(n)} = \tau_2^{(n-p+1)}\tau_1^{(p)} = \tau_2^{(n-q+1)}\tau_1^{(q)}$, ***где участвующие в представлении ГФП*** $\tau_1^{(n)}$ ***функции из множества*** M^*_2 ***имеют симметричные индексы соседства.***

Из этого результата следует, что любая ***ГФП*** $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ при составном *целом* ***n*** будет представима композицией двух более простых глобальных функций из множества $M^*(A,1,GS) \equiv M^*_1 \cup M^*_2$. Для окончательного решения вопроса с множеством M^*_1 следует рассмотреть случай ***ГФП*** $\tau_1^{(n)}$ при простом целом ***n***. Не вдаваясь в многочисленные и весьма трудоемкие подробности анализа такого типа глобальных функций $\tau_1^{(n)}$, приведем довольно интересный результат, выражаемый следующей теоремой. Интересующийся же деталями читатель отсылается к [53], содержащей и целый ряд других интересных результатов.

<u>Теорема 131</u>. Глобальная функция перехода $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ ***представима композиций конечного числа более простых ГФП из множества M*(A,1,GS) тогда и только тогда, когда n - составное число.***

Таким образом, проблема декомпозиции ***ГФП*** $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ относительно множества функций $\tau^{(n)}$ из ***M*(A,1,GS)*** *разрешима* и в случае ее *положительного* решения существуют удовлетворительные конструктивные разрешающие алгоритмы. Совершенно *иная* картина имеет место в случае ***ГФП*** из множества M^*_2 функций. Многие ***ГФП*** $\tau_2^{(n)} \in M^*_2$ представимы *композицией* конечного числа более простых функций из множества ***M*(A,1,GS)*** *независимо* от природы числа, определяющего размер ***ШС*** исследуемой ***ГФП.*** Но следует иметь в виду, что с ***ШС*** размера ***n*** существует $N=2^{n-2}-1$ различных ***ГФП*** $\tau_2^{(n)}\in M^*_2$ и не все из них могут иметь упомянутое представление. В частности, из ***7*** бинарных ***ГФП*** $\tau_2^{(5)}\in M^*_2$ такое представление из конечного числа более простых функций из множества ***M*(B,1,GS)*** имеют ***5*** функций, тогда как из ***15*** *бинарных* функций $\tau_2^{(6)}\in M^*_2$ имеют только шесть функций и т.д. Наряду с этим, для каждого целого $n \geq 5$ и произвольного алфавита ***A*** существуют ***ГФП*** $\tau_2^{(n)}\in M^*_2$, имеющие вышеуказанное *представление* ***(59)*** с соответствующими ограничениями [5,53-56,77,88,90,536].

<u>Теорема 132</u>. Для произвольных целого n≥5 и алфавита A существует по меньшей мере n-4 ГФП $\tau_2^{(n)}\in M^*_2$***, представимых в виде композиции*** $\tau_2^{(n)} = \tau_2^{(n-1)}\,\tau_1^{(2)}$ ***двух ГФП.***

Однако, несмотря на этот результат, анализ достаточно большого числа ***ГФП*** из множества M^*_2, проведенный средствами *специальной* симулирующей программы, реализованной в среде пакета ***Mathematica***, позволил подтвердить следующее предположение: ***Для произвольных целого n≥4 и алфавита A существуют ГФП из множества*** M^*_2***, не представимые композицией из конечного числа более простых функций из множества M*(A,1,GS)*** [93]. Итак, проблема *декомпозиции* ***ГФП*** относительно множества ***M*(A,1,GS)*** также в общем случае имеет отрицательное решение. Итак, исследование проблемы *декомпозиции* ***ГФП*** весьма интересно распространить на случаи высших размерностей и проследить за изменением представленных выше результатов в зависимости от увеличения размерности ***ГФП*** из рассмотренного класса ***M*(A,1,GS)*** глобальных функций.

В отличие от ***M*(A,1,GS)*** множество ***M*(B,1,GS)*** одномерных бинарных линейных ***ГФП*** образует собственный *подкласс* класса всех одномерных *линейных* ***ГФП*** и замкнуто относительно операции композиции, образуя относительно данной операции полугруппу. Поэтому, приведенные выше результаты совершенно естественным образом распространяются и на множество ***M*(B,1,GS)***, во многих теоретических и прикладных аспектах ***ТОС*** представляющее большой самостоятельный интерес. На примере исследования ***1-ПДФ*** относительно множества ***M*(A,1,GS)*** линейных ***ГФП*** был изучен целый ряд глубоких свойств глобальных функций перехода относительно данной проблемы, а именно: влияние типа ***ШС*** (*связный либо несвязный*), числа (*составное либо простое*), определяющего его размер, а также типа функций, составляющих представление ***(59)*** для ***ГФП.*** В рамках дальнейшего развития данной проблематики можно не только переносить подобные исследования на общий случай множества ***M(A,d,GS)*** линейных функций, но и определить ряд других интересных с теоретических и прикладных точек зрения множеств ***MW(A,d,L) ГФП*** $\tau^{(n)}$, наделенных некоторым общим для них ***L***-свойством, в частности, симметричностью.

Еще один достаточно интересный подкласс класса всех классических ***ОС***-моделей относительно проблемы декомпозиции ***ГФП*** представляют собой структуры с рефрактерностью {***d-OCP(r,P);*** определены в гл. ***1***}. Данные структуры имеют целый ряд био-медицинских интерпретаций, а в последнее время они начинают использоваться также для решения *задач* распознавания образов, исследования свойств и топологии цифровых фигур и т.д. В наших работах [1,4,5,8,15,45,78,85,90] представлен ряд интересных теоретических и эмпирических результатов по динамике структур ***d-OCP(r,P)***, полученных с использованием компьютерного моделирования. Здесь же структуры данного типа обсуждаются относительно проблемы декомпозиции их глобальных функций $\tau^{(n)}$ перехода. Каждая структура ***d-OCP(r,P)*** определяется такими важными параметрами как порог *возбудимости* ***(P)*** и глубина *рефрактерности* ***(r)***. На основе этих параметров и дифференциации алфавита ***A*** внутренних состояний имеется хорошая возможность исследования специфических динамических свойств этого типа структур, состоящих в *распространении возбуждений* (*состояний* ***«1»***) в среде единичных автоматов структуры. Нижеследующий результат представляет решение проблемы декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ для класса всех структур ***d-OCP(r,P)*** [5,53-56,63,78,85,88,90].

Теорема 133. Проблема декомпозиции ГФП τ в классе структур с рефрактерностью d-ОСР(r,P) ($d \geq 1$) имеет отрицательное решение.

Этот результат говорит об отрицательном решении ***d-ПДФ*** в классе всех ***ГФП*** с *рефрактерностью* без каких-либо ограничений на порог возбудимости и глубину рефрактерности структуры, т.е. рассматривается класс *всех* таких глобальных функций $\tau^{(n)}$ перехода, соответствующие ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ которых характеризуются тем, что они переводят единичный автомат структуры, находящийся в *возбужденном* состоянии, в состояние *рефрактерности*. Теперь предположим, что рефрактерная ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ имеет произвольный порог возбудимости $1 \leq P \leq n-1$ и глубину рефрактерности $r \geq 1$. С учетом сделанного предположения имеет место следующий важный результат [54-56,88,90,536].

Теорема 134. В классе B(r) всех одномерных рефрактерных ГФП $\tau^{(n)}$ с глубиной рефрактерности r≥1 никакая глобальная функция не представима композицией конечного числа функций $\tau^{(n_j)}$ из того же множества B(r); B(r) – множество изолированных относительно операции композиции глобальных рефрактерных функций перехода $\tau^{(n)}$ структур d-ОСР(r,P) ($d \geq 1$).

Таким образом, результат теоремы ***134*** дает исчерпывающее решение проблемы декомпозиции в классе ***B(r)*** всех одномерных ***ГФП*** с рефрактерностью ***r***-глубины. Более того, каждая функция $\tau^{(n)}$ из класса ***B(r)*** находится на собственном уровне сложности, который определяется порогом ***P*** возбудимости и ***X***-индексом соседства. Следовательно, изучение многих важных *динамических* свойств распределения возбужденных состояний в среде единичных автоматов структуры даже для случая ***1-ОСР(r,P)*** носит намного более *индивидуальный* характер в зависимости от основных характеристик структур с рефрактерностью. Результат теорем ***133-134*** распространяется также и на рефрактерные однородные структуры ***d-ОСР(r,P)*** ($d > 1$) с довольно общего вида ***X***-индексом соседства [5,54-56,88,90,536].

Рассмотрим множество ***VA*** классических структур ***1-ОС***, определяемых ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ вида:

$$\sigma^{(n)}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)=\begin{cases} a-1, \quad \text{if } <x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n>=<000\ldots010> \\ x_n+a-1 \quad (\mathrm{mod}\, a), \quad \text{if } <x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n>=<000\ldots01b> \quad (b \neq 0) \\ x_n, \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

Можно показать [8], что для каждой ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ структуры из множества ***VA***, которая определена в алфавите $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$, имеет место соотношение $\tau^{(n)a} \equiv \tau_E^{[a(n-1)+1]}$, где $\tau_E^{(m)}$ – тождественная функция, характеризуемая определяющим соотношением $(\forall c \in C(A))(c\tau_E^{(m)} \equiv c)$. Таким образом, каждая тождественная ***ГФП*** $\tau_E^{(m)}$ ($n \geq 3$; $a \geq 2$), определенная в алфавите ***A***, представима в форме композиции из ***a*** идентичных более простых функций $\tau^{(n)}$ с дефектом, равным ***1*** [53]. Очевидно, для каждой функции $\tau^{(n)} \in VA$ произвольная ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ является периодической с *периодом* $\leq a$ и для нее имеет место неконструируемость только типа ***НКФ-2***. Целый ряд других интересных специальных представлений ***ГФП*** в виде композиции конечного числа более простых функций рассмотрен в наших работах [5,8,9,53-56,88,90,114,536,567] и в следующих разделах монографии.

7.2. Некоторые подходы к решению общей проблемы декомпозиции глобальных функций перехода

В предыдущем разделе был рассмотрен ряд вопросов проблемы *декомпозиции* относительно ряда специальных классов ***ГФП***, а также представлены результаты решения ***1-ПДФ*** на базе подходов, использующих результаты ***Аморозо-Ямада*** по проблеме полноты, а также наших результатов по проблеме *неконструируемости* в классических ***ОС***-моделях. В настоящем разделе мы представим результаты исследования ***общей*** проблемы декомпозиции ***ГФП*** на основе новых перспективных подходов, базирующихся на использовании результатов и методов из теории функций алгебры логики и ***a***-значных логик, а также на использовании формального аппарата теории полугрупп, групп и алгебр и существенном обобщении метода решения ***d-ПДФ*** на основе исследований по проблеме *неконструируемости* в классических ***ОС***-моделях. Наряду с этим будет показана весьма тесная *связь* проблемы декомпозиции ***ГФП*** с проблемой сложности конечных ***КФ*** в классических ***ОС***-моделях и проблемой полноты для полигенных ***ОС***-моделей. Обсуждаемые здесь подходы и методы решения ***d-ПДФ*** представляют определенный интерес, а также при исследованиях ряда других вопросов ***ТОС***-проблематики и целого ряда ее прикладных аспектов [536].

Прежде всего, для решения проблемы декомпозиции ***ГФП*** предлагается подход, базирующийся на использовании функции Шеннона, введенной для оценки сложности реализации функций алгебры логики. Известно, что каждая функция алгебры логики реализуется соответствующей логической схемой, состоящей из некоторых базовых логических элементов. В качестве данных *базовых* элементов выбираются элементы, реализующие следующие операции логики, а именно: *конъюнкции*, *дизъюнкции* и *отрицания*.

Для описания *сложности* логических схем вводим следующие функции. Пусть каждой *логической* схеме M, которая реализует некоторую функцию алгебры логики, приписано неотрицательное число $L(M)$ – сложность схемы, а $L(\sigma)$ – минимум сложностей всех схем M, реализующих данную логическую σ-функцию. При этом, пусть $L(n)=max_\sigma L(\sigma)$ и максимум берется по всем функциям $\sigma^{(n)}$, зависящим от n логических переменных. В случае, когда максимум достигается, $L(n)$ – такое *наименьшее* число, что схемами сложности не более, чем $L(n)$ можно реализовать *любую* функцию $\sigma^{(n)}$ алгебры логики (*или соответствующей ЛФП классической* ***d-ОС***). Функция $L(n)$ впервые была введена ***К. Шенноном*** для контактных схем и им же получены первые значительные результаты по ней. Впоследствии, такая функция $L(n)$ получила имя автора и стала широко использоваться для оценки *сложности* функциональных схем. Важной задачей является исследование поведения функций $L(\sigma)$ и $L(n)$; при этом, оба аспекта исследования оказываются тесно взаимосвязанными между собой [5,8,54-56,88,90,536].

В настоящее время *верхние* оценки, асимптотически равные нижним, получены только лишь для сравнительно немногих типов функциональных схем. При этом, под типом схемы понимается, в первую очередь, набор *базовых* функциональных элементов, из которых конструируются схемы, реализующие ту либо другую функцию $\sigma^{(n)}$ алгебры логики. А так как наша задача сводится к сравнительному анализу функций $\sigma^{(n)}$, то вполне можно ограничиться некоторым конкретным набором базовых функциональных элементов, т. е. конкретным типом функциональных схем, в рамках которого проводится соответствующий *сравнительный* анализ. В качестве данных схем выбираем схемы из функциональных элементов в базисе $G=\{And, Or, Not\}$, для которых найдены асимптотические выражения для функции ***Шеннона*** при условиях асимптотического равенства верхних и нижних оценок их сложности.

Сложностью схемы M из функциональных элементов, реализующей логическую функцию $\sigma^{(n)}$, будем называть число ее элементов и обозначать $Q = L(\sigma^{(n)})$. Пусть теперь $L(\sigma^{(n)})$ – наименьшая сложность схем, реализующих произвольную функцию $\sigma^{(n)}$, и $L(n) = max_\sigma L(\sigma^{(n)})$, где максимум берется по всем функциям $\sigma^{(n)}$. Иными словами, величина $L(n)$ – наименьшее число элементов в схеме, достаточное для реализации *любой булевой* функции от n переменных. При доказательстве результата достаточно *существенно* используется фундаментальный в теории булевых функций результат ***О. Лупанова***, а именно [6]:

Имеет место асимптотическое равенство $L(n) = 2^n/n$***, причем для любого*** $\delta > 0$ ***доля логических функций*** $\sigma^{(n)}$***, для которых справедливо соотношение*** $Q=L(\sigma^{(n)}) \leq (1-\delta)x2^n/n$***, будет стремиться к нулю с ростом n–значения.***

Несмотря на возможные обобщения этого результата на случай произвольного конечного *базиса* и целый ряд других случаев, им вполне возможно ограничиться для дальнейших рассмотрений. Очевидно, что каждую ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, заданную в бинарном алфавите $B=\{0,1\}$, можно рассматривать как некоторую функцию алгебры логики. А так как композиция ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ взаимно однозначно определяется специальной суперпозицией соответствующих им ***ЛФП*** $\sigma^{(n_j)}$, то далее речь будет идти именно о суперпозиции функций $\sigma^{(n)}$ в бинарном ***B***-алфавите. С этой целью для каждого целого n выбирается ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ с *максимально* возможной сложностью $L(n)$. Затем на базе искомой композиции конечного числа бинарных ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ $(n_j < n;\ j=1..k)$ для произвольной функции $\tau^{(n_j)}$ определяется соответствующая ей Σ-схема суперпозиции ***ЛФП*** $\sigma^{(n_j)}$ и оценивается ее сложность $L(\Sigma)$, сравниваемая затем со сложностью $L(n)$ исходной функции $\sigma^{(n)}$. Проведенный после этого сравнительный анализ позволяет сформулировать следующий основной результат [53-56,88].

<u>Теорема 135</u>. Для любого заданного конечного базового G_f***-множества 1-мерных бинарных ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***существует такое целое*** $n_o > 0$***, что для каждого целого*** $n \geq n_o$ ***существует по меньшей мере одна бинарная ГФП*** $\tau^{(n_j)}$***, для которой 1-ПДФ имеет отрицательное решение.***

Следует отметить, что аналогичный результат по ***1-ПДФ*** для бинарного случая получен нами в работе [41] на основе результатов по *универсальной* воспроизводимости в смысле Мура конечных ***КФ*** в классических ***1-ОС***. Результат теоремы ***135*** получен в предположении, что ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ имеет произвольный вид, т.е. не требуется обязательного выполнения условия $\sigma^{(n)}(x,x,\ldots,x)=x$ (*которое определяет классичность структур*), что позволяет распространить вытекающие из него следствия решения ***d-ПДФ*** также на случай *нестабильных* ***d-ОС***. Более того, при доказательстве теоремы не участвовало само понятие размерности, а только ***ШС***, представленный произвольным индексом соседства. Следовательно, результат теоремы ***135*** сохраняет силу также для ***ГФП*** в произвольных бинарных структурах ***d-ОС*** $(d \geq 1)$. Действительно, ***ШС*** в ***d-ОС*** всегда можно представить в виде минимального ***d***-мерного параллелепипеда с центральным автоматом в его верхнем левом углу, если рассматривать, не нарушая общности, случай с бинарными ***2-ОС***. В таком случае ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ представляет собой функцию алгебры логики от переменных числом, большим n, для которой некоторые переменные просто являются *несущественными*. На основе теоремы ***135*** уже несложно получить отрицательное в общем случае решение ***d-ПДФ*** для случая бинарных ***ГФП***.

Следует отметить, что композиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ соответствует суперпозиция ***ЛФП***, которая является существенным *сужением* общего понятия суперпозиции функций. Действительно, относительно введенной нами суперпозиции ***ЛФП*** при доказательстве теоремы ***135*** функции $\sigma^{(n)}$ в бинарном алфавите ***B*** не обладают конечным базисом [53]. На языке же алгебры логики *бинарные* функции $\sigma^{(n)}$ соответствуют классу функций, сохраняющих *константу* ноль, который обозначается через ***To***. Известно, что каждый *базис* в ***To*** содержит не более трех функций, т.е. класс всех функций ***To*** обладает конечным *базисом*. В определении же *базиса* для функций алгебры логики используется понятие суперпозиции функций в общем виде, тогда как полученное отрицательное решение ***d-ПДФ*** говорит об отсутствии конечного базиса относительно *суженного* понятия суперпозиции функций. Таким образом, результаты по ***a***-значным $(a > 2)$ логикам в целом ряде случаев нельзя непосредственно переносить на случай ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенных в алфавите ***A*** общего вида, хотя методы ***a***-значных логик представляются весьма перспективными для исследования целого ряда свойств динамики классических ***ОС***-моделей [88,90,536].

В *общем* случае алфавита ***A*** структуры не представляется возможным непосредственно обобщать вышеприведенные результаты по бинарным ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, поэтому мы и вынуждены, прежде всего, обратиться к ***a***-*значным логикам* $(a>2)$, относительно которых следует отметить, что при решении их задач приходится сталкиваться с большими сложностями и особыми обстоятельствами [5,53]. Так, в ***a***-значных логиках исследование произвольной системы функций на полноту сопряжено с большими техническими трудностями. Тогда как доказательства полноты конкретных систем во множестве функций ***a****-значной* логики проводятся, как правило, посредством метода сведения их к заведомо *полным* системам функций, что во многих случаях встречает весьма существенные затруднения [5,88,536].

Рассмотрим теперь ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенную в произвольном алфавите $A=\{0,1,\ ...,\ a\text{-}1\}$ $(a > 2)$, как функцию ***a***-значной логики. Предположим, что существует такое конечное *базовое* ***G***-множество ***ЛФП***, что каждая локальная функция $\sigma^{(n)}\notin G$ может быть представлена в виде конечного числа суперпозиций ***ЛФП*** из ***G***-множества. Используя здесь терминологию и обозначения работы [53] и обозначая множество всех функций ***a***-значной логики через ***L(a)***, получаем, что замыкание ***G***-множества совпадает с ***L(a)***, т.е. $[G]\equiv L(a)$. Очевидно, что ***G***-множество является *полной* системой в ***L(a)***. А так как множество ***G*** по предположению конечно, то всегда можно выбрать минимальное подмножество $G^*\subseteq G$ такое, что множество ***G**** является *полной* системой в ***L(a)***, тогда как никакое его подмножество *полной* системой в ***L(a)*** не является. Таким образом, предположение о наличии для множества ***L(a)*** конечного *базового* подмножества ***G**** эквивалентно наличию в ***L(a)*** конечного базиса. Следовательно, задачу о декомпозиции ***ГФП***, определенных в произвольном алфавите ***A***, можно свести к задаче о функциональной полноте в ***a***-значных логиках, исследование которой существенно связано с так называемыми предполными классами [10,53]. Вопросы исследований по ***a***-значным логикам достаточно полно представлены, в частности, в работе [323].

<u>Определение 27</u>. Класс D функций, принадлежащих замкнутому классу R множества L(a), будем называть предполным в R, если D представляет собой неполную в R систему, но присоединение к ней любой функции $f\in R\setminus D$ обращает D в полную в R систему функций.

На основе известных результатов по ***a***-значным логикам получаем, что число предполных в ***L(a)*** классов конечно и не превышает величины $2^{a^{a}}$. Однако, как можно показать, это противоречит тому [54], что при фиксированном целом ***a***-значении в ***a***-значной логике всегда найдется базис, состоящий из сколь угодно большого, но конечного числа функций, в том числе предложенный нами для класса функций ***L(a)*** базис ***G****. Следовательно, для класса функций ***L(a)*** не может быть конечного базиса ***G****. Нам остается лишь оценить влияние этого факта на вопрос существования конечного базиса для более узкого класса ***L(a,0)*** функций ***a***-значной логики, удовлетворяющих условию стабильности $\sigma^{(n)}(0,0,...,0)=0$ (*классичности* ***ОС****-моделей*). В результате проведенной нами оценки [54] доказано отсутствие *конечного* базиса и для класса функций ***L(a,0)***, что позволяет нам сформулировать результат, являющийся аналогом теоремы ***135*** для случая функций ***a***-значной логики и представляющий определенный теоретический интерес.

<u>Теорема 136</u>. Класс L(a,0) локальных функций перехода $\sigma^{(n)}$ при условиях $n\geq 2$ и $a > 2$ не обладает конечным базисом.

На основе данного результата подобно *бинарного* случая уже нетрудно получить отрицательное решение проблемы декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и в общем случае [5,54-56,88].

<u>Теорема 137</u>. Среди всех структур d-ОС, определенных в алфавите A и имеющих произвольный индекс соседства, существует бесконечное множество глобальных функций перехода $\tau^{(n)}$, для которых d-ПДФ $(d\geq 1)$ имеет отрицательное решение.

Аналогичный результат может быть получен и на основе результатов (*представленных в главе* ***4***) по проблеме сложности конечных ***КФ*** в ***d-ОС*** [54-56]. Невозможность положительного решения ***d-ПДФ*** для произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ позволяет естественным образом ввести понятие сложности и для глобальных функций перехода подобно случаю конечных ***КФ*** в ***d-ОС***. Таким образом, из анализа понятий сложности конечных ***КФ*** и ***ГФП*** в классических ***d-ОС*** вытекает, что в их основе лежит невозможность существования некоторого конечного ***базового*** множества для конечных ***КФ*** и ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ соответственно.

Из вышесказанного со всей определенностью можно сделать вывод о возможности *плодотворного* применения в исследованиях ***ТОС***-проблематики аппарата и методов, разработанных в алгебре логики и ***a***-значных логиках, а также результатов по проблеме сложности конечных ***КФ*** в ***d-ОС***. Между тем, для исследования проблемы *декомпозиции* ***ГФП*** можно использовать алгебраические методы. Действительно, изучению множеств многоместных функций, замкнутых относительно различных естественно определенных операций, отводится в современной алгебре достаточно важное место. В частности, представляют интерес множества функций, обладающих теми либо иными свойствами. Например, изучаются множества ***n***-местных функций, которые замкнуты по отношению к операции суперпозиции; для определенных таким образом алгебр отыскиваются абстрактные характеристики. Достаточно хорошо известным примером таких алгебр являются, в частности, алгебры *Менгера* ***n***-местных функций [536].

Как известно, ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, осуществляющие отображение множества ***КФ*** ***C(A, d)*** на себя, образуют *полугруппу* относительно *операции композиции* глобальных функций $\tau^{(n)}$; пусть ***L(a,d)*** обозначает *полугруппу* всех таких ***d***-мерных глобальных отображений $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$. Можно показать, что ***L(a,d)*** является некоммутативной полугруппой с единицей, в качестве которой и выбирается тождественное преобразование, оставляющее любую конфигурацию структуры без изменения с точностью до переноса. Исследование свойств композиции ***d***-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определенных в алфавите ***A***, в целом ряде случаев возможно свести к исследованию соответствующих им свойств *полугруппы* ***L(a,d)***. Для дальнейшего изложения мы определим ряд необходимых алгебраических понятий. Будем говорить, что подгруппа ***G*** полугруппы ***S*** с единицей называется максимальной подгруппой полугруппы ***S***, если она строго не содержится ни в какой другой подгруппе данной полугруппы. Существование максимальных подгрупп впервые было доказано ***Дж. Шварцем*** для периодической ***S***-полугруппы, наряду с ***Уоллесом*** и ***Кимура*** для произвольной полугруппы ***SW***. Приведем еще один пример существования *максимальных* подгрупп в *полугруппах*, определяемых глобальными отображениями $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ классических структур ***d-ОС*** $(d \geq 1)$. Покажем, что полугруппа ***L(a,d)*** содержит одну максимальную группу, где под максимальной понимается такая группа ***G***, содержащаяся в полугруппе ***L(a,d)***, которая не может быть расширена на основе добавления к ней новых элементов из множества $L(a,d) \backslash G$.

С взаимной однозначностью глобального отображения $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ весьма тесно связана проблема исследования свойств *классических* ***ОС***-моделей алгебраическими методами. Известно, в общем случае множество всех отображений $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ не удовлетворяет групповым аксиомам (*точнее, аксиоме об обратном элементе*) даже при условии исключения из рассмотрения глобальных отображений, обладающих неконструируемостью типов ***НКФ***, ***НКФ-1*** и ***НКФ-3*** [3]. Однако, рассматривая множество ***G(d)*** ***d***-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, для которых *глобальные* отображения $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ являются взаимно однозначными, можно показать, что оно образует группу относительно операции композиции [54]. Данный результат и позволяет применять групповые методы исследования динамики классических ***d-ОС***, т.е. сводить изучение целого ряда свойств таких структур к исследованию соответствующих им свойств *группы* ***G(d)***, а также составляющих ее подгрупп. В частности, из определения множества ***G(d)*** нетрудно получить и *максимальность* группы ***G(d)***, принадлежащей полугруппе ***L(a,d)*** всех глобальных параллельных отображений $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ при условии $(d \geq 1)$.

Под ***разложением*** полугруппы ***S*** понимается возможность представления ее в виде объединения непересекающихся подполугрупп S_k $(k=1,2,3, ...)$. Для того, чтобы такое разложение полугруппы представляло некоторую ценность для изучения ее строения и определяющих свойств, нужно, чтобы подполугруппы S_k были полугруппами более специального, нежели S, типа, в частности, простыми полугруппами либо группами. В данном контексте полугруппа $L(a,d)$ параллельных отображений разлагается в объединение непересекающихся полугруппы $L^*(a, d)$ и *максимальной* группы $G(d)$, а именно имеет место следующее определяющее соотношение $L(a,d)=L^*(a,d)\cup G(d)$ и $L^*(a,d)\cap G(d) = E$, где E – единичная группа, состоящая только из одного единичного элемента (*единицы полугруппы*). Решение многих вопросов по свойствам полугруппы $L(a,d)$ можно сводить к решению соответствующих вопросов для полугруппы $L^*(a,d)$ либо группы $G(d)$, что и делается нами несколько ниже.

Предположим теперь, что каждая *ГФП* $\tau^{(n)}\in L(a,d)$ может быть представлена в виде композиции конечного числа более простых функций из некоторого конечного множества $G_f\subset L(a,d)$. В этом случае $L(a,d)$ будет полугруппой с конечным числом образующих. Действительно, множество G_f из $L(a,d)$ тогда и только тогда будет ***системой образующих*** для полугруппы $L(a,d)$, когда каждый элемент множества может быть представлен не менее, чем одним способом в форме *произведения* (*композиции*) конечного числа степеней элементов {*ГФП* $\tau^{(n)}$} из множества G_f. Но поскольку по предположению множество G_f конечно, то из него легко следует наше предыдущее заключение.

Система *образующих* для множества G_f называется ***неприводимой***, если никакая истинная для нее подсистема не является для полугруппы $L(a,d)$ системой *образующих*. Под множеством $G_f\subset L(a,d)$ будем в дальнейшем понимать именно *неприводимую* систему образующих и называть ее *базисом* полугруппы $L(a,d)$. Сказанное в полной мере можно отнести и к группе $G(d)\subset L(a,d)$. Подгруппу $G^*(d)$ группы $G(d)$ будем называть ***замкнутой***, если композиция g_1g_2 любых двух ее элементов $g_1, g_2\in G(d)\backslash G^*(d)$ не принадлежит подгруппе $G^*(d)$. Далее нам понадобится ряд весьма простых результатов, представленных в наших работах [5,54-56,88].

Прежде всего, если *полугруппа* $L(a,d)$ имеет *конечный базис* G_f, то *максимальная* группа $G(d)\subset L(a,d)$ также имеет конечный базис G^* такой, что имеют место следующие соотношения $G_f = G^*\cup G^\#$, $G^*\cap G^\#=\varnothing$ и $G^\#$ – конечный базис полугруппы $L(a,d)\backslash G(d)$. При этом, если группа $G(d)$ не имеет конечного базиса, то не имеет конечного базиса и полугруппа $L(a,d)$. Если группа $G(d)$ содержит n замкнутых подгрупп, то число N элементов базиса G_f группы не менее величины n ($N\geq n$). Из данного результата легко получить и важное для дальнейшего следствие, а именно: ***Если группа G(d) содержит бесконечное число замкнутых подгрупп, группа G(d) не может иметь конечного базиса.*** Данные результаты переносятся и на случай произвольных алгебраических полугрупп. В дальнейшем без нарушения общности будем отождествлять *ГФП* $\tau^{(n)}$ с соответствующими им параллельными глобальными отображениями $\tau^{(n)}: C(A,d) \rightarrow C(A,d)$ классических *d-ОС* ($d\geq 1$).

Рассмотрим теперь несколько детальнее одно представление полугруппы $L(a,d)$ согласно нашим результатам по неконструируемости в классических *d-ОС* ($d\geq 1$) (глава 2). Хорошо известно [53], множество всех параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)}: C(A,d) \rightarrow C(A,d)$ можно представить в виде объединения *семи* непересекающихся подмножеств, которые относительно составляющих их глобальных отображений $\tau^{(n)}$ {*ГФП* $\tau^{(n)}$} обладают следующими основными определяющими характеристиками, а именно:

G_1 : *ГФП* $\tau^{(n)}$ ***обладают всеми четырьмя типами неконструируемости (НКФ, НКФ-1, НКФ-2 и НКФ-3);***
G_2 : *ГФП* $\tau^{(n)}$ ***обладают неконструируемостью типов НКФ (НКФ-3) и НКФ-1 при отсутствии для них неконструируемости типа НКФ-2;***

G_3 : ГФП $\tau^{(n)}$ обладают неконструируемостью типов НКФ (НКФ-3) и НКФ-2 при отсутствии для них неконструируемости типа НКФ-1;
G_4 : ГФП $\tau^{(n)}$ обладают неконструируемостью только типа НКФ-2; при этом, определяемые ими глобальные отображения не являются взаимно однозначными;
G_5 : ГФП $\tau^{(n)}$ обладают неконструируемостью только типа НКФ-1;
G_6 : ГФП $\tau^{(n)}$ обладают неконструируемостью только типа НКФ (НКФ-3);
$G_7 \subset G_6$: ГФП $\tau^{(n)}$ определяют взаимно однозначные параллельные глобальные отображения $\tau^{(n)}$: $C(A,d) \to C(A,d)$ при $(d \geq 1)$.

Можно убедиться [53], что относительно операции композиции множества G_k ***(k=1..6)*** образуют некоммутативные полугруппы, тогда как множество G_7 образует группу. Таким образом, ***L(a,d)*** *полугруппа* всех параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)}$: $C(A,d) \to C(A,d)$ в ***d-ОС (d≥1)*** может быть представлена в виде *объединения* конечного числа непересекающихся *подполугрупп* и *группы*, т.е. $L(a,d)=\cup_k G_k$ ***(k=1..7)***. Этот анализ структуры подполугрупп G_j ***(j=1..6)*** и группы G_7 позволяет сформулировать следующий основной результат по разложению полугруппы ***L(a,d)*** глобальных отображений $\tau^{(n)}$: $C(A,d) \to C(A,d)$ для классических ***d-ОС*** $(d \geq 1)$.

<u>Теорема 138</u>. Полугруппа L(a,d) всех параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)}:C(A,d)\to C(A,d)$, ***определяемых классическими d-ОС (d ≥ 1), может быть представлена в виде объединения шести непересекающихся подполугрупп G_k (k=1..6), не имеющих конечных систем образующих, и одной максимальной группы G(d). Относительно полугруппы L(a,d)\G(d) множества G_h (h = 4..6) есть изолированные подполугруппы.***

Относительно группы ***G(d)*** следует сделать одно весьма существенное замечание. Рассмотрение большого количества ***1***-мерных *бинарных* отображений $\tau^{(n)}$: $C(B,1) \to C(B,1)$ и, в первую очередь, отображений, образующих подполугруппу G_4, позволило высказать предположение о том, что ***G(d)*** является *единичной группой*, т.е. состоит только из тождественных глобальных отображений. Между тем, дальнейшие исследования показали, что вопрос структуры группы ***G(d)*** остается до некоторой степени открытым. Предпринятое более детальное исследование бинарных ***1-ОС*** на предмет обнаружения взаимно однозначных отображений $\tau^{(n)}$: $C(B,1) \to C(B,1)$, отличающихся от тождественных, оказалось вполне успешным. Следующая теорема представляет наилучший полученный в данном направлении результат, представляющий определенный теоретический интерес [55,56,88].

<u>Теорема 139</u>. Полугруппа L(a,1) всех 1-мерных глобальных отображений $\tau^{(n)}:C(A,1)\to C(A,1)$ ***(a≥3), определяемых классическими d-ОС (d≥1), может быть представлена объединением 6-и попарно непересекающихся подполугрупп G_k (k=1..6), не имеющих конечных систем образующих, и одной максимальной группы G(a), которая является объединением подгруппы T* всех тождественных отображений $\tau^{(n)}{}_o$ (n≥2) с конечной системой P(a,2) образующих и соотношением $\tau^{(n)(a-1)!}=\tau^{(2)}{}_o$ и, возможно, подгруппы взаимно однозначных отображений, отличных от вышеперечисленных.***

Результаты теорем ***138*** и ***139*** говорят о необходимости дальнейшего продолжения исследований в данном направлении, учитывая многообразие возможностей уже для одномерного бинарного случая. В частности, следующий результат иллюстрирует многообразие возможностей уже для бинарных классических ***1-ОС*** [19,53-56,88,90,536].

<u>Теорема 140</u>. Для любого целого n≥3 существует не менее 2^{n-1}-n бинарных одномерных ГФП $\tau^{(n)}$, обладающих следующими свойствами, а именно:

- ***для ГФП $\tau^{(n)}$ отсутствуют конфигурации НКФ, НКФ-3, НКФ-1 при наличии для нее НКФ-2;***
- ***любая КФ $c \in C(B,1,\phi)$ для ГФП $\tau^{(n)}$ является периодической; существуют периодические c-КФ с минимальным p-периодом, чья величина определяется соотношением $(|c|+n-2)/(n-1) < p=2^k$;***
- ***глобальное отображение $\tau^{(n)}$: $C(B,1,\infty) \to C(B,1,\infty)$ не является взаимно однозначным;***
- ***для указанных ГФП $\tau^{(n)}$ проблема 1-ПДФ имеет отрицательное решение.***

Данный результат является существенным *обобщением* ряда лемм из [3], но и он не дает полного решения вопроса даже относительно структуры группы ***G(1)***, участвующей в вышеприведенном представлении *полугруппы* ***L(a,1)*** одномерных глобальных отображений. Наряду с этим, данный результат еще раз иллюстрирует все многообразие и богатство форм поведения конечных ***КФ c**** уже для случая классических *бинарных* ***d-ОС (d≥1)***. Таким образом, из результатов теорем ***138-140*** следует, что группа ***G(d)*** в представлении полугруппы ***L(a,d)*** должна содержать нетривиальные тождественные взаимно однозначные глобальные отображения, тогда как для каждой из шести *подполугрупп* ***G_j (j=1..6)***, определяемых представлением ***L(a,d)***, проблема ***d-ПДФ***, в общем случае, будет иметь отрицательное решение.

В заключение настоящего раздела на основе понятия бесконечных ***ВСКФ (∞-ВСКФ)*** определяем еще один подход к решению проблемы декомпозиции ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях. С этой целью достаточно детально исследовалась *подполугруппа* ***G_4 1***-мерных глобальных параллельных отображений ***$\tau^{(n)}$: $C(A,1) \to C(A,1)$***, для которых был выявлен целый ряд интересных *динамичесих* свойств. Для дальнейшего нам понадобится ряд новых понятий и определений [5,54-56,88,90].

Определение 28. Под парой бесконечных ВСКФ (∞-ВСКФ) понимается пара КФ $c_1, c_2 \in C(A,d,\infty)$ таких, что имеет место $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c_3 \in C(A,d,\infty) \neq \square$ (где $\square$ – нулевая конфигурация).

Будем говорить, что бинарная ***ГФП $\tau^{(n)}$*** реализует ***перевертыш*** (*обладает им*), если на некоторой паре кортежей ***$<x_1x_2 \ldots x_{n-1}0>$, $<x_1x_2 \ldots x_{n-1}1>$*** соответствующая ей ***ЛФП $\sigma^{(n)}$*** принимает значения ***$\sigma^{(n)}(x_1,x_2, \ldots, x_{n-1},x_n) = x_n+1 \pmod 2$***. Число перевертышей для произвольной ***ГФП $\tau^{(n)}$*** называется ее *дефектом*, который в некоторой мере характеризует степень отклонения ее от тождественной ***ГФП $\tau^{(n)}_o$***. Определим один полезный класс ***$E^\#$ ГФП $\tau^{(n)}$*** из *подполугруппы* ***G_4, ЛФП $E^{(n)}$*** которых определяются следующим образом, а именно:

$$E^{(n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases} 0, & if\ x_j=0,\quad x_{n-1}=x_n=1 \quad (j=1..n-2) \\ 1, & if\ x_j=0,\quad x_{n-1}=1 \quad (j=1..n-2,\ n) \\ x_n, & otherwise \end{cases}$$

Данный класс ***ГФП $E^{(n)}$*** из-за целого ряда специфических динамических свойств представляет вполне определенный интерес для дальнейших исследований даже безотносительно проблемы декомпозиции. Рассматривая теперь подкласс ***ГФП $E^{(n)}$*** из множества ***$E^\# \subset G_4$***, имеющих дефект, равный единице, доказывается [53], что композиция двух таких функций есть снова функция из множества ***G_4***, но с дефектом, отличным от единицы. На основе анализа множеств пар ***∞-ВСКФ*** для ***ГФП $E^{(n)}$*** из множества ***$E^\#$*** удается установить точный вид таких пар для каждой из функций класса ***$E^\#$***, что позволяет доказать следующий результат, а именно: ***Для любого целого $n \geq 3$ ГФП $E^{(n)}$ из класса $E^\#$ имеют, вообще говоря, отрицательное решение 1-ПДФ.*** Данный результат дает возможность получать *конструктивное* отрицательное решение ***1-ПДФ***, имея другие интересные приложения [536]. Некоторые из них рассмотрены несколько ниже в несколько ином контексте.

Для решения вопроса наличия для *подполугруппы* G_4 *конечного базиса* вводится один класс $Ar \subset G_4$ ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, относительно которых проводится достаточно детальное исследование структуры пар ∞-***ВСКФ***. Предложенный нами подход является конструктивным и позволяет делать достаточно убедительные предположения о реальной возможности *переноса* результатов, полученных в этом направлении, на общий случай классических ***1-ОС***. Тогда как *базовый* результат для дальнейших исследований представляет нижеследующая основная теорема ***141*** [5,53,88].

На основе *специальным* образом определенного класса ***ГФП*** $\tau^{(n)} \subset G_4$, удовлетворяющих условиям теоремы ***141***, и детального анализа структур пар существующих для них ∞-***ВСКФ*** получаем [53] следующий результат: ***Подполугруппа G_4 1-мерных бинарных ГФП не имеет конечного базиса.*** Из детального анализа ***ГФП*** $\tau^{(n)} \subset G_4$, удовлетворяющих условиям теоремы ***141***, можно сделать вывод о том, что среди функций подполугруппы G_4 существуют функции, обладающие парами ∞-***ВСКФ***, состоящими из подконфигураций, имеющих вполне *конкретный* набор составляющих их компонент *(отрезков конфигураций)* минимальной длины ***(n-1)***.

<u>Теорема 141</u>. Для любого целого n≥3 существуют 1-мерные бинарные ГФП $\tau^{(n)} \subset G_4$, обладающие множеством пар ∞-ВСКФ только следующего вида, а именно:

$$\boxed{\begin{array}{c} C_1^{\infty} = \ldots\ldots g_{j+p+1}^{1}\, g_{j+p}^{1} \cdots g_{j+1}^{1}\, g_{j}^{1}\, g_{j-1}^{1}\, g_{j-2}^{1} \cdots g_{1}^{1} X \\ C_2^{\infty} = \ldots\ldots g_{j+p+1}^{2}\, g_{j+p}^{2} \cdots g_{j+1}^{2}\, g_{j}^{2}\, g_{j-1}^{2}\, g_{j-2}^{2} \cdots g_{1}^{2} X \\ \textit{where } (g_j^1, g_j^2) - \textit{any pair of 2-element set} \\ \{(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}, x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n-1}^1), (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n-1}^1, x_1 x_2 \ldots x_{n-1})\} \\ (x_k \in \{0,1\},\ k = 1..n-1;\ j = 1, 2, 3, \ldots) \end{array}}$$

где X – произвольная бинарная конфигурация, а кортежи $<x_1x_2 \ldots x_{n-1}>$, $<x^1_1x^1_2 \ldots x^1_{n-1}>$ ***различны и определяются видом бинарных кортежей длины n, на которых*** $\tau^{(n)} \subset G_4$ ***будет реализовывать перевертыши.***

Более того, для таких функций существуют пары ∞-***ВСКФ***, состоящие из периодических ***КФ h*** с минимальным периодом ***(n-1)***. При этом, *составляющая компонента* ***(СК)*** конфигураций данной пары ∞-***ВСКФ*** до некоторой степени аналогична внутреннему блоку ***(ВБ)*** классических ***ВСКФ***, определенных и рассмотренных нами в разделе **2.3** книги. Более того, интересно отметить, что полученные нижние оценки для минимальных размеров: ***СК*** пар ∞-***ВСКФ*** для ***ГФП*** $\tau^{(n)} \subset G_4$, ***ВБ*** классических пар ***ВСКФ*** и ***НКФ-1*** для случая классических ***1-ОС*** совпадают и равны ***(n-1)***, т.е. на единицу меньше размера ***ШС*** соответствующей классической однородной структуры.

Пусть теперь некоторая ***ГФП*** $\tau^{(n)} \subset G_4$ удовлетворяет условиям теоремы ***141*** и обладает парами ∞-***ВСКФ*** периодических конфигураций c^{∞}, b^{∞} с минимальным периодом величины ***(n-1)***. Тогда результатом применения к таким парам ∞-***ВСКФ ГФП*** $\tau^{(n)}$ являются конфигурации $h^{\infty} = c^{\infty}\tau^{(n)} = b^{\infty}\tau^{(n)}$, имеющие период также размера ***(n-1)***. Более того, ни одна периодическая пара ∞-***ВСКФ*** с периодом, меньшим, чем ***(n-1)***, не может для таких ***ГФП*** $\tau^{(n)} \subset G_4$ быть прообразом какой-нибудь пары ∞-***ВСКФ***. Следовательно, существуют ***ГФП*** $\tau^{(n)} \subset G_4$, для которых ни одна периодическая ∞-***ВСКФ*** с периодом меньшим, чем ***(n-1)***, не может для таких функций быть прообразом какой-либо пары ∞-***ВСКФ***. Проведя с этой целью достаточно детальный анализ множества $SGAK \subset G_4$ всех таких *глобальных* функций, получаем новое решение ***1-ПДФ*** [54], определяемое следующей основной теоремой.

<u>Теорема 142</u>. Полугруппа L(a,1) всех 1-мерных глобальных отображений $\tau^{(n)}$: C(A,1) → C(A,1) не имеет конечного базиса. Для каждого целого n ≥ 3 существует 1-мерная ГФП $\tau^{(n)}$, определенная в произвольном конечном алфавите A, для которой 1-ПДФ имеет отрицательное решение.

Аналог теоремы ***142*** на основе одного алгебраического подхода был получен ***В. Боднарчуком*** и ***Г. Цейтлиным.*** Работая по ***ПО-**преобразованиям*, эквивалентным классическим ***1-ОС,*** они на базе изучения одного класса полугрупп, определенных такими преобразованиями, доказали, такие полугруппы (*а значит и **1**-мерные **ГФП***) не могут иметь конечного базиса [324,325]. Более строго их результат сводится к следующему.

Рассматривается множество всех одномерных бесконечных периодических ***КФ*** в алфавите ***A*** с ***p***-периодом. Обозначая такое множество через Φ_p, вводится множество Ψ_p глобальных функций, осуществляющих *взаимно однозначное* отображение множества Φ_p на себя. Очевидно, множества Ψ_p ***(p=1,2,...)*** являются *подполугруппами* полугруппы **Ψ** всех ***1***-мерных параллельных глобальных отображений $\tau^{(n)}$***: C(A,1) → C(A,1).*** Показывается [15], что подполугруппы Ψ_p попарно различны и изолированы. Таким образом, существует бесконечное множество Ψ_p ***(p=1,2,...)*** изолированных подполугрупп полугруппы **Ψ.** Но алгебра с *бесконечной* совокупностью *изолированных* подалгебр, как известно, не содержит конечных систем образующих. Следовательно, *полугруппа* **Ψ** не имеет конечных систем образующих, т.е. для нее отсутствует конечный базис.

Такой алгебраический подход позволяет решать проблему декомпозиции ***ГФП*** для ***ОС-***моделей лишь на принципиальном уровне – возможность или невозможность положительного решения ***d-ПДФ*** в классе всех ***ГФП.*** Тогда как метод исследования ***1-ПДФ*** на базе теоремы ***141*** позволяет получать более сильный результат, включающий также элементы *конструктивного* определения вида ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, для которых ***d-ПДФ*** имеет отрицательное решение. В этом плане было бы весьма интересным распространить данный подход и на общий случай классических ***ОС-***моделей. При этом, следует отметить, предложенный нами метод решения ***1-ПДФ,*** базирующийся на понятии ***∞-ВСКФ,*** является существенным обобщением метода решения проблемы *декомпозиции* ***ГФП*** на основе результатов по проблеме неконструируемости в классических ***ОС-***моделях [54-56,536].

В следующих разделах на основе возможности полиномиального представления локальных $\sigma^{(n)}$ функций перехода в классических ***ОС-***моделях проводится дальнейшее обсуждение как общей, так и обобщенной проблем ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, а также связанных с ними вопросов по сложности ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и алгоритмической разрешимости проблемы их декомпозиции.

7.3. Проблема сложности глобальных функций перехода в классических ОС-моделях и вопросы ее алгоритмической разрешимости

В данном разделе на основе одного алгебраического подхода, представляющего несколько более широкий интерес для математической теории структур ***d-ОС (d≥1)*** и ее весьма многочисленных приложений, рассматриваются вопросы исследования общей ***(d-ПДФ)*** и обобщенной ***(d-ОПДФ)*** проблем декомпозиции ***ГФП.*** Вопросы алгоритмической разрешимости играют в современной математике чрезвычайно важную роль и составляют достаточно широкий класс так называемых *массовых* задач. Ряд задач такого класса, связанных с однородными структурами, рассматривался выше. Ниже вопросы *алгоритмической* разрешимости относятся к обеим проблемам *декомпозиции* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ для случая классических ***ОС-***моделей. *Общая* проблема алгоритмической *разрешимости декомпозиции* сводится к следующему вопросу, а именно: ***Существует ли алгоритм, состоящий в определении того, будет ли иметь положительное решение d-ПДФ и/или d-ОПДФ для каждой d-мерной ГФП*** $\tau^{(n)}$***, определенной в алфавите A?*** Учитывая специфику проблемы декомпозиции, прежде всего, с прикладной точки зрения, при положительном решении данного вопроса было бы очень желательным установление именно *конструктивного* разрешающего алгоритма. В этом направлении имеет место следующий результат, а именно [88,90].

***Теорема 143**. Для произвольной d-мерной ГФП $\tau^{(n)}$ $(d \geq 1)$, определенной в конечном алфавите A, существует конструктивный алгоритм, решающий для нее как d-ПДФ, так и d-ОПДФ.*

Действительно, весьма несложно убедиться, что для каждой конкретной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определенной в алфавите A, существует ***конструктивный*** алгоритм, устанавливающий возможность решения для нее как ***d-ПДФ,*** так и ***d-ОПДФ.*** Не нарушая общности, поясним его суть для *простого* случая ***1-ПДФ*** на примере ***1-ОС*** с алфавитом внутренних состояний $A=\{0,1,\dots,a\text{-}1\}$ и индексом соседства $X=\{0,1,2,\dots,n\text{-}1\}$. Где для функции $\tau^{(n)}$ с ***ШС*** размера n в качестве глобальных функций перехода, составляющих ее декомпозицию

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\,\tau^{(n_2)}\,\tau^{(n_3)} \dots\dots\, \tau^{(n_k)} \qquad (n \geq 3;\ n_j < n) \qquad (\varphi)$$

могут выступать *произвольные* сочетания ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ лишь при условии *единого* алфавита A $(j=1..k)$. Количество данных групп $\Re^{(p)}$ функций $\tau^{(n_j)}$ относительно размеров ***ШС*** конечно и равно $(n-2)$ $(p\in\{2,3,4,\dots,n\text{-}1\})$. При этом, каждая из этих групп содержит по $a^{a^p\text{-}1}$ $(p=2..n\text{-}1)$ ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$, чьи ***ЛФП*** $\sigma^{(n_j)}$ определяются параллельными подстановками следующего вида, а именно:

$$x_1x_2x_3 \dots x_p \to x^*_1 \quad x^*_1, \quad x_j\in A\ (j=1..p)$$

С другой стороны, ввиду ***ШС*** размера n $(n\geq3)$ исходной глобальной функции $\tau^{(n)}$ для поддержки представления (φ) допустимо лишь конечное число $\wp(n)$ сочетаний ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ с ***ШС*** размера $< n$, зависящее от величины n. Например, для $n=4$ $\wp(4) = \#\{\tau^{(2)3}, \tau^{(2)}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(2)}\} = 3$, тогда как для $n=6$ $\wp(6)=\#\{\tau^{(2)5}, \tau^{(2)3}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(2)3}, \tau^{(3)2}\tau^{(2)}, \tau^{(2)}\tau^{(3)2}, \tau^{(4)}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(4)}, \tau^{(4)}\tau^{(2)2}, \tau^{(2)2}\tau^{(4)}, \tau^{(2)}\tau^{(5)}, \tau^{(5)}\tau^{(2)}\} = 11$, где $\#(H)$ – мощность множества H. Все допустимые сочетания весьма несложно получить только на основе размера n исходного ***ШС.*** Нижеследующий пример иллюстрирует тестирование двух допустимых сочетаний $\tau^{(3)2}\tau^{(2)}$ и $\tau^{(4)}\tau^{(2)2}$ для случая шаблона соседства размера $n = 6$, а именно.

$\tau^{(3)}$:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\tau^{(3)}$:	x'_1	x'_2	x'_3	x'_4		
$\tau^{(2)}$:	x''_1	x''_2				
	x^*_1					

$\tau^{(4)}$:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\tau^{(2)}$:	x'_1	x'_2	x'_3			
$\tau^{(2)}$:	x''_1	x''_2				
	x^*_1					

При этом, легко заметить, что имеет место следующее соотношение $\tau^{(h)k}\tau^{(q)m}\equiv\tau^{(q)m}\tau^{(h)k}$, а $\tau^{(h)k}= \tau_1^{(h)}\tau_2^{(h)}\tau_3^{(h)}\dots\tau_t^{(h)}$ $(t=1..k)$. После вычисления всевозможных сочетаний $\Omega^{(n)}$ указанного вида для ***ШС*** конкретного размера n и всевозможных ***ГФП*** $\tau^{(p)}$ групп $\Re^{(p)}$ $(p=2..n\text{-}1)$ в конечном алфавите A разрешающий алгоритм сводится к простому (*однако довольно объемному*) перебору на предмет *приемлемости* того либо иного сочетания из $\Omega^{(n)}$ в качестве представления (φ) для исходной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$. Суть такой приемлемости хорошо прослеживается, например, для представлений формата $\tau^{(6)} = \tau^{(3)2}\tau^{(2)}$ и $\tau^{(6)} = \tau^{(4)}\tau^{(2)2}$ вышеприведенного примера посредством применения ко всем ***КФ*** $\langle x_1x_2x_3x_4x_5 \dots x_p\rangle$ последовательно соответственно глобальные функции перехода

$$\tau_1^{(3)}\tau_2^{(3)}\tau^{(2)} \ \text{и}\ \tau^{(4)}\tau_1^{(2)}\tau_2^{(2)}\ \left(\tau_1^{(3)},\tau_2^{(3)}\in\Re^{(3)};\ \tau^{(2)},\tau_1^{(2)},\tau_2^{(2)}\in\Re^{(2)};\ \tau^{(4)}\in\Re^{(4)}\right)$$

с последующим сравнением полученных результатов с параллельными подстановками формата $x_1x_2x_3 \dots x_6 \to x^*_1$, определяющими искомую ***ГФП*** $\tau^{(6)}$. При этом, при указанном тестировании в качестве сочетаний $\tau_1^{(3)}\tau_2^{(3)}\tau^{(2)}$ и $\tau^{(4)}\tau_1^{(2)}\tau_2^{(2)}$ должны проверяться всевозможные ***ГФП*** из множеств

$\Re^{(2)}$, $\Re^{(3)}$ и $\Re^{(4)}$. В общем случае допустимые сочетания $Sp\ \{p = 1..\wp(n)\}$ из $\Omega^{(n)}$ можно вычислять из следующего определяющего соотношения, а именно:

$$(\forall n \ge 3)\left(\sum_{j=1}^{n-2} m_j(n_j - 1) = n - 1\right);\ \ m_j \text{ - integers};\ \ 0 \le m_j \le (n-1);\ \ n_j \in \{2,3,\ldots,n-1\};\ \ j = 1..(n-2)$$

$$Sp = \tau_1^{(n_1)m_1}\tau_2^{(n_2)m_2}\tau_3^{(n_3)m_3}\ldots\tau_h^{(n_h)m_h}$$

С учетом допустимых *значений* для n_j {*размеров* ***ШС*** *составляющих сочетаний из* $\Omega^{(n)}$} приведенное соотношение принимает следующий весьма простой вид, а именно:

$$(\forall n \ge 3)\left(\sum_{j=1}^{n-2} j * m_j = n - 1\right);\ \ m_j \text{ - integers};\ \ 0 \le m_j \le (n-1);\quad (j = 1..n-2)$$

Для целочисленного решения линейных уравнений этого типа (*диофантовых уравнений*) имеется ряд методов в теории чисел, нами здесь не рассматриваемых. Очевидно, что все *неотрицательные* целочисленные решения m_j этого линейного уравнения и представляют допустимые сочетания, составляющее множество $\Omega^{(n)}$ всевозможных представлений вида (φ) для исходной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$. И в этом случае допустимые сочетания принимают следующий достаточно простой вид, а именно:

$$\tau^{(2)m_1}\tau^{(3)m_2}\tau^{(4)m_3}\ldots\tau^{(n-1)m_{n-2}},\ \ \text{where}\ \ \tau^{(p)0} \equiv 1;\quad p = 1..n-2$$

С учетом этого определяющего соотношения, в число *допустимых* сочетаний, содержащих более одной ***ГФП***, входят и все перестановки из составляющих их функций, в частности, $\{\tau^{(2)3}\tau^{(3)}\tau^{(4)2}, \tau^{(2)3}\tau^{(4)2}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(2)3}\tau^{(4)2}, \tau^{(3)}\tau^{(4)2}\tau^{(2)3}, \tau^{(4)2}\tau^{(3)}\tau^{(2)3}, \tau^{(4)2}\tau^{(2)3}\tau^{(3)}\}$. Например, в качестве допустимых выступают сочетания следующего вида, а именно:

$$\left\langle \begin{array}{l} \tau^{(2)(n-1)};\ \tau^{(2)(n-k-2)}\tau^{(k+2)}, \tau^{(k+2)}\tau^{(2)(n-k-2)} \quad (k = 1..n-3);\quad n \ge 3 \\ \tau^{(p)}\tau^{(n-p+1)}, \tau^{(n-p+1)}\tau^{(p)}\ \ (p = 3..]n/2[),\ \text{where}\ ]h[\ -\ \text{integer no lesser than}\ h \end{array} \right\rangle$$

На основе сочетаний множества $\Omega^{(n)}$ можно проводить доказательство существования ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, не имеющих *представления* вида **(59, φ)**. В качестве примера рассмотрим группы ***ГФП*** $\Re^{(4)}$ и $\Re^{(6)}$ в произвольном алфавите ***A***. Допустимые сочетания для этих групп определяются множествами $\Omega^{(4)} = \{\tau^{(2)3}, \tau^{(2)}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(2)}\}$ и $\Omega^{(6)} = \{\tau^{(2)5}, \tau^{(2)3}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(2)3}, \tau^{(3)2}\tau^{(2)}, \tau^{(2)}\tau^{(3)2}, \tau^{(4)}\tau^{(3)}, \tau^{(3)}\tau^{(4)}, \tau^{(4)}\tau^{(2)2}, \tau^{(2)2}\tau^{(4)}, \tau^{(2)}\tau^{(5)}, \tau^{(5)}\tau^{(2)}\}$ соответственно.

$$N4 = a^{a^{4}-1};\quad N4^* = \left(a^{a^2-1}\right)^3 + a^{a^2-1}a^{a^3-1} + a^{a^3-1}a^{a^2-1} = a^{3a^2-3} + 2a^{a^3+a^2-2};$$

$$N4 > N4^* \equiv a^{a^4-1} > a^{3a^2-3} + 2a^{a^3+a^2-2} \equiv 1 > \frac{1}{a^{a^4-3a^2+2}} + \frac{2}{a^{a^4-a^3-a^2+1}};\qquad a \ge 2$$

$$N6 = a^{a^6-1};\quad N6^* = \left(a^{a^2-1}\right)^5 + 2\left(a^{a^3-1}\right)^2 a^{a^2-1} + 2\left(a^{a^2-1}\right)^3 a^{a^3-1} + 2a^{a^4-1}a^{a^3-1} + 2\left(a^{a^2-1}\right)^2 a^{a^4-1} +$$

$$2a^{a^5-1}a^{a^2-1} = a^{5a^2-1} + 2a^{2a^3+a^2-3} + 2a^{a^3+3a^2-4} + 2a^{a^4+a^3-2} + 2a^{a^4+2a^2-2a-1} + 2a^{a^5+a^2-2}$$

$$N6 > N6^* \equiv a^{a^6-1} > a^{5a^2-1} + 2\left(a^{2a^3+a^2-3} + a^{a^3+3a^2-4} + a^{a^4+a^3-2} + a^{a^4+2a^2-2a-1} + a^{a^5+a^2-2}\right) \equiv$$

$$1 > \frac{1}{a^{a^6-5a^2}} + 2*\left(\frac{1}{a^{a^6-2a^3-2a^2+2}} + \frac{1}{a^{a^6-a^3+3a^2+4}} + \frac{1}{a^{a^6-a^4-a^3+1}} + \frac{1}{a^{a^6-a^4-2a^2+2a}} + \frac{1}{a^{a^6-a^5-a^2+1}}\right)$$

Очевидно, число всех ***ГФП*** $\tau^{(4)}$ равно ***N4***, а $\tau^{(6)}$ равно ***N6***, тогда как число всех видов допустимых сочетаний для них определяются как ***N4**** и ***N6**** соответственно. Если имеют место соотношения ***N4>N4**** и ***N6>N6****, то среди ***ГФП*** $\tau^{(4)}$ и $\tau^{(6)}$ будут существовать функции, не представимые в виде ***(59***, φ***)***. Вышеприведенные несложные выкладки именно это весьма наглядно и доказывают.

Вышеприведенные выкладки справедливы и для общего случая ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***(n*** ≥ ***3)***, однако намного более громоздки. Вышеприведенный *алгоритм* решения ***d-ПДФ*** относительно просто реализуем программно, однако и в таком случае имеем ввиду роста мощности алфавита ***A*** и размера ***n ШС*** тестируемой ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ временные издержки становятся весьма существенны даже на достаточно мощных вычислительных кластерах. С увеличением размера ***n ШС*** растет и длина допустимых сочетаний из $\Omega^{(n)}$ в качестве представления ***(59***,φ***)*** для исходной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, т.е. число входящих в них ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ из множеств $\Re^{(p)}$ ***(p=2..n-1)***. Так, для ***n = 9*** длина допустимых сочетаний $\tau^{(2)2}\tau^{(3)}\tau^{(5)}$ и $\tau^{(2)}\tau^{(3)}\tau^{(4)}\tau^{(2)2}$ равна соответственно ***3*** и ***4***.

Естественно, предложенный разрешающий алгоритм довольно громоздок, однако он позволяет получать *(при их наличии)* все представления формы ***(59***,φ***)***, допустимые для данной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, т.е. дает исчерпывающее конструктивное решение проблемы. Его трудоемкость, порой, достаточно существенно снижается, если ограничиться получением *любого* допустимого представления вида ***(59***, φ***)***. Не взирая на разрешимость ***d-ПДФ***, имеется целый ряд более частных проблем, решение которых известно и не столь громоздко. Начнем с изложения наиболее простых случаев.

Прежде всего, рассмотрим важный, особенно с прикладной точки зрения, случай специального представления произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ при ограниченном числе представляющих ее функций в соотношении ***(59)***, т.е. при условии ***k<k*=const***. В связи с проблемой декомпозиции возникает и довольно интересный и важный вопрос ее алгоритмической разрешимости. Для предложенного специального случая данный вопрос алгоритмически *разрешим* и доказательство данного факта достаточно просто [53]. Более того, разрешающий алгоритм является конструктивным и весьма просто реализуемым уже на ***ПК*** [15]. Аналогичным образом можно рассматривать *разрешимость* ***d-ПДФ*** и для ряда других специальных случаев представления ***ГФП*** вышеуказанного вида ***(59)***.

В данном плане интересно рассматривать проблему *декомпозиции* не только относительно всего множества ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, но и относительно ряда его подмножеств. Пусть ***GS*** будет множеством всех ***d***-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определенных в произвольном *конечном* алфавите ***A*** и таких, что для каждой функции $\tau^{(n)} \in GS$ и ***КФ*** $c \in C(A,d,\phi)$ выполняется следующее соотношение $|c| \leq |c\tau^{(n)}|$, где $|c|$ – максимальный диаметр произвольной ***c-КФ***. Тогда в классе ***GSAK ГФП d-ПДФ*** алгоритмически разрешима [5,54,88].

<u>Теорема 144</u>. В классе GS d-мерных ГФП проблема d-ПДФ алгоритмически разрешима и для нее существует конструктивный разрешающий алгоритм.

Как с прикладной, так и целого ряда теоретических точек зрения *большой* интерес представляет проблема представления произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в форме минимальной композиции ***(59)***, когда выполняется следующее соотношение $\Sigma_j n_j = n-k+1$; $n_j < n$ $(j=1..k)$. Для этого специального случая представления вопрос алгоритмически разрешим и доказательство его разрешимости является конструктивным; при этом, разрешающий алгоритм имеет достаточно простую разрешающую компьютерную процедуру [5,15,56]. С проблемой декомпозиции тесно связана и так называемая проблема простейшего представления произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, которая состоит в определении наименьших размеров ***ШС*** функций, входящих в представление ***(59)*** исходной глобальной $\tau^{(n)}$ функции. Нетрудно убедиться, ***d-ПДФ/d-ОПДФ*** алгоритмически разрешима, если разрешима проблема и простейшего *представления* произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$. Ввиду практической значимости

d*-ПДФ/*d*-ОПДФ** весьма важным представляется также получение существенно конструктивных разрешающих алгоритмов, позволяющих для произвольной ***ГФП устанавливать невозможность решения указанных проблем или давать исчерпывающие решения в виде искомых конкретных разложений формы ***(59)***. На данном уровне разрешимости вопросы простейшего представления проблем ***d*-ПДФ** и ***d*-ОПДФ** являются эквивалентными.

Общая проблема алгоритмической *разрешимости* ***d*-ПДФ** является *обобщением* очень интересной и более частной проблемы декомпозиции, а именно: ***Существует ли для произвольной ГФП $\tau^{(n)}$ положительное решение d-ПДФ при условии принадлежности входящих в ее представление (59) функций произвольному базовому подмножеству G множества всех глобальных функций $\tau^{(n_j)}$ тех же d-размерности и алфавита A?*** В данном направлении имеет место следующий *основной* результат [72], имеющий целый ряд важных приложений.

<u>Теорема 145</u>. Относительно произвольного базового подмножества G ГФП $\tau^{(n)}$ множества всех d-мерных глобальных функций перехода, определенных в алфавите A={0,1,2,...,a-1} (a – простое), d-ПДФ алгоритмически разрешима.

В определенной степени *промежуточной* между общей и частной проблемами алгоритмической разрешимости ***d*-ПДФ** является проблема однозначности представления произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в виде *композиции* конечного числа *более простых* функций. Из результатов исследования ***d*-ПДФ** известно о наличии ***ГФП***, для которых эта проблема имеет отрицательное решение, и функций, допускающих даже более двух различных *нетривиальных* положительных решений проблемы. В связи с этим возникает интересный вопрос о существовании ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, допускающих лишь одно положительное решение ***d*-ПДФ**. В данной связи можно сразу же отметить одно важное свойство ***ГФП***, составляющих единственное представление вида ***(59)*** исходной функции – отрицательное решение для каждой из них ***d*-ПДФ**. Таким образом, требуется искать такие ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ на основе классов функций, имеющих отрицательное решение ***d*-ПДФ**. Для этого достаточно рассмотреть класс ***G* ГФП*** $\tau^{(n)}$, определяемых ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ следующего общего вида, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j \quad (mod\ a); \quad x_j \in A, \quad a - prime \quad (j = 1\,..\,n)$$

Можно показать [72], что в классе данных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ существуют функции, допускающие только единственное положительное решение ***d*-ПДФ**. Таким образом, среди всех ***d***-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определенных в произвольном алфавите ***A***, можно выделить *три* непересекающихся класса $\tau^{(n)}$ функций относительно *возможного* решения общей ***d*-ПДФ**, представляющих интерес со многих точек зрения как теоретических, так и прикладных, а именно:

- ***не имеющие положительного решения d-ПДФ;***
- ***имеющие положительные решения d-ПДФ;***
- ***имеющие единственное положительное решение d-ПДФ.***

В связи с этим возникает довольно интересный вопрос существования эффективной процедуры определения однозначности решения ***d*-ПДФ** для произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$. Нетрудно убедиться, что при положительном решении этого вопроса будет положительно решаться и *общая проблема* алгоритмической разрешимости ***d*-ПДФ**.

С проблемой представимости ***ГФП*** в виде композиции конечного числа более простых функций связан и вопрос взаимосвязи типов неконструируемости ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ и функций, составляющих ее декомпозицию. Итак, замкнутость множества ***C(A,d,∞)*** относительно глобального отображения, определяемого ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, играет довольно существенную роль в вопросе обладания однородной структурой (*опосредствованно* ***ГФП***) типами неконструируемости ***НКФ***, ***НКФ-1***, ***НКФ-2*** и ***НКФ-3***. В данном направлении представляет интерес вопрос: ***Действительно ли произвольная ГФП*** $\tau^{(n)}$***, представимая в виде композиции следующего вида***

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\,\tau^{(n_2)}\,\tau^{(n_3)}\;.......\;\tau^{(n_k)} \qquad (n > d{+}1;\; n_j < n),$$

определяет глобальное отображение, относительно которого множество C(A,d,∞) является незамкнутым, тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из ГФП $\tau^{(n_j)}$ ***(j=1..k), входящая в представление, определяет глобальное отображение, относительно которого будет иметь место незамкнутость множества C(A,d,∞)?*** Справедливость этого утверждения послужила бы в качестве достаточно важного результата для исследований ***ОС***-проблематики в связи с ***d-ПДФ***, между тем он отрицателен.

Определенный интерес представляет вопрос влияния на свойство незамкнутости множества ***КФ C(A,d,∞)*** относительно отображения, определяемого ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, наличия подобного свойства для ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ ***(j=1..k)***, составляющих вышеуказанную декомпозицию. В основе получения ответа на данный вопрос лежит то достаточно очевидное обстоятельство, что ввиду возможности наличия неконструируемости ***НКФ***-типа для любой из ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$ она вполне может обусловить, при этом, неконструируемость ***КФ*** c^{∞}_j из множества ***C(A,d,∞)*** для ***ГФП*** $\tau^{(n_{j+1})}$ $j \geq 2$, что, в свою очередь, не обеспечит на ней перехода к конечной конфигурации, а именно:

$$c_o^{\infty}\tau^{(n)} = c_o^{\infty}\tau^{(n_1)} \to c_1^{\infty}\tau^{(n_2)} \to \ldots \to c_{j-1}^{\infty}\tau^{(n_j)} \to c_j^{\infty}\tau^{(n_{j+1})} \to \ldots \to c_{k-1}^{\infty}\tau^{(n_k)}$$

Исходя из этих соображений, попытаемся найти пример композиции, базирующейся на такой возможности. С этой целью рассмотрим композицию двух ***1***-мерных *бинарных* ***ГФП*** $\tau^{(2)}$, $\tau^{(3)}$, чьи ***ЛФП*** $\sigma^{(2)}$ определяются следующими параллельными подстановками, а именно:

$$\sigma^{(2)}(x,y) = x \vee y; \quad \sigma^{(3)}(x,y,z) = \begin{cases} x \oplus y \oplus z, & if\ x = 1 \\ z\quad, & if\ x = 0 \end{cases}; \qquad x,y,z,t \in B = \{0,1\}$$

$$\sigma^{(4)}(x,y,z,t) = \begin{cases} 0, & if\ < xyzt > \in \{0000,\ 0100, 1001, 1100\} \\ 1, & otherwise \end{cases}; \qquad \vee - disjunction; \oplus - XOR$$

Несложно убедиться, что для определенной таким образом ***ГФП*** $\tau^{(3)}$ имеет место соотношение: $c^{\infty}=(0101)^{\infty}$, $c^{\infty}\tau^{(3)}=\square$, т.е. ***C(B,1,∞)*** незамкнуто относительно отображения $\tau^{(3)}$. С другой стороны, можно убедиться, что для ***ГФП*** $\tau^{(4)}=\tau^{(2)}\tau^{(3)}$ не существует *бесконечных* ***КФ*** c^{∞} таких, что $c^{\infty}\tau^{(4)}=\square$, т.е. ***C(B,1,∞)*** *замкнуто* относительно отображения $\tau^{(4)}$. В то же всемя очевидно, для *незамкнутости* множества ***C(A,d,∞)*** относительно отображения $\tau^{(n)}$, необходимо *наличие* незамкнутости ***C(A,d,∞)*** относительно по крайней мере одного из отображений, определяемого ***ГФП*** $\tau^{(n_j)}$, составляющей декомпозицию глобальной функции $\tau^{(n)}$.

Таким образом, может быть сформулирован следующий очень интересный результат, а именно: ***Для того, чтобы ГФП*** $\tau^{(n)}$***, представимая в виде композиции следующего вида***

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\,\tau^{(n_2)}\,\tau^{(n_3)}\;.......\;\tau^{(n_k)} \qquad (n > d{+}1;\; n_j < n),$$

определяла глобальное отображение, относительно которого множество C(A,d,∞) является незамкнутым, необходимо (но не достаточно), чтобы по меньшей мере одна из функций $\tau^{(n_j)}$ ***(j=1..k), входящая в данное представление, определяла глобальное отображение, относительно которого будет иметь место незамкнутость множества C(A,d,∞) конфигураций.***

С вопросом однозначности решения ***d-ПДФ*** для некоторых типов ***ГФП*** тесно связано отсутствие положительного решения ***d-ПДФ*** в общем случае. Действительно, наличие ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, имеющих единственное представление вида ***(59)***, предполагает отсутствие этого представления для любой из функций, составляющих *композицию исходной* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, т.е. существование ***ГФП***, для которых ***d-ПДФ*** имеет *отрицательное* решение. Итак, именно отсутствие *положительного* решения ***d-ПДФ*** в общем случае обусловливает существование ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, допускающих единственное возможное положительное решение ***d-ПДФ***. Следовательно, каждый пример ***ГФП***, имеющей единственное решение ***d-ПДФ***, доказывает отрицательность решения в общем случае самой ***d-ПДФ***. Довольно интересные примеры такого типа ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ можно найти в наших работах [5,53-56,88,90,536].

Теперь мы переходим к обсуждению еще одного *алгебраического* подхода к исследованию ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ***, представляющего весьма значительный интерес для изучения *динамических* свойств классических ***d-ОС (d≥1)*** в целом. В данном же контексте будут передоказаны и некоторые ранее представленные результаты по проблеме декомпозиции, а также приведены новые результаты, полученные благодаря именно данному подходу. В основе данного подхода лежит возможность представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенной в алфавите ***A***, в форме полинома следующего общего вида, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j \pmod{a} \tag{60}$$

где $b_j \in A$ и Y_j есть переменная из множества $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ либо произведение степеней данных переменных. Один из основных результатов по ***a****-значным* логикам ***(a>2)*** гласит: ***Любая функция a-значной логики представима полиномом по (mod a) вида (60) тогда и только тогда, когда a – простое число.*** Данный результат оказывается довольно полезным не только для представления полиномами по ***(****mod* ***a) 1****-*мерных ***ЛФП***, определенных в алфавите ***A***. Его можно вполне успешно использовать и для ***d****-*мерных ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, представляя специальным образом индекс соседства ***X*** классических ***d-ОС (d ≥ 1)***. На наш взгляд, способ полиномиального представления ***ЛФП*** найдет достаточно широкое применение в математической теории ***ОС****-*моделей и ее многочисленных приложениях. Здесь же этот прием будет использован для дальнейшего исследования как *общей*, так и обобщенной проблем декомпозиции в классических ***d-ОС (d ≥ 1)***. Для более практического использования предложенного метода кратко рассмотрим вопрос *полиномиального представления* произвольной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенной в алфавите ***A***. Теоретической основой полиномиального представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ служит следующий основной результат [5,53,88].

<u>Теорема 146</u>. Любая ЛФП $\sigma^{(n)}$***, определенная в конечном алфавите A, представима полиномом над M* от n переменных степени не выше n*(a-1) тогда и только тогда, когда алгебраическая система M* = <A; +; x> является полем.***

Если ***a****-*число является простым, то поле ***M*=<A; +; x>*** также будет *простым*. Так как простое поле ***M**** *изоморфно* кольцу классов вычетов кольца целых чисел по ***(****mod* ***a)***, то в этом случае мы вполне можем ограничиться только представляющими полиномами по ***(mod a)***. Следует отметить, что при $a = p^k$ ***(p*** *– простое и* ***k > a*** *– любое целое)* алгебраическую систему ***M* = <A; +; x>*** также можно преобразовать в поле, вводя специфические операции сложения и/или умножения, но в таком случае представляющие ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ полиномы над таким ***M****-полем будут довольно неудобны для исследования в плане изучения свойств локальных функций. Поэтому в случае невозможности представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ полиномами по ***(****mod* ***a)*** в целом ряде случаев целесообразно применять несколько иные подходы. Один достаточно интересный пример алгебраической системы ***Q*** для полиномиального представления ***a****-*значных логических функций при ***a****-*составном приведен в теореме ***62*** и достаточно детально обсуждается в наших работах [5,84]. Задача полиномиальной представимости по ***(mod a) ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ имеет конструктивное решение для случаев ***a***-простого и ***a***-составного в среде вышеуказанной *алгебраической* системы [5,53-56,84], допуская эффективные компьютерные рализации, базирующиеся на следующем простом алгоритме.

Полином P_n ***(mod a)***, представляющий ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, имеет в общем случае следующий вид:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = P_n = \sum_{j=1}^{a^n} \varpi_j x_1^{j1} x_2^{j2} \ldots x_n^{jn} \pmod a; \quad j_k, \varpi_j, x_p \in A;\ j = 1..a^n;\ k, p = 1..n \tag{61}$$

Но тогда, используя метод *неопределенных* коэффициентов для определения значений ω_j, весьма несложно убедиться в возможности конструктивного способа решения задачи полиномиального представления произвольной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенной в алфавите $A=\{0,1,2,3,\ldots,a-1\}$ ***(a – простое)***. Действительно, подставляя в ***(61)*** упорядоченные всевозможные кортежи вида $<x_1,x_2,x_3,x_4, \ldots, x_n>$ значений переменных $x_p \in A$ ***(p=1 .. n)***, получаем неоднородную систему ***(62)*** *линейных* уравнений относительно неизвестных ω_j, имеющую матричное представление

$$WX = H \pmod a \tag{62}$$

где ***W*** – вектор-столбец неизвестных ω_j, ***H*** – вектор-столбец значений ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ на всевозможных кортежах $<x_1,x_2,x_3,x_4, \ldots, x_n>$ значений переменных $x_p \in A$ ***(p=1..n)*** и ***X – (jxj)***-матрица из значений по *(mod* ***a)*** на вышеуказанных кортежах.

Решение *линейной* системы ***(62)*** позволяет получать явное представление для произвольной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ в виде полинома P_n *(mod* ***a)***. Система представляет собой систему линейных алгебраических *сравнений*, которую можно трактовать как систему линейных алгебраических уравнений ***WX = H*** над конечным полем ***Z/(a)***, содержащим ***a*** элементов. Число решений такой системы сравнений будет *числом* рациональных точек ***Z/(a)*** алгебраического многообразия, определяемого системой уравнений ***(62)***. Поэтому, наряду с теоретико-числовыми методами к решению систем типа ***(62)*** высокого порядка можно применять методы алгебраической *геометрии*. В работе [53] предложен довольно простой параллельный алгоритм решения систем уравнений типа ***(62)*** на однородных вычислительных системах под *управлением* пакета параллельной обработки информации ***ПСОИ*** [11,12], разработанного еще в ***1980 г.*** в Эстонском филиале ***ВГПТИ ЦСУ СССР*** *(Таллинн)*.

С вопросом полиномиального представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ над полем ***A*** достаточно тесно связан и вопрос о приводимости данных полиномов над полем ***A***, т.е. возможности представления в виде произведения конечного числа более простых полиномов над полем ***A***, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \prod_1^k F_j(x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots, x_{j_n}); \quad j_n \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad (j = 1..p;\ p \le n)$$

В более общей постановке данный вопрос сводится к возможности представления полинома ***AK***, отвечающего некоторой ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенной в алфавите ***A***, в форме некоторой функции ***F*** более простых полиномов либо полиномов определенного типа над полем ***A***. Данный вопрос и представляет интерес как с точки зрения изучения целого ряда свойств ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ в классических ***ОС***-моделях, так и в плане практической реализации на их основе вычислительных и ряда иных дискретных конструкций различного назначения [536].

Проблема *разложимости* представляющих полиномов по *(mod* ***a)*** на множители непосредственно связана с вопросами изучения динамики классических ***ОС***-моделей алгебраическими методами. В частности, если для некоторой классической ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ представляющий ее полином допускает разложение следующего вида, а именно:

$$P(x_1,x_2,x_3, ..., x_n) = (x_j - b)^k P_1(x_1,x_2,x_3, ..., x_n) \pmod a; \quad j \in \{1,2, ..., n\}; \; b \in A \setminus \{0\}; \; k \geq 1$$

то соответствующая ей ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ классической ***1-ОС*** будет обладать неконструируемостью типов ***НКФ (НКФ-3)*** и/или ***НКФ-1***. Следовательно, вопрос приводимости представляющих ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ полиномов представляется достаточно важным средством анализа динамики классических ***d-ОС*** ***(d≥1)***. Однако, практическое использование его весьма затрудняется тем, что для произвольного числового поля ***A*** строение *неприводимых* над ***A*** полиномов весьма разнообразно и не существует каких-либо общих методов, устанавливающих *приводимость* либо *неприводимость* полиномов от ***n > 1*** переменных. Это, отчасти, может быть обусловлено тем моментом, что для каждого поля ***A*** существуют неприводимые над ним полиномы P_n от ***n > 1*** переменных любой наперед заданной степени. Поэтому для решения проблемы определения *приводимости* полиномов довольно часто приходится использовать весьма искусные приемы либо решать задачи динамики классических ***ОС***-моделей иными, более приемлемыми методами [5,15,53-56,82,88,90,536].

Среди множества *всех* полиномов над полем ***A*** можно выделять ряд интересных классов. Особую роль играют полиномы, в нормальной форме которых все слагаемые одночлены имеют одну и ту же степень относительно совокупности переменных. Такие *полиномы* называются *однородными* либо ***формами***. Интерес к формам объясняется их особым значением для целого ряда вопросов из различных областей математики, включая также области прикладного назначения. Изучение *форм* основывается обычно на том, что их выражения могут быть весьма существенно упрощены с помощью замены переменных, что позволяет весьма эффективно проводить изучение свойств соответствующих им ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ классических ***ОС***-моделей [5,15,53-56,74,82,88,90,536].

Еще один достаточно интересный класс составляют *симметрические* полиномы. Полином от ***n>1*** переменных над полем ***A*** называется *симметрическим*, если он не меняется при *любых обратимых* перестановках его существенных переменных. Известно, что множество ***SP*** всех симметрических полиномов от ***n*** переменных образует подкольцо кольца всех полиномов от ***n*** переменных над ***A*** полем. Для наших же целей особый интерес представляет случай, когда полином ***P*** над полем ***A*** представим сложной функцией в виде полинома от *симметрических полиномов*. При этом, *особую* роль играют симметрические полиномы над полем ***A***, называемые *элементарными* полиномами:

$$\boxed{\begin{array}{ll} p_k(x_1,x_2,...,x_n) = \sum\limits_{1}^{r} R_j(k,x_1,x_2,...,x_n); & r = C_n^k / k! \\ p_1(x_1,x_2,...,x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j; & p_n(x_1,x_2,...,x_n) = \prod\limits_{j=1}^{n} x_j \end{array}}$$

где $R_j(k,x_1,x_2,x_3, ..., x_n)$ есть всевозможные, различные с точностью до симметрии, размещения из элементов множества $\{x_1,x_2,x_3, ..., x_n\}$ по ***k***. В частности, элементарные полиномы $\{P_1, P_n\}$ имеют представленный выше вид. Как основной здесь можно сформулировать следующий результат:

Любой симметрический полином над полем A может быть представлен только единственным образом в форме полинома от элементарных симметрических полиномов P_k ***(k=1..n).***

Для практического решения этой задачи можно использовать известный метод неопределенных коэффициентов, применяя его к элементарным симметрическим полиномам, на которые будет разлагаться каждый симметрический полином. В частности, простой симметрический полином $S(x_1,x_2,x_3)=\Sigma X_j^3 \pmod a$ ***(j=1..3)*** имеет представление в форме $S(x_1,x_2,x_3) = P_1^3-3P_1P_2+3P_3 \pmod a$. Теория симметрических полиномов, в основе которой лежит приведенный основной результат, имеет *многочисленные* приложения в различных вопросах теории полиномов. Причины, которые объясняют роль *симметрических* полиномов, лежат достаточно глубоко и обнаруживаются лишь при изучении свойств автоморфизмов алгебраических полей. И в контексте ***ТОС***-проблематики симметрические полиномы, определяющие симметричные ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ {***ГФП*** $\tau^{(n)}$} *классических* ***ОС***-моделей, также представляют повышенный интерес, ибо такого типа модели при определенных условиях обладают, в частности, свойством *универсальной* либо *существенной* воспроизводимости по Муру конечных ***КФ***. Наряду с этим ***ОС***-модели с *симметричными* ***ГФП*** представляют особый как сугубо теоретический, так и прикладной интерес в науках биологических, математических, физических и вычислительных, а также в ряде других приложений [5,54,88,90,536,567].

Класс *элементарных симметрических полиномов* ***(ЭСП)*** от ***n*** переменных над полем ***A*** достаточно тесно связан с проблемой декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в классических ***ОС***-моделях. Обозначим класс ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ классических ***1-ОС***, чьи ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ представимы ***ЭСП***, через $\Psi(n,a)$. Нетрудно убедиться, что каждая ***ГФП*** $\tau_j^{(n)}\in\Psi(n,a)$, кроме первой (P_1) и последней (P_n), имеет по меньшей мере общее представление следующего вида, а именно:

$$\boxed{\begin{gathered}\tau_j^{(n)}=\tau_1^{(n-j+1)}\tau_j^{(j)};\quad \tau_j^{(n)}\in\psi(j,a);\quad \tau_1^{(n-j+1)}\in\psi(n-j+1,a)\\ \sigma_1^{(n-j+1)}(x_1,x_2,...,x_{n-j+1})=\sum_1^{n-j+1}x_k\ \ (mod\,a);\quad \sigma_j^{(j)}(x_1,x_2,...,x_j)=\prod_1^{j}x_k\ \ (mod\,a)\quad (1<j<n)\end{gathered}}$$

Вопрос представимости первой ***ГФП*** $\tau_1^{(n)}$ из множества $\Psi(n,a)$ довольно детально обсуждался в разделе ***7.1***. А так как произведение есть своего рода аналог операции сложения, то результаты для функции $\tau_1^{(n)}\in\Psi(n,a)$ достаточно легко распространяются и на функцию $\tau_n^{(n)}\in\Psi(n,a)$. Для каждого целого $n\geq 2$ ***ГФП*** $\tau_1^{(n)}$ и $\tau_n^{(n)}$ будем называть ***базисными*** функциями множества $E(n,a)$ *всех симметричных* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ от не выше, чем ***n*** переменных в алфавите ***A***. Следовательно, каждая ***ГФП*** $\tau_j^{(n)}\in E(n,a)$, кроме самих базисных, представима в виде *композиции* двух базисных функций $\tau_1^{(n-j+1)}\tau_j^{(j)}$ $(1<j<n)$. Между тем, произвольная базисная функция из множества $E(n,a)$ не всегда представима в виде композиции более простых базисных функций. Вышесказанное и позволяет сформулировать следующий достаточно интересный результат [5,53-56,82,88,90,536].

<u>Теорема 147</u>. Каждая ГФП $\tau^{(n)}\in E(n,a)$, кроме самих базисных, представима в форме композиции $\tau_1^{(n-j+1)}\tau_j^{(j)}$ $(1<j<n)$ двух более простых базисных функций. Произвольная базисная функция из множества $E(n,a)$ не всегда имеет подобное представление.

Вышепредложенный метод *полиномиального представления* ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ от ***n*** переменных над полем $A=\{0,1,2,\ ...,\ a-1\}$ при простом числе ***a*** естественно распространяется и на бинарный случай $(a=2)$, Действительно, любая бинарная ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ является булевой функцией, сохраняющей константу ноль. Для дальнейшего изложения нам понадобится ряд понятий и определений.

<u>Определение 29</u>. Элементарную конъюнкцию будем называть монотоной, если она не содержит отрицаний переменных; формула следующего общего вида, а именно:

$$P(x_1,x_2,x_3,...,x_n)=\sum_{k=1}^{s}\Theta_k\quad (mod\ 2)$$

где Θ_k $(k=1\ ..\ s)$ – попарно различные монотонные элементарные конъюнкции над множеством всевозможных бинарных кортежей $<x_1,x_2,...,x_n>$, представляет полином Жегалкина. При этом, наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в такой полином, будем называть степенью полинома Жегалкина.

Из теории булевых функций хорошо известно, что каждая булева функция представима в виде соответствующего полинома ***Жегалкина***, т.е. любая *бинарная* ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ однозначно представима полиномом ***Жегалкина*** от ***n*** переменных степени не выше ***n***. При этом, для создания полинома ***Жегалкина***, реализующего произвольную бинарную ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, используется ряд методов, среди которых можно выделить метод неопределенных коэффициентов, подобный случаю ***а***-значных логик. Иной метод, предложенный в работе [53] и имеющий компьютерную реализацию, может служить основой также и для доказательства возможности представления произвольной булевой функции полиномом ***Жегалкина***.

В более общей постановке следует иметь в виду, что *бинарные* ***ОС***-модели удобнее всего изучать в рамках так называемой *алгебры* ***Жегалкина***, являющейся разновидностью алгебры логики [326]. Это объясняется тем простым фактом, что в алгебре ***Жегалкина*** любая функция алгебры логики от ***n*** переменных однозначно представима приведенным полиномом от переменных x_k не выше первой степени, тогда как *коэффициенты* c_k полинома являются элементами *бинарного* поля $\{0,1\}$ $(k=1..n)$. Операции над приведенными полиномами производятся аналогично случаю обычных полиномов с целочисленными коэффициентами. И именно такая близость алгебры ***Жегалкина*** обычной элементарной *алгебре полиномов* объясняет ее преимущества с методологической точки зрения, а также упрощает ряд исследований *бинарных* ***ЛФП***, представимых такими полиномами. Более того, алгебра ***Жегалкина*** допускает естественное обобщение на случай ***а***-значных логик, если ***а*** – степень *простого* числа. Это позволяет довольно эффективно применять аппарат теории полиномов над конечными полями к исследованиям как ***а***-значных логик, так и ***d-ОС*** $(d \geq 1)$ для случае более общих типов алфавита ***А*** их внутренних состояний.

Рассмотрим множество ***SVG*** всех *симметрических* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ $(n \geq 2)$, определенных в произвольном алфавите ***А*** и не обладающих неконструируемостью типов ***НКФ*** и ***НКФ-3***. В этом случае просто убедиться, что множество ***SVG*** образует *полугруппу* относительно операции композиции. Тогда согласно гипотезы, сформулированной в разделе ***3.2***, каждая ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ множества ***SVG*** обладает свойством *универсальной* воспроизводимости; ***ГФП*** $\tau^{(2)} \in SVG$ определяется ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ следующего вида $\sigma^{(2)}(x_1,x_2)=x_1+x_2 \ (mod\ a)$; $x_1, x_2 \in A=\{0,1,....,a-1\}$ $(a \geq 2)$. Следовательно, для каждого целого $m \geq 3$ существуют ***ГФП*** $\tau^{(m)} \in SVG$, представимые композицией $\tau^{(m)}=\tau^{(m-1)}\tau^{(2)}$, где $\tau^{(2)},\tau^{(m-1)} \in SVG$. Но с другой стороны, можно показать ***ГФП*** $\tau^{(n)} \in SVG$, определяемые *линейными* ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ следующего вида $\sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_n)=\Sigma_k x_k \ (mod\ a)$, не представимы в виде композиции более простых функций из множества ***SVG***. Следовательно, ***SVG***-полугруппа ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ не будет иметь конечной системы образующих элементов.

Для установления факта обладания произвольной *классической* структурой ***1-ОС***, заданной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, свойством универсальной *воспроизводимости* (*ввиду сказанного и упомянутой гипотезы*) можно использовать следующий конструктивный алгоритм. Очевидно, симметричность произвольной ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ устанавливается конструктивно. Также конструктивно устанавливается *выполнение* для нее следующих базовых соотношений, а именно:

$$(\forall <x_1x_2 \ldots x_{n-1}>)(\forall x, y \in A)(x \neq y \Rightarrow \sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_{n-1},x) \neq \sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_{n-1},y)) \qquad (63)$$

Если ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ удовлетворяет *соотношениям* ***(63)***, то согласно определения ***7*** соответствующая ей ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ не будет обладать парами ***ВСКФ***, а значит (*согласно теореме* ***18***) и неконструируемостью типов ***НКФ*** и ***НКФ-3***. С другой стороны, на основе соотношений ***(63)*** легко убедиться, что имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:

$$(\forall <x_1x_2 \ldots x_{n-1}>)(E!x)(\sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_{n-1},x) = 0),$$

на основе которого легко доказывается возможность построения на основе ненулевого кортежа $<x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n>$ такого, что $\sigma^{(n)}(x_1,x_2, ..., x_{n-1},x_n) = 0$ (*ввиду указанных условий*), бесконечной вправо ***КФ*** $c^\infty \in C(A,1,\infty)$ такой, что будет справедливым следующее *определяющее* соотношение $c^\infty\tau^{(n)}=\square$:

$$\tau^{(n)}:\quad \begin{array}{l} c^{\infty} = \overbrace{x_1 x_2 x_3 \,........\, x_{n-1} x_n}\, x_{n+1} x_{n+2} \,..... \\ \qquad\ \Downarrow \\ \square = \underbrace{0\ 0\ 0\ 0 ....}0......... \end{array}$$

Следовательно, согласно теоремы **29** определенная вышеуказанным способом *классическая* ***1-ОС*** будет обладать *неконструируемостью* типа ***НКФ-1***. Другой способ доказательства, который имеет и самостоятельный интерес, сводится к следующему. Для классических ***1-ОС*** с *симметрическими* ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, удовлетворяющими *соотношениям* ***(63)***, будут иметь место следующие определяющие соотношения, а именно:

$$(\forall x \in A \backslash \{0\})(\sigma^{(n)}(0, 0, 0, ..., 0, x) = \sigma^{(n)}(x, 0, 0, 0, ..., 0) \neq 0)$$

на основе которых легко убедиться в том, что для любой ***КФ*** $c \in C(A,\phi)$ ***ГФП*** структуры *генерирует* последовательность $<c>[\tau^{(m)}]$ конфигураций строго возрастающей длины. Из данного факта, в частности, следует обладание структурой *неконструируемостью* типа ***НКФ-1*** при отсутствии для нее ***НКФ*** и ***НКФ-3***. Согласно вышеуказанной гипотезе множество ***Art*** симметрических ***ГФП*** $\tau^{(m)}$, ***ЛФП*** $\sigma^{(m)}$ которых удовлетворяют соотношениям ***(63)***, обладает общим свойством *универсальной воспроизводимости* конечных ***КФ*** и образует полугруппу относительно операции *композиции*, не имеющую конечной системы образующих. Сказанное завершает доказательство существования *конструктивного* алгоритма, который позволяет по виду ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ классической структуры ***1-ОС*** идентифицировать принадлежность ее к множеству ***SVG*** структур, обладающих обобщающим свойством универсальной воспроизводимости конечных ***КФ***. Однако, следует иметь в виду, что данный алгоритм не позволяет исчерпывающе идентифицировать все множество ***SVG***, требуя дополнительного исследования. Требование обязательности отсутствия для классической ***1-ОС*** с симметрическими ***ГФП*** $\tau^{(m)}$ неконструируемости ***НКФ***-типа действительно актуально ввиду наличия такого типа структур. В частности, классическая ***1-ОС***, определенная симметрической бинарной ***ЛФП*** $\sigma^{(3)}$ с системой параллельных подстановок простого вида, а именно:

$$000 \Rightarrow 0 \quad 001 \Rightarrow 1 \quad 010 \Rightarrow 0 \quad 011 \Rightarrow 1 \quad 100 \Rightarrow 1 \quad 101 \Rightarrow 1 \quad 110 \Rightarrow 1 \quad 111 \Rightarrow 1$$

с индексом соседства $X=\{0,1,2\}$, обладает парами ***ВСКФ***, а значит и ***НКФ***, что исключает для нее возможность обладания свойством универсальной воспроизводимости.

На основе соотношений ***(63)*** может быть сформулирован результат [54-56], полезный во многих исследованиях классических структур ***1-ОС***, а именно:

Классическая 1-ОС, определенная в произвольном алфавитае A и с индексом соседства X, ЛФП $\sigma^{(n)}$ ***которой удовлетворяет соотношениям (63), будет обладать неконструируемостью типа НКФ-1 при отсутствии для нее неконструируемости типов НКФ и НКФ-3.***

Используя возможность полиномиального представления произвольной ***ЛФП***, определенной в алфавите $A=\{0,1,2,3,...,a-1\}$ (***a*** – *простое либо* ***a = 2***), можно не только передоказать, обобщить либо уточнить целый ряд ранее полученных по проблеме декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(m)}$ результатов, но и существенно продвинуть исследования в этом направлении. Так, на основе исследования класса ***GSAK ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, представимых полиномами в следующей форме:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = g \sum_{k=1}^{k=n} x_k \qquad (mod\ a), \qquad g \in A$$

над полем ***A***, и класса всех бинарных ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, представимых полиномами ***Жегалкина***, можно получить следующий основной результат, выражаемый теоремой [5,53,88,90].

Теорема 148*. При простых a и n любая ЛФП $\sigma^{(n)} \in GSAK$ непредставима в форме суперпозиции из конечного числа более простых функций в том же самом алфавите A={0,1, ..., a-1}. Для каждого простого $n \geq 2$ существует бинарная локальная функция $\sigma^{(n)}$, не представимая суперпозицией конечного числа более простых ЛФП $\sigma^{(n_j)}$ в том же самом бинарном алфавите B структуры.*

Из доказательства данной теоремы следует, что на основе представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ полиномами по ***(****mod* ***a)***, кроме случая *составного* числа ***a***, можно получать *конструктивные* решения проблемы декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(m)}$ без использования вышерассмотренного понятия базиса. Более того, на основе данной теоремы легко доказывается само отсутствие конечного *базиса* для множества всех глобальных функций $\tau^{(n)}$ ***d-ОС*** ***(****d* $\geq$ ***1)***. С учетом сказанного получаем общий критерий решения *проблемы декомпозиции* произвольной ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определенной в *конечном* алфавите ***A (a –*** *простое)* [5,53-56,82,88,90,536,567].

Теорема 149*. ГФП $\tau^{(n)}$ представима композицией из конечного числа более простых глобальных функций в том же алфавите A тогда и только тогда, когда соответствующий ей полином P_n (mod a) может быть представлен суперпозицией полиномов следующего общего вида, а именно:*

$$P_{n_k}(P_{n_{k-1}}(P_{n_{k-2}} \;.....\; (P_{n_1}) \;.....\;))) \quad (mod\ a); \qquad n_j < n,\ j = 1..k$$

Однако, метод решения проблемы декомпозиции на основе данного критерия при достаточно большом числе переменных содержит в себе, порой, непреодолимые сложности, хотя в простых случаях может оказаться очень эффективным средством [15,53-56]. Так как предложенный метод исследования ***ОС***-моделей базируется на основе полиномиального представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ над полем ***A***, то в дальнейшем под алфавитами A_p и A_c будем понимать множество ***A***={***0,1,2,3, ..., a-1***} соответственно с *простым* и *составным* числом ***a***. Все до сих пор сказанное относительно данного алгебраического подхода относится именно к алфавиту A_p. Представим теперь ряд интересных результатов по общей ***(d-ПДФ)*** и обобщенной ***(d-ОПДФ)*** проблемам *декомпозиции* ***ГФП***, которые были получены на основе полиномиального представления соответствующих им ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ над полем A_p [54-56,88,90,536,567].

Теорема 150*. В общем случае произвольной глобальной функции перехода $\tau^{(n)}$ проблема d-ОПДФ имеет отрицательное решение, исключая сугубо тривиальные случаи.*

Из представленного результата следует, что снятие ограничений на входящие в декомпозицию ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ функции в представлении ***(59)*** не изменяет, в общем случае, отрицательности решения проблемы такого типа декомпозиции. Так как в общем случае две проблемы ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** неэквивалентны, то следующий результат представляет особый интерес и, прежде всего, с точки зрения теоретических исследований однородных структур [5,53-56,82,88,90,536,567].

Теорема 151*. Если для некоторой d-мерной ГФП проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ эквивалентны, то для нее обе они также и алгоритмически разрешимы.*

Рассмотрение проблемы декомпозиции во всей ее общности для ***ГФП***, определенных в алфавите A_p, позволяет получить следующий важный результат [5,54-56,88,90,536,567].

Теорема 152*. Для каждой d-мерной ГФП $\tau^{(n)}$, определенной в алфавите A_p, две проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ эквивалентны и алгоритмически разрешимы.*

Результат теоремы ***152*** позволяет получать ответы на ряд вопросов, поставленных в работе [53]. Более того, результаты теорем ***151*** и ***152*** показывают, что структура алфавита ***A*** для ***ОС***-модели имеет весьма существенное значение для вопроса эквивалентности проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ***. А именно, для случая алфавита A_p имеет место эквивалентность и разрешимость *обеих* проблем, тогда как в общем случае алфавита A_c эти проблемы, вообще говоря, неэквивалентны, а вопрос их разрешимости был рассмотрен выше на иной основе. На основе результатов теорем ***125*** и ***126*** можно доказать следующий важный результат, позволяющий в значительной *степени* прояснять взаимосвязь решения проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** для общего случая алфавита ***A=***{***0,1,2,3, ..., a-1***} ***(a – простое)***. Данный результат дает конструктивное решение обоих проблем *декомпозиции* ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ классических ***ОС***-моделей [5,54-56,82,88,90,536,567].

Теорема 153. Для произвольной d-мерной ГФП $\tau^{(n)}$, определенной в алфавите A_p, обе проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ имеют положительные решения только тогда, когда их исходные функции $\tau^{(n)}$ представимы в форме композиции $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\tau^{(q)}$ (m, q < n; m + q-1 = n) из двух более простых d-мерных функций, определенных в том же самом алфавите A_p внутренних состояний.

Непосредственно с вопросами общей проблемы декомпозиции абстрактных автоматов связана и проблема оптимизации, которая в случае классических ***ОС***-моделей имеет *два* основных аспекта, а именно: ***(1) декомпозиция произвольной ГФП на конечное число наиболее простых функций, и (2) декомпозиция произвольной ГФП на минимальное число более простых функций.*** Несложно убедиться, при наличии конструктивного разрешающего алгоритма (теорема ***153***) второй аспект проблемы минимизации имеет положительное решение, тогда как первый требует дальнейших исследований. Между тем, из теоремы ***153*** можно получить следующий достаточно интересный результат [54-56,88,90].

Теорема 154. Для любого целого $n \geq 3$ существуют d-мерные ГФП $\tau^{(n)}$, определенные в алфавите A_p, для которых обе проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ эквивалентны, имея отрицательное решение.

Данный результат представляет еще одно доказательство отрицательности решения как ***d-ПДФ***, так и ***d-ОПДФ*** в общем случае. При этом, на основе доказательства теоремы ***154*** можно решить довольно интересный вопрос об оценке числа ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определенных в алфавите A_p, проблемы ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** для которых имеют положительные решения. Исследование данного вопроса резюмирует нижеследующий основной результат, представляющий и самостоятельный интерес для ***ТОС***-проблематики в целом [5,54-56,71-75,88,90,536].

Теорема 155. Для «почти всех» d-мерных ГФП $\tau^{(n)}$, определенных в алфавите A_p, обе проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ имеют отрицательное решение.

Таким образом, получаем довольно неожиданный результат, а именно:

Доля всех d-мерных ГФП, определенных в алфавите A_p и допускающих положительные решения как d-ПДФ, так и d-ОПДФ, равна нулю.

Следовательно, относительно операции *композиции* множество всех ***d***-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, которые определены в алфавите A_p, оказывается довольно четко *дифференцированным* и имеет достаточно хорошие предпосылки для определения в нем соответствующей иерархии сложности входящих в него глобальных функций перехода ***d-ОС*** ($d \geq 1$).

7.4. Проблема сложности глобальных функций перехода в классических ОС-моделях

Из наших предыдущих результатов исследования ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** можно относительно легко установить, что среди всех ***d***-мерных ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ($n \geq 2$), определенных в алфавите A_p, относительно проблем декомпозиции имеет место бесконечная иерархия сложности ***ГФП*** $\tau^{(n)}$. Будем говорить, что ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ находится на ***s-уровне сложности*** [*обозначение:* $\tau^{(n)} \in L(s)$] тогда и только тогда, когда для нее существует представление следующего определяющего вида, а именно:

$$\tau^{(n)} = \tau_1^{(n_1)}\tau_2^{(n_2)}\tau_3^{(n_3)} \;.....\; \tau_k^{(n_k)} \qquad (n_j \le s < n) \quad (\exists j)(n_j = s)$$

и отсутствует аналогичное представление $\tau^{(n)}$ при условии $(\exists j)(n_j > s)$ $(j=1..k)$. При этом, если для некоторой ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ ***d-ПДФ (d-ОПДФ)*** имеет отрицательное решение, то такую функцию будем относить к классу ***L(n)-сложности.*** С учетом представленных выше результатов, определений, а также доказательства теоремы ***155*** можно получить следующие асимптотические соотношения, имеющие целый ряд важных приложений в ***ТОС***-проблематике [54-56,73]:

$$(\forall s \ge 2)(\# L(s) > 0); \quad \lim_{s \to \infty} \# L(s) / a^{a^s} \ge 1 \qquad (a - \text{prime number})$$

где #G – мощность произвольного конечного множества G

При этом, на базе теоремы ***152*** и определения понятия сложности ***d***-мерных ***ГФП*** относительно проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** имеет место следующий весьма важный результат по разрешимости уровней сложности глобальных функций перехода *классических* ***ОС***-моделей [54-56,73], который представляет, прежде всего, теоретический интерес при исследовании алгоритмических свойств динамики классических ***d-ОС***, как концептуальных моделей пространственно-распределенных динамических систем [79,88,90,536,567].

Теорема 156. Проблема определения принадлежности произвольной d-мерной ГФП, определенной в алфавите A_p, к s-уровню сложности алгоритмически разрешима.

На основе введенного нами понятия сложности ***ГФП*** относительно проблемы ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** можно получать интересные характеристики глобальных функций $\tau^{(n)}$. Из приведенных выше результатов видно, что мы существенно использовали алгебраические свойства алфавита A_p, так как любая ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ может быть однозначно представлена полиномом по ***(mod a)*** максимальной степени ***n(a-1)*** над полем A_p, и наоборот [10,54-56]. Тогда как в случае *общего* алфавита A_c далеко не каждую ***ЛФП***, определенную в такого типа алфавите, можно представить в полиномиальной форме вышеуказанного вида. А именно, имеет место следующий основной результат [5,54-56,73-75,88,90,536,567].

Теорема 157. Для произвольного алфавита $A_c = \{0,1,...,a-1\}$ доля (H) локальных функций перехода $\sigma^{(n)}$ классических структур d-ОС ($d \ge 1$), определенных в такого типа алфавите и допускающих полиномиальные представления по (mod a), удовлетворяет нижеследующему определяющему соотношению, а именно:

$$\frac{1}{a^{a^n - 4^n}} \le H \le \frac{1}{a^{a^n - (a-2)^n}}$$

Из данного результата следует, что для случая составного ***a*** «*почти все*» ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенные в алфавите A_c, не представимы в полиномиальной форме по ***(mod a)*** для достаточно больших значений параметров ***n*** и/или ***a***. В этой связи нами был сформулирован следующий вопрос [53]: ***Возможно ли определить такую алгебраическую систему S, в рамках которой допускалось бы полиномиальное представление произвольной ЛФП, определенной в алфавите A_c?*** В результате проведенного анализа был предложен пример данного типа алгебраической системы ***(АС)*** [5,84] (*теорема* ***62***), в которой «*почти все*» ***ЛФП***, определенные в алфавите A_c, однозначно представимы полиномами по ***(mod a)***. На основе доказательств теорем ***151, 152*** и теоремы ***62 (34)*** был получен следующий интересный результат относительно проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** в случае общего A_c алфавита внутренних состояний единичных автоматов ***d-ОС*** [5,54-56,73-75,79], представляющий большой теоретический интерес для ***ТОС***-проблематики в целом, а именно.

<u>Теорема 158</u>. Относительно «почти всех» ГФП $\tau^{(n)}$, определенных в алфавите A_c, чьи ЛФП $\sigma^{(n)}$ допускают полиномиальные представления в виде (34), проблемы d-ПДФ и d-ОПДФ являются эквивалентными и алгоритмически разрешимыми.

Итак, на основе теорем ***62*** и ***158*** вышепредставленные результаты исследования проблем ***d-ПДФ*** и ***d-ОПДФ*** распространяются на «*почти все*» ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определенные в алфавите A_c. Однако, не взирая на это, мы не можем пока распространить полученные в этом направлении результаты и на общий случай алфавита ***A***, что потребует дополнительных исследований. Завершая на этом рассмотрение основных результатов по проблеме декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в классических ***d-ОС*** ***(d ≥ 1)***, кратко обсудим ряд вопросов, представляющих интерес для дальнейших исследований в данном направлении.

Наряду с предложенным выше алгебраическим методом исследования в ***ТОС***-проблематике на основе полиномиального представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ к их формальным исследованиям могут быть успешно привлечены методы и результаты по алгебраической теории *многозначных* логик [327], в частности, итеративные алгебры Поста. В этом направлении интересным было бы определить и исследовать класс ряда нетрадиционных алгебраических систем, в рамках которых возможны удовлетворительные представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, определенных в произвольном алфавите ***A***. Так, в частности, в качестве элементов алфавита ***A*** можно выбирать некоторые объекты, исследуемые в алгебраической теории чисел (*круговые целые, дивизоры и др.*), а также использовать результаты и методы развитой алгебраической теории чисел [328,536,567].

Наряду с представлением ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, базирующимся на операции композиции, интересен также и целый ряд других представлений, довольно полезных во многих теоретических исследованиях классических ***d-ОС (d≥1)*** и их прикладных аспектов. Так, один пример подобного представления рассмотрен в работах [53-56], где для ***ГФП*** определена новая операция ⊕-*сложения*, относительно которой множество всех глобальных функций $\tau^{(n)}$ ***(n ≥ 2)*** образует конечную *аддитивную* группу с нулевым элементом. Введение этой операции ⊕-сложения позволяет расширить возможности представления ***ГФП*** через более простые функции, ибо обычная операция композиции не дает возможности в общем случае получать положительные решения ***d-ПДФ/d-ОПДФ*** для довольно широкого класса глобальных функций. Поэтому было бы весьма интересным определить такой набор возможно наиболее простых операций (*максимально учитывающих специфику параллельного функционирования наряду с основными прикладными аспектами классических* ***d-ОС***), которые давали бы возможность получать для каждой либо «*почти всех*» ***ГФП*** конечные представления их через более простые либо базовые глобальные функции перехода $\tau^{(n)}$ ***(n ≥ 2)***.

Проблема декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ имеет место также для *других* интересных типов ***ОС***-моделей. В частности, для однородных структур на разбиении (***ОСнР;*** см. раздел ***1.2***) ***d-ПДФ*** аналогично классическим структурам имеет в общем случае отрицательное решение, что подтверждается и целым рядом примеров [90]. Однако более детальное исследование данной *проблемы* для случая структур ***ОСнР*** встречает определенные затруднения, связанные, в первую очередь, с блочной переразметкой их Z^d-пространства [536,567].

Отметим, на *абстрактном* уровне *декомпозиция* сложной ***ОС***-модели соответствует параллельной, последовательной либо смешанной работе более простых однородных структур, т.е. сводится к разложению исходной ***ОС***-модели по операциям умножения, сложения, суперпозиции либо по некоторым иным, полезным с теоретической или прикладной точек зрения, операциям. Задать некоторую операцию на множестве ***ОС***-моделей – значит указать правило, по которому любым двум моделям из этого множества ставится в соответствие третья модель из этого же множества, тогда как равенство ***ОС***-моделей почти всегда понимается с точностью до изоморфизма. В этой связи возможно рассматривать несколько видов декомпозиции ***ОС***-моделей, что в определенной степени и было сделано в настоящей главе. Проблема *декомпозиции* в общем случае ***ОС***-моделей представляет большой интерес со многих точек зрения, но прежде всего она интересна в случае исследования ***ОС***-моделей как самостоятельного *формального* объекта наряду с использованием ***ОС***-концепции в качестве основы вычислительных моделей высокопараллельных вычислений и обработки информации. Не меньший интерес представляет она и при использовании ***d-ОС*** в качестве среды биологического и физического моделирований.

Наряду с рассмотренной операцией композиции глобальных функций перехода в ряде случаев целесообразно рассматривать и иные операции, например, операцию ⊕–*суммирования конечного* числа ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, определенных в алфавите ***A***={***0,1,2, ..., a-1***}. Не нарушая общности, рассмотрим ***1***-мерный случай и определяем ⊕-операцию суммирования ***ГФП*** следующим образом. Алфавит ***A**** состояний ***1-ОС*** структурируется на ***p***-уровнях (*по числу слагаемых*), а ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ с индексом ***X*** соседства ***X***={***0,1,2, ..., n***} определяется следующими параллельными подстановками, а именно:

$$\begin{bmatrix} x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1 \\ x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_1^p x_2^p \dots x_n^p \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1^{(n)}(x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1) \\ \sigma_2^{(n)}(x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma_p^{(n)}(x_1^p x_2^p \dots x_n^p) \end{bmatrix} \qquad A^* = \left\{ \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^p \end{bmatrix} \equiv \left[y^1 / y^2 / \dots / y^p \right] \middle| \, y^j \in A;\ j = 1..p \right\}$$

Очевидно, *представленная* таким образом структура имеет алфавит мощности **#*A****=***a^p^***, в котором [***0/0/0/.../0***] определяется состоянием покоя. Несложно убедиться, относительно каждой ***КФ*** вида **<*0/0/.../c^j^/.../0*>** {$c^j \in C(A,1,\phi)$} определенная этим образом структура отражает *динамику* структуры-слагаемого с ***ГФП*** $\tau_j^{(n)}$ (***j=1..p***). Следовательно, структура, определяемая ⊕–суммой $\tau_1 \oplus \tau_2 \oplus ... \oplus \tau_p$, обладает *всеми* свойствами, присущими каждой структуре-слагаемому, а также набором свойств, определяемых совокупным действием слагаемых, ее составляющих. Например, пусть некоторая ***ГФП*** τ_1 из ***КФ*** $c_0 \in C(A,1,\phi)$ генерирует *периодическую* последовательность конфигураций с неким периодом d_1, а ***ГФП*** τ_2 из ***КФ*** $c_1 \in C(A,1,\phi)$ – *периодическую* последовательность с *периодом* d_2. Тогда ***ГФП*** $\tau_1 \oplus \tau_2$ из ***КФ*** $<c_0 / c_1>$ будет дополнительно генерировать *периодическую* последовательность ***КФ*** с *периодом* $d=HOK(d_1,d_2)$, где ***НОК*** – наименьшее общее кратное. В работе [54] представлены более сложные и интересные примеры применения ⊕–операции наряду с целым рядом других *операций* над глобальными функциями перехода. На этом завершается обсуждение полученных нами основных результатов по проблеме декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в классических ***ОС***-моделях, в основе своей и решающих данную проблему, и определяющих целый ряд довольно интересных вопросов для дальнейшего исследования в этом направлении.

7.5. Специальные вопросы исследований в ТОС-проблематике

В предыдущих разделах книги рассматривались наиболее общие и фундаментальные вопросы *динамики* классических ***ОС***-моделей, однако в ***ТОС***-проблематике существует целый ряд и более специальных вопросов, представляющих в той либо иной степени и самостоятельный интерес. В данном разделе рассматриваются некоторые из такого типа вопросов; при этом, при отнесении рассматриваемых вопросов к классу *специальных* мы руководствовались не только своими вкусом и личными симпатиями, но и сложившейся к настоящему времени определенной традицией в данном направлении [536].

Исследование ***ГФП*** и *сохраняемых* ими свойств конфигураций мотивируется как разнообразием прикладных аспектов *классических* структур ***d-ОС*** (***d*** ≥ ***1***), так и различного рода теоретическими рассмотрениями. Установление класса ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, сохраняющих заданное свойство ***ОС***-модели, в определенной мере характеризует как сабственно само это свойство, так и помогает получать по нему интересные результаты. С другой стороны, зная, что определенная ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ или целый их класс сохраняют некоторое множество свойств соответствующих им ***d-ОС*** ***(d≥1)***, можно получать определенную характеристику таких глобальных параллельных преобразований. В частности, ***Т. Остранд*** [133] изучал вопрос *сохранения* глобальным $\tau^{(n)}$-преобразованием некоторых свойств конфигураций, где под ***свойством*** понималось некоторое подмножество множества ***C(A,d)*** всех ***КФ***, допускаемых *классической* структурой ***2-ОС***. В основу данного исследования было положено следующее понятие сохранимости свойства: ***Свойство G сохраняется ГФП, если множество G замкнуто относительно*** $\tau^{(n)}$***-преобразования, определяемого данной ГФП.*** Основной задачей в данном вопросе является установление хорошо структурированных классов ***ГФП***, сохраняющих заданные свойства, представляющие интерес с той или иной точки зрения. Изучаемые в рамках данной проблематики сохраняемые свойства включают специальные множества конечных ***КФ***, периодичность, палиндромы, инвариантные относительно отображений диэдральной группы квадрата **2**-мерные конфигурации и целый ряд других [536].

В более общей постановке под *сохраняемыми* понимаются такие свойства *классических* ***d-ОС (d≥1)***, как универсальные воспроизводимость и вычислимость, специальные типы динамики *конечных* конфигураций. Классы ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, *сохраняющие* некоторые из вышеотмеченных свойств, являются подмножествами множества ***T*** всех глобальных функций $\tau^{(n)}$, симметричных функций, а также функций, определяемых в терминах отображений диэдральных групп. В данном направлении получен целый ряд достаточно интересных результатов, однако остается еще немало открытых вопросов для дальнейших исследований [133].

Вторая группа вопросов прямо связана с исследованиями специфических классов параллельных глобальных преобразований $\tau^{(n)}$ и конфигураций в классических ***ОС***-моделях. В этом контексте можно определить целый ряд интересных классов ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ и исследовать такие динамические, конструктивные и иные свойства ***d-ОС***, которые сохраняются глобальными преобразованиями, определяемыми данными ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$. Довольно интересные вопросы возникают в связи с задачей определения влияния типа ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ на структуру генерируемых ***d-ОС (d ≥ 1)*** конфигураций, на структуру неконструируемых конфигураций и т.д. И это тем более интересная и важная задача, что она позволяет в значительной степени прояснять само влияние параллельного локального взаимодействия единичных автоматов на глобальную динамику классических ***ОС***-моделей, что весьма важно, в первую очередь, для различного рода приложений ***ОС***-моделей [536].

Исследование свойств специальных типов конфигураций в *классических* ***ОС***-моделях (*пассивных*, *периодических*, *исчезающих и т.д.*) представляет собой как сугубо специфический, так и того либо иного уровня общий интерес для ***ТОС***-проблематики. Так, *пассивные* ***КФ*** играют важную роль в том случае, когда классические ***ОС***-модели рассматриваются в качестве *параллельных* алгоритмов переработки слов в конечных алфавитах и при погружении в них различного рода процессов и объектов. Ряд вопросов, связанных с пассивными и другими ***КФ***, рассматривался в предыдущих главах монографии. Исследования в данном направлении продолжаются.

С точки зрения исследования стабильных траекторий динамики *классических* ***d-ОС (d ≥ 1)*** вполне определенный интерес представляют периодические конечные ***КФ***. Из теоремы ***97*** следует, что в общем случае проблема определения того, будет ли произвольная начальная ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ периодической в классической ***ОС***-модели алгоритмически неразрешима. Нетрудно убедиться, что подобно случаю *пассивных* ***КФ***, при наличии в классической ***ОС***-модели периодических ***КФ*** с минимальным ***p***-периодом их множество бесконечно, и в нем существуют периодические ***КФ*** сколь угодно большого размера с тем же ***p***-периодом. Более того, если в ***ОС***-модели существуют *периодические* ***КФ*** с *минимальными* периодами ***p*** и ***q*** ***(p≠q)***, то в ней существуют по крайней мере и периодические ***КФ*** с минимальным периодом ***g=g(p,q)=НОК(p,q)***, где ***НОК –*** наименьшее общее кратное. Доказательство данного факта предоставляем читателю в качестве довольно полезного упражнения, не требующего особой подготовки.

В данном контексте возникают следующие **2** основных вопроса**:** ***1)*** получение оценки сверху для размеров *минимальных* периодов как функции основных параметров ***ОС***-модели и ***2)*** выяснение алгоритмической *разрешимости* проблемы существования для произвольной классической ***d-ОС (d ≥ 1)*** *периодических* ***КФ***, исключая тривиальный случай периодической нулевой ***КФ***. При этом, положительное решение *первого* вопроса влечет за собой алгоритмическую *разрешимость второго* вопроса с предоставлением конструктивного решающего алгоритма. Тогда как алгоритмическая *неразрешимость второго*, в свою очередь, влечет за собой отрицательное решение *первого* вопроса. На сегодня оба указанных вопроса остаются открытыми даже для *одномерного* случая. Для случая классических ***ОС***-моделей удалось получить *нижнюю* оценку величины минимального периода, выражаемую следующим основным результатом [3,5,88,90].

<u>Теорема 159</u>. Существуют классические структуры d-ОС (d ≥ 1) с индексом X соседства Мура, имеющие периодические КФ $c \in C(A,d,\phi)$ ***с минимальным периодом*** $p \geq 2^{|c|} - 2$, ***где*** $|c|$ ***– диаметр конечной c-конфигурации. Существуют классические структуры 1-ОС с индексом соседства X={-3,-2,-1,0,1,2,3}, имеющие периодические КФ*** $c \in C(A,1,\phi)$ ***с минимальным периодом*** $p \geq 2L(|c|)$, ***где величина L определяется из соотношений (17).***

Доказательство теоремы ***159*** конструктивно и состоит в определении *функционального* алгоритма структуры ***1-ОС****, допускающего существование в ней периодических конфигураций $c \in C(A,d,\phi)$ с минимальным периодом $p = 2^{|c|} - 2$. Затем показывается, что определенная подобным образом структура ***1-ОС**** удовлетворяет достаточному условию погружения ее в *классическую* ***d-ОС (d ≥ 1)*** с индексом соседства Мура [1,3]. Вторая часть теоремы ***159*** говорит о наличии для классических ***1-ОС*** относительно небольших по размерам периодических конфигураций, но с фантастически большими размерами минимального периода. Доказательство данного факта основывается на результатах исследований по проблеме ограниченного роста ***(ПОР;*** раздел ***1.2)*** и определяется алгоритмом выращивания на основе структуры ***1-ОС**** из исходной ***КФ*** $c \in C(A,1,\phi)$ максимально возможной по длине конфигурации с последующей ее *редукцией* до исходной ***c***-конфигурации. Таким образом, функциональный алгоритм данной ***1-ОС**** можно получать путем «*склеивания*» модифицированного алгоритма, решающего ***ПОР***, и обратного ему алгоритма редукции. Затем полученная таким образом структура ***1-ОС**** погружается в классическую структуру ***1-ОС***. Этот результат может быть обобщен также и на случай высших размерностей. Из результата теоремы ***159*** следует, существуют классические ***d-ОС (d ≥ 1)***, имеющие *периодические* ***КФ*** с любой наперед заданной величиной минимального периода. Определенный интерес наряду с периодическими конечными ***КФ*** представляют и бесконечные периодические в смысле ***Ямада-Аморозо*** [1,3,5].

К проблеме периодических конечных ***КФ*** непосредственно примыкают и вопросы, связанные с понятием *стабильности* и *строгой стабильности* по *Пуассону*. Интуитивно стабильность данного типа означает, динамика ***КФ*** $<c_o>[\tau^{(n)}]$ в классической ***d-ОС (d ≥ 1)*** *бесконечно* много раз попадает в *произвольную* окрестность c_o-***КФ*** в топологическом смысле, т.е. ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ будем называть ***Пуассон-стабильной*** относительно ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в ***d-ОС (d ≥ 1)***, если существует последовательность неотрицательных целых чисел $m_1<m_2<m_3<m_4< \ldots$ такая, что $\lim_{p \to \infty} c_o \tau^{(n)m_p} = c_o$. Конфигурация $c_o \in C(A,d,\phi)$ называется ***строго Пуассон-стабильной*** относительно ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в ***d-ОС (d ≥ 1)***, если существует целое $m_o=m_o(c_o) \in N$ такое, что $c_o \tau^{(n)m_o} = c_o$, где m_o есть, вообще говоря, функция ***КФ*** c_o. Таким образом, оба понятия Пуассон-стабильности характеризуют некоторую предельную динамику классических в ***d-ОС (d ≥ 1)*** и по ним получен ряд довольно интересных результатов. В частности, ***Т. Сато*** и ***Н. Хонда*** установили ряд важных соотношений между инъективностью, сюръективностью и *(строгой)* Пуассон-стабильностью в классических ***ОС***-моделях, основываясь на сугубо топологическом подходе [272]. К понятию Пуассон-стабильных ***КФ*** тесно примыкают и определенные нами ***(p-k)***-периодические конечные конфигурации, тогда как полученные по ним результаты вполне естественным образом переносятся и на указанный тип ***КФ***, в частности, результат теоремы ***97*** в части ***(p-k)***-периодических конфигураций с его обобщениями на общий ***d***-мерный случай классических ***ОС***-моделей [54-56,536].

В разделе ***6.4*** рассматривались вопросы моделирования произвольных *классических* ***ОС***-моделей структурами с *симметрическими* ***ЛФП***. Там же кратко обсуждались и некоторые конструктивные возможности ***ОС***-моделей с обоими типами ***ЛФП***. В определенной мере промежуточный этап в конструктивном плане занимают так называемые частично симметричные ***ЛФП***. Здесь сколько-нибудь значительные исследования пока отсутствуют [54]. В главе **2** отмечалось неэвивалентное влияние свойств асимметричности и симметричности ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ в классических ***ОС***-моделях на обладание ими того либо иного типа неконструируемости. Было бы чрезвычайно интересным продолжить исследование по влиянию степени симметричности ***ЛФП*** на *динамические* свойства классических ***ОС***-моделей.

С определенными классами ***ОС***-моделей связан ряд специальных вопросов *динамики*. Например, в классе структур ***d-ОСР(r, P)*** с рефрактерностью (раздел ***1.2***) основным объектом исследований является *динамика* распространения активности как функция начальной ***КФ***, индекса соседства, глубины рефрактерности ***(r)*** и порога возбудимости ***(P)***. Будем говорить, что в структуре ***d-ОСР*** существуют незатухающие возбуждения только тогда, когда для некоторой начальной конечной ***КФ*** $c_o \in C(A,d)$ и любого момента $t>0$ ***КФ*** $c_t = c_{t-1}\tau^{(n)}$ содержит по меньшей мере один единичный автомат структуры в возбужденном состоянии. Интересно, что существование этих *возбуждений* в ***ОС***-моделях с рефрактерностью весьма тесно связано с порогом возбудимости. Более того, в ***ОС***-моделях с рефрактерностью не может существовать областей возбуждений произвольной ***КФ***, а именно, имеет место следующий общий результат [1].

<u>Теорема 160</u>. В d-ОСР(r,P) (r ≥ 1) недостижима возбужденная область, тождественная шаблону соседства структуры; в такой d-ОСР(r,P) (d ≥1, r ≥1) с индексом соседства Мура только тогда существуют незатухающие возбуждения, когда выполняется следующее соотношение $P < 3^{d-1}$.

Следовательно, проблема существования для произвольной ***d-ОСР(r,P) (r ≥1, r ≥ 1)***, как несложно убедиться, незатухающих возбуждений алгоритмически разрешима и в данной ***ОСР***-модели не существует достаточно больших *сплошных* областей возбуждений в момент времени ***t>0***, т.е. ***КФ*** возбужденных состояний носят достаточно *разреженный* характер. Было бы довольно интересно дать такому факту некоторые адекватные прикладные интерпретации. Возможно, этот феномен связан с обеспечением надежности функционирования нейроноподобных сетей, определяемых ***ОСР***-моделями, и способами обработки в них информации. В таком контексте именно понятие *неконструируемости* в классических ***ОС***-моделях может получить новые достаточно интересные интерпретации. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в библиографии [536].

Вторая часть вышеупомянутого результата позволяет ввести определенную иерархию в классе *всех* структур ***d-ОСР(r,P) (r ≥1, r ≥ 1)*** относительно возможностей генерации ими ***КФ*** *возбужденных* состояний как функции ***d***-размерности и ***P***-порога. Из данного результата, в частности, следует что при $P \geq 3^{d-1}$ в структуре ***d-ОСР(r,P)*** любая начальная ***КФ*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ является *исчезающей*. В случае произвольного индекса ***X*** соседства величина ***P***-порога возбуждения является функцией глубины ***r***-рефрактерности и самого индекса соседства. В этой связи весьма интересно обобщить представленные результаты и на общий тип ***d-ОСР(r,P)***, представляющих вполне определенный интерес в плане формального исследования класса сетей *порогового* типа. Целый ряд интересных аспектов исследования ***d-ОСР(r,P)*** возникает как при изучении специальных вопросов *динамики* возбуждений (*распространение фронта возбуждений через разного рода препятствия, осциллирующие возбуждения, взаимодействие фронтов возбуждений и т.д.*), так и при переходе к ряду модификаций ***ОСР***-моделей на недетерминированной и стохастической основах. В этом отношении довольно существенным подспорьем может оказаться метод компьютерного моделирования [54,65,78,85]. В рамках класса структур ***d-ОСР(r,P)*** возможно достаточно эффективно проводить формальные исследования различного типа *возбудимых* сред [1,3,54-56,85,88,90,134,150,167,198,205,214,346,536].

Японские математики в рамках программы детального изучения *вычислительных* возможностей ***ОС***-моделей показали, что для любого детерминированного *двухстороннего* клеточного автомата ***(КА)*** существует моделирующий его в удвоенное время детерминированный *односторонний* ***КА***. В классе ***ОС***-моделей определяющая направленность передачи информации обеспечивается, в первую очередь, типом используемого индекса соседства ***X***. Не нарушая общности, рассмотрим классические структуры ***1-ОС*** с индексами соседства следующего вида, а именно:

$$X_k=\{-k,\ -(k-1),\ \dots,\ -2,-1,0,1,2,\ \dots,\ (n-1)-k\}; \qquad k\in K=\{0,1,2,\ \dots,\ n-1\}$$

Нетрудно убедиться, что для фиксированного значения n множество $X=\{X_k\,|\,k\in K\}$ исчерпывает все возможные индексы соседства X, определяющие связные шаблоны соседства ***(ШС)*** одного и того же размера n. Тогда значение k определяет местоположение в ***ШС*** центрального автомата ***(0-*****автомата*)**. При значениях $k=\{0,n-1\}$ получаем структуры ***1-ОС*** с *индексами соседства* $\{X_0,X_{n-1}\}$, задающими структуры соответственно с {*лево*| *право*}сторонними потоками информации. Тогда как при значениях $\{0<k<n-1\}$ мы имеем дело с индексами соседства X_k, задающими ***ОС***-модели с *двухсторонними* потоками информации. Второго типа структуры ***1-ОС*** характеризуются тем, что допускают эффективную реализацию, в частности, встречных потоков информации, а именно:

Индекс соседства структуры	***Шаблон соседства***										***Инфопоток***
$X_0=\{0,1,2,3,\ \dots,\ n-1\}$	0	...	...	...	...	...	...	...	...		⇐⇐⇐⇐
$X_{n-1}=\{-(n-1),-(n-2),\ \dots,\ -2,-1,0\}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	0	⇒⇒⇒⇒
$X_k=\{-k,-(k-1),\ \dots,\ -1,0,1,\ \dots,\ (n-1)-k\}$	...	...	...	...	0	...	...	...	...	...	⇐⇔⇔⇒

Одно(*двух*)направленные определяющие потоки информации позволяют единичному автомату ***ОС***-модели передавать/принимать информацию в одном (*двух*) направлениях вдоль каждого из измерений однородного Z^d-пространства структуры. Из определения классической ***ОС***-модели (раздел ***1.1***) нетрудно убедиться, что для каждой классической ***ОС***-модели с индексом соседства X_k можно определить строго эквивалентную ей модель в том же алфавите и той же размерности с индексом соседства $X_p\in X\ (p\neq k)$. Следовательно, по отношению к ряду важных характеристик (*например, универсальных вычислимости и воспроизводимости* ***КФ***) классические ***ОС***-модели с одно- и двухсторонними определяющими потоками информации являются строго эквивалентными.

Тогда как уже конструктивные возможности могут очень существенно зависеть от *определяющих* информационных направлений в ***ОС***-моделях. В частности, уже целый ряд задач в *классических* ***ОС***-моделях с *однонаправленными* определяющими потоками информации реализуются с весьма большими *временными* издержками, часто требуя *расширения* алфавита ***A*** внутренних состояний; при этом, программирование таких ***ОС***-моделей требует и больших усилий. И именно поэтому, располагая универсальными ***d-ОС*** с простейшими индексами соседства (раздел ***1.1***), размер ***ШС*** которых равен ***d+1***, предпочтение отдается структурам с простыми *индексами* соседства Неймана или Мура. Вопросам *влияния* направленности определяющих информационных потоков в ***d-ОС*** ***(d≥1)*** посвящен ряд специальных исследований [3,54,88,90,132,135,185-187,190,255,287,536,567].

К проблематике классических ***ОС***-моделей в качестве возбудимых сред в определенной степени примыкает очень интересный класс задач моделирования и исследования роста геометрических фигур, подчиненного того либо иного типа ограничениям и рекуррентным правилам, включая фрактальные. Первые попытки математического анализа такого типа задач были предприняты ***С. Уламом*** и его сотрудниками из Лос-Аламосской национальной лаборатории [225], созданной по инициативе «*отца*» водородной бомбы ***Э. Тэллера*** и давшей миру целый ряд оригинальных разработок, включая также и основы современной доктрины звездных войн. Более того, именно из изучения такого типа задач у ***С. Улама*** сформировались зачатки ***ОС***-концепции, с которыми и был ознакомлен ***Дж. фон Нейман***, впоследствии использовав их для исследования проблемы формального *самовоспроизведения*. ***С. Улам*** и его сотрудники изучили ряд вопросов роста фигур, являющихся своего рода промежуточными по сложности между неорганическими объектами (*подобными кристаллическим структурам*) и более *сложными* структурами, подобными некоторым органическим молекулам. Многие весьма интересные результаты в этом направлении были ими получены посредством компьютерного моделирования на супер-ЭВМ [225,536].

Эмпирические результаты ***С. Улама*** и его сотрудников демонстрируют как сложность и богатство форм, получаемых на основе простых начальных фигур посредством несложных рекуррентных правил, так и сложность их математического описания. Следовательно, несмотря на кажущуюся сложность и существенную непредсказуемость поведения растущих со временем *конфигураций*, содержащееся в них количество информации достаточно мало. Простейшие *модели* роста фигур ***С. Улама*** погружаемы в классические ***d-ОС*** $(d = 2, 3)$ и наиболее пригодны для математического исследования их морфологических черт как в пространстве, так и во времени [1,5,88]. Для таких моделей ***Дж. Холладей*** сформулировал общее правило, характеризующее *морфологию* растущих фигур. А полученные нами результаты по исследованию роста фигур в *классических* ***2-ОС*** [1,88] показывают, что существуют аналоги правил роста ***Дж. Холладея*** для растущих систем, которые подчинены и более общим ограничениям, чем ограничения геометрического характера.

В частности, некоторые из рассмотренных нами моделей роста могут интерпретироваться как самоусложняющиеся системы, в которых *любая* из их частей, выросшая на временном интервале $[1, 2^k\text{-}1]$ $(k>5)$ является *самовоспроизводящейся* в смысле Мура. Следовательно, исследование ***d-ОС*** в качестве моделей роста, подчиняющихся различным *рекуррентным* правилам и ограничениям, может оказаться довольно полезным для прояснении ряда важных свойств саморазвивающихся и самоорганизующихся систем различной природы. Работая по моделям ***С. Улама***, ***Д. Баттлер*** и ***С. Нтафос*** показали, что важную роль при анализе таких ***ОС***-моделей играет так называемый «*векторный описатель строки*» [309]. Они исследовали основные свойства данного описателя и на их базе доказали эквивалентность одной модели роста ***С. Улама*** и ее представления посредством описателя. Однако, несмотря на эффективность этого средства при исследовании относительно несложных моделей, при их усложнении эффективность весьма существенно снижается. Вместе с тем, надежды в исследовании задач роста возлагаются на метод *компьютерного* моделирования, который с появлением достаточно *мощных* ***ПК*** становится все более доступным широким кругам исследователей как профессионалов, так и любителей.

Выше уже говорилось, что с точки зрения фундаментальных свойств классических ***d-ОС*** замена однородного Z^d-пространства на другое регулярное не добавляет математически ничего нового. Между тем, исследование целого ряда ***ОС***-моделей роста показывает, при одних и тех же самых ограничениях и рекуррентных правилах роста сложность определения *морфологических* свойств растущих фигур может весьма существенно возрастать при замене одного типа однородного Z^d пространства ***ОС***-модели на другое. В данной связи было бы весьма интересным более детально исследовать влияние топологии однородного пространства ***d-ОС*** $(d \geq 2)$ на изменение основных конструктивных характеристик тех или иных классов погружаемых в них процессов, а в общем случае и изменение конструкционных свойств классических ***ОС***-моделей [536].

Рассматривая *классические* ***ОС***-модели в качестве формальной среды для *параллельных* обработки информации и вычислений, получаем ряд результатов, которые характеризуют *принципиальные* свойства этих моделей, оставляя в стороне целый ряд более *специальных* вопросов, позволяющих прояснять в деталях их более *глубокие* свойства, играющие весьма важную роль для прикладных аспектов вычислительных ***ОС***-моделей. В первую очередь, это относится к организации в ***d-ОС*** вычислений и решению различных важных задач в минимально возможное время. Здесь наряду с результатами общего характера, связанными с проблемой временной сложности в *классических* ***ОС***-моделях [5,29,37,56,74,171,287], получены достаточно интересные результаты по отдельным классам задач, решаемых в рамках вычислительных ***ОС***-моделей [1,3,135,138,160,166,175,178,184-187,252,296,297,536,567]. В частности, ***А. Подколзин*** рассмотрел вопрос реализации в *классических* ***2-ОС*** булевых функций с минимальной временной сложностью и предложил асимптотически оптимальное решение задачи [199,589,590].

Так, в терминах задачи о нахождении кратчайших информационных путей между единичными автоматами ***ОС****-модели можно формулировать многие теоретические и приклададные задачи оптимальной динамики классических ***ОС***-моделей. Большое внимание уделялось и уделяется теоретическим вопросам решения различного типа задач в среде вычислительных ***ОС***-моделей в *реальное* время. В этом направлении можно выделить особую группу задач синхронизационно-оптимизационного характера, типичными представителями которых вполне можно отметить и упоминаемые проблемы синхронизации сети автоматов, Французского флага и ограниченного роста. Для решения задач такого класса предложены как специальные, так и значительно более общего уровня решающие *параллельные* алгоритмы, ориентированные на достаточно широкий круг различного рода приложений. Так, в процессе исследования проблемы *синхронизации* сети автоматов наряду с целым рядом специфических были предложены и существенно более общие методы решения. В частности, ***Ф. Романи*** определил [3] интересный принцип параллелизма, по которому время синхронизации сети автоматов с частично симметричными свойствами весьма существенно уменьшается. На основе этого принципа показано, что хорошо известные быстрые методы синхронизации вписываются в рамки его концепции. На этом пути было показано, что каждая связная сеть из ***n*** автоматов может синхронизироваться за время не хуже, чем ***2n***. Анализ предложенного принципа *параллелизма* позволяет рассматривать его в значительно более общем контексте при исследовании оптимизационно-синхронизационных свойств как конечной, так и бесконечной системы взаимосвязанных конечных автоматов. Еще одна группа *оптимизационных* задач связана с минимизацией требуемых для решения той либо другой задачи не временных, а пространственных ресурсов в виде требуемого количества единичных автоматов *вычислительной* ***ОС***-модели для вычислений. Здесь особый акцент делается на исследованиях по структурному направлению ***ТОС***-проблематики.

Между тем, формирование структурного направления в ***ТОС***-проблематике не ограничивается только чисто теоретическим и методологическим интересом; оно позволяет, в первую очередь, исследовать прикладные аспекты, связанные с использованием параллелизма, присущего ***d-ОС***. В частности, с идеей распараллеливания ассоциируется, в основном, лишь получение *временного* выигрыша при вычислениях. Именно с этой целью разрабатываются параллельные алгоритмы для реализации их на той либо иной вычислительной модели. При этом, вполне естественным и само собой разумеющимся считается *увеличение* вычислительных ресурсов (*количества единичных автоматов*) для реализации параллельного алгоритма относительно реализации эквивалентного ему последовательного алгоритма на последовательной модели вычислений.

В этой связи возникает очень интересный вопрос о *цене*, которой мы вынуждены расплачиваться за *уменьшение* времени вычислений. В общем случае эта проблема представляется нам довольно сложной, поэтому вначале имеет смысл рассмотреть ее на отдельных формальных моделях для наиболее интересных и массовых вычислительных алгоритмов. Так, например, ***Э. Катона*** [171] предложил довольно оригинальный метод, обеспечивающий решение задачи (*которая требует в стандартной постановке* ***m*** *единичных автоматов и* ***t*** *шагов классической* ***2-ОС***) за ***0(kt)*** шагов ***2-ОС*** лишь на [***m/k***] единичных автоматах. Класс таких *оптимизационных* задач интересен не только с точки зрения формального исследования вычислительных возможностей ***ОС***-моделей, но также с прикладной точки зрения, имея ввиду последние успехи микроэлектроники высокой степени интеграции и нанотехнологии, все настойчивее ставящие на повестку дня реальных разработок целого ряда вычислительных ***ОС***-моделей, как одного из путей создания новых перспективных поколений высокопараллельных ***ВС*** [536].

Вопрос построения ***ОС***-моделей с определенными динамическими свойствами, генерирующих заданные последовательности конечных ***КФ***, можно определить как проблему ***реализации***. Так, в целом ряде работ было показано, что данная проблема конструктивно разрешима для довольно многих интересных прикладных случаев, однако до сих пор не получено ответа относительно ее *разрешимости* даже для целого ряда важных ***КФ***-последовательностей. Проблема представляется достаточно сложной, играя, между тем, чрезвычайно важную роль в общей ***ТОС***-проблематике как в теоретическом, так и прикладном отношениях. Вместе с тем, общая проблема реализации алгоритмически неразрешима [55,90], а именно:

Не существует алгоритма, позволяющего для произвольной последовательности конечных КФ $\Omega=\{c_0 \Rightarrow c_1 \Rightarrow c_2 \Rightarrow ... \Rightarrow c_k \Rightarrow ...\}$ ***определять наличие либо отсутствие классической ОС-модели, генерирующей данную Ω-последовательность конечных конфигураций.***

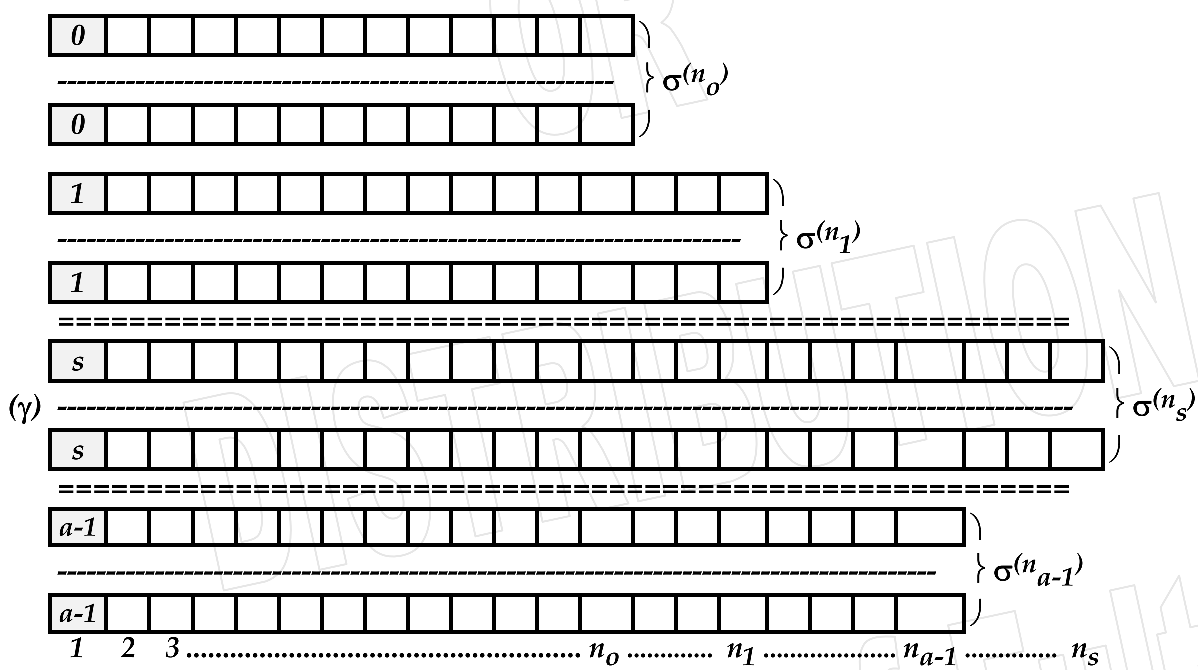
В последнее десятилетие проявляется все возрастающий интерес к новому *междисциплинарному* научному направлению – ***синергетике***, которое исследует роль коллективных и кооперативных эффектов в самоорганизующихся процессах, устройствах и системах различных природы, типа и назначения [155]. Можно с уверенностью утверждать, что *динамика* ***ОС***-моделей очень хорошо отвечает концепциям и проблематике *дискретной* синергетики со многих точек зрения. Подобно синергетике, одной из основных проблем *динамики* ***ОС***-моделей является вопрос существования общих принципов, управляющих процессом *самоорганизации* конечных конфигураций. И в этом контексте ***ОС***-концепция достаточно хорошо сочетается с синергетической концепцией. Однако современная синергетика вообще и дискретная синергетика в частности базируются на *основных трех* понятиях, а именно: *нестабильность*, *принцип субординации* и *параметры* порядка. При этом, данные понятия имеют довольно простую интерпретацию на гносеологическом уровне, однако применение их к любой реальной системе в полной мере, в частности, к *классической* ***ОС***-модели требует, порой, весьма существенных усилий [5,53-56,82,88,90,536].

В этой связи было бы чрезвычайно интересным исследовать общие принципы самоорганизации в ***ОС***-подобных параллельных клеточных системах. Тогда как с более прикладной точки зрения было бы желательным организовать параллельную обработку информации в вычислительных ***ОС***-моделях на основе самоорганизации единичного автомата (*либо блока единичных автоматов*) без использования центральных распараллеливающих устройств. Подобные принципиального характера вопросы могут быть сформулированы для многих других параллельных алгоритмов, процессов, объектов и феноменов, погружаемых в ***ОС***-модели, для которых *самоорганизационный* подход может играть чрезвычайно существенную роль [5,88,90,536,567].

Среди множества классов ***ОС***-моделей существенный интерес представляет класс ***ОСнР-*****моделей**, определенных нами в разделе ***1.2*** и по ряду направлений рассмотренных в предыдущих главах. Одной из характерных черт таких моделей является относительная простота программирования обратимости их динамики, а также алгоритмическая разрешимость ряда важных динамических свойств, что весьма существенно в контексте их физических и ряда иных приложений. Наряду с этим, по целому ряду интересных показателей динамика ***ОСнР***-моделей довольно существенно отличается от *динамики классических* ***ОС***-моделей, позволяя делать вполне определенные выводы о специфических чертах динамики и асинхронных ***ОС***-моделей в целом. Введенные для сугубо прикладных целей [150-152], ***ОСнР***-модели практически не исследовались в рамках общей ***ТОС***-проблематики и в работах [88,90] предпринята попытка восполнить данный пробел. Некоторые из наиболее простых и связанных по материалу изложения результатов данного исследования в определенных контекстах упоминаются и в настоящей монографии.

Рассмотрим еще один интересный с ряда прикладных соображений тип классических структур $OC = \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X^* \rangle$, в которых индекс соседства является *переменным* и определяется внутренним состоянием текущего единичного ***z***-автомата, т.е. $X_z = F(s[z])$. Очевидно, что множество X^{**} всех допустимых индексов соседства подобной ***ОС***-модели конечно и при алфавите $A = \{0,1,2, ..., a-1\}$ внутренних состояний имеем $\#X^{**}=a$. Таким образом, во множестве X^{**} можно выбрать индекс соседства, например X_s $(s \in A)$, определяющий *максимальный* по размеру шаблон соседства ***(ШС)***. Дальнейшее рассмотрение, не нарушая общности, проведем на примере одномерных структур, как наиболее иллюстративном.

Для простоты иллюстрации все компоненты переменного индекса соседства X^{**} приводятся к общему стандартному виду $X=\{0,1,2, ..., n-1\}$. Можно показать, это нисколько не умаляет степени общности предположения также в случае рассмотрения *различных* типов частных индексов вида $X' = \{-(n-k-1), ..., -2,-1,0,1,2, ..., k\}$ $\{k=0 .. (n-1)\}$. Убедиться в этом предоставляем читателю в качестве достаточно несложного и полезного упражнения.



Из вышеприведенной довольно простой схемы ***(γ)***, поясняющей *назначение* каждому ***s***-состоянию текущего ***z***-автомата исходной структуры ***1-ОС*** *переменного шаблона соседства* и соответствующей ему *частичной* ***ЛФП*** $\sigma^{(n_s)}$, несложно усмотреть, что определив классическую ***1-ОС*** в алфавите ***A***, с индексом соседства X_s и ***ЛФП*** $\sigma'^{(n_s)}$, однозначно определяемой на основе частичных ***ЛФП*** $\sigma^{(n_k)}$ $\{k=0..a-1\}$ исходной ***1-ОС*** с переменным индексом соседства $X^{**}=\{X_s \mid s = 0..a-1\}$, непосредственно получаем эквивалентную ей стандартную классическую структуру. Таким образом:

Введенная вышеуказанным образом структура d-ОС (d ≥ 1) с переменным индексом соседства X**, определяемым внутренним состоянием текущего единичного автомата, является строго эквивалентной соответствующей стандартной классической d-ОС в том же самом алфавите A внутренних состояний, что и исходная структура.

Следовательно, ***ОС***-модели с таким образом определенным переменным индексом соседства X^{**} составляют собственный *подкласс* класса всех классических ***ОС***-моделей. В данного типа моделях параллельные подстановки, определяющие их ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$, *дифференцируемы* по первому символу их левых частей.

Таким образом, в зависимости от своего текущего состояния единичный автомат структуры сам определяет окрестность своих соседей, от которых ему необходимо получить информацию для определения своего последующего состояния, т.е. *поведение* единичного ***z***-автомата в такого типа ***ОС***-модели носит несколько более «*интеллектуальный*» характер. Данный момент представляет определенный интерес с точки зрения целого ряда прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики и достаточно детально рассматривается в работах [88,90] с иллюстрацией целого ряда интересных примеров различного характера.

ОС-модели вышеописанного типа характеризуются *индивидуальным* выбором индекса соседства единичным ***z***-автоматом, расширяя круг эффективно представляемых на их основе целого ряда интересных задач. В качестве простого примера, иллюстрирующего ***ОС***-модели с данного типа переменным индексом соседства, рассмотрим *бинарную* структуру, индекс соседства X^* которой определяется как $X^* = \{X_o = \{0,1\}, X_1 = \{0,1,2\}\}$. Пусть в данной ***ОС***-модели единичный ***z***-автомат, находящийся в состоянии $\{0|1\}$, использует соответственно частичный индекс соседства $\{X_o|X_1\}$ и ***ЛФП*** $\{\sigma^{(2)}(x,y)=x+y \ (mod\ 2)|\sigma^{(3)}(x,y,z)=x+y+z \ (mod\ 2)\}$ $(x,y,z\in\{0,1\})$ с целью определения своего последующего состояния. При сделанных предположениях достаточно несложно убедиться, что из начальной конечной конфигурации c_o=□1011□ в определенной таким образом *бинарной* ***1-ОС*** с переменным индексом соседства генерируется следующая последовательность (*в разрезе первых пяти шагов*) конечных конфигураций, а именно:

	Конфигурационная последовательность												*t*
c_o:					*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*
c_1:				*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*1*
c_2:			*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*2*
c_3:		*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*3*
c_4:	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*4*
c_5:	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*	*5*

Более того, такая последовательность конфигураций имеет ***формульное*** описание, т.е. элементы ее представляются в виде c_{2k-1} = □$(10)^{k-1}$10101□ и c_{2k} = □$(10)^k$1011□ $(k=1,2,3,...)$; данная ***ОС***-модель генерирует *формульный* параллельный $L(\tau_n)$-язык (глава ***5***). Этот пример характеризуется также целым рядом других интересных свойств. Например, в таким образом определенной структуре отсутствует неконструируемость типа ***НКФ-1***, ибо (*нетрудно в этом убедиться*) множество $C(A,\infty)$ всех *бесконечных бинарных* конфигураций *замкнуто* относительно глобального τ-преобразования структуры. Следовательно, в контексте результатов главы ***3*** можно предположить, что для такой структуры, не взирая на линейность частичных функций ***ЛФП*** $\sigma^{(n_s)}$, определяющих глобальное τ-преобразование и *ассоциированных* с переменным индексом соседства X^{**}, не будет иметь места свойства *универсальной* воспроизводимости в смысле Мура конечных конфигураций. И на самом деле, в структуре существуют пары ***ВСКФ*** уже простого вида {***<01|01|01>,<01|10|01>***}, а значит существуют и ***НКФ***, что непосредственно и доказывает наше предположение. В качестве весьма полезного упражнения читателю рекомендуется рассмотреть также и ряд других примеров ***ОС***-моделей с переменным индексом соседства и исследовать их динамические свойства. В качестве дальнейшего расширения данного типа ***ОС***-моделей можно рассматривать также случай, когда индекс соседства ***X*** единичного ***z***-автомата структуры зависит от *истории* на некоторую глубину его предыдущих состояний [5,88,90,536,567].

Таким образом, выше нами представлены два новых типа ***ОС***-моделей с переменным индексом соседства – *индексом соседства* как функцией соответственно координат и внутреннего состояния единичного ***z***-автомата структуры. И хотя оба этих типа переменности индекса соседства имеют принципиальные различия, но определяемые на их основе ***ОС***-модели имеют свои интересные области приложений. При этом, *второй* тип переменного индекса соседства у структур образует *подмножество всех классических* ***ОС***-моделей подобно тому, как это имеет место для ***ОС***-моделей с рефрактерностью (см. раздел ***1.2***).

Еще об одном аспекте в данной связи имеет смысл сказать особо. Не взирая на простоту такого формального объекта, как классические ***ОС***-модели, их динамика носит в общем случае весьма сложный характер и достаточно часто с большим трудом поддается детальному исследованию. Поэтому определение в классе данных ***ОС***-моделей интересных с той либо иной точки зрения подклассов структур и их исследование позволяет более глубоко прояснять целый ряд важных вопросов *динамики* всего класса в целом. Вместе с тем, дифференциация классических структур позволяет нам намного более эффективно рассматривать также их прикладные аспекты в целом ряде практически интересных и важных областей современного естествознания [536,567].

В заключение данного раздела и главы в целом следует отметить, что большинство результатов, представленных здесь по проблеме декомпозиции глобальных функций перехода $\tau^{(n)}$ в полной мере сохраняют силу и для ***нестабильных*** структур, т.е. структур, не обладающих выделенным состоянием «***покоя***», т.е. не удовлетворяющих определяющему для их ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ соотношению

$$(\exists h \in A)\left(\sigma^{(n)}(h, h, h, \dots, h) = h\right)$$

где ***A*** – алфавит внутренних состояний структуры и ***h*** - выделенное состояние «*покоя*». При этом, доказательства большинства результатов по проблеме декомпозиции ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ в ***ОС***–моделях ни в коей степени не используют предположений, обусловленных вышеуказанным определяющим соотношением для их ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$.

На этом завершается обсуждение ряда более *специальных* вопросов ***ТОС***-проблематики, которые, естественно, далеко не охватывают всего многообразия этого направления исследований. Более того, в целом ряде случаев наблюдается и тенденция интенсивного развития ряда специальных вопросов, выдвигающих их в число *фундаментальных*. Для более полного знакомства со спектром более специальных вопросов ***ТОС***-проблематики читатель отсылается к достаточно обширной библиографии, представленной как в настоящей монографии, так и в [536,567].

Глава 8.
Некоторые прикладные аспекты ОС-проблематики

Сфера приложений ***ОС***-моделей во всей их общности в настоящее время достаточна обширна и требует *специального* рассмотрения, которое выходит за рамки настоящей монографии. Здесь мы только вкратце отметим наиболее продвинутые области приложений и с большей детализацией коснемся прикладных аспектов ***ОС***-проблематики (*с некоторым акцентом на ряде полученных нами результатах*) в математических, вычислительных и биологических науках. Между тем, наряду с сугубо самостоятельным интересом в качестве важного математического объекта исследований в настоящее время ***ОС***-концепция с той или иной степенью интенсивности используется в весьма широком диапазоне приложений, а именно: чистая и прикладная математики, криптография и теория кодирования, распознавание образов и обработка сигналов, кибернетика и синергетика, теория вычислений и искусственный интеллект, математическое и физическое моделирование, математическая и теоретическая биологии, вычислительные науки, параллельные вычисления и обработка информации, урбанистика, геология, логистика и т.д. Более того, ***ОС***-модели могут симулировать не только самые общие *феноменологические* аспекты реального мира (*параллельная обработка информации, конструируемость, вычислимость, биологические феномены и процессы и т.д.*), но и непосредственные физические законы и процессы на микроскопических уровнях [536,567]. ***ОС***-модели представляют собой своего рода формальные *рекурсивные* миры, между тем, как сама рекурсия фундаментальна для математики, информатики, физики, биологии, искусства и даже такой области как лингвистика. Именно поэтому сегодня данного типа модели являются весьма востребованными и привлекают все большее число исследователей из различных областей.

Так, хотя идеи использовать дискретные методы для задач моделирования дифференциальных уравнений в частных производных появились достаточно давно, между тем, фактически первое предложение *использовать* методику ***ОС***-моделей для приближенного решения или изучения на качественном уровне дифференциальных уравнений в частных производных в гидродинамике восходит к таким исследователям как ***Frisch, Hasslacher*** и ***Pomeau.*** В последующем ***ОС-****концепция* была довольно успешно использована для получения достаточно *простых* моделей классических *дифференциальных* уравнений физики, таких как волновое уравнение и уравнение *Навье-Стокса*, уравнение теплопроводности, которые можно рассматривать в качестве *предельных случаев* очень простых процессов *комбинаторной* динамики. Наряду с этим, однородные структуры позволяют получать довольно богатую и постоянно расширяющуюся *коллекцию* моделей, в рамках которых относительно просто можно исследовать разнообразные аспекты бурно развивающейся сегодня теории *динамических* систем, которая исследует возникновение и поведение таких коллективных явлений как фрактальность, упорядочение, турбулентность, хаос и т.д. в системах, состоящих из большого количества элементов, взаимодействующих друг с другом сугубо локальным образом.

Во многих случаях ***ОС***-модели представляют альтернативный дифференциальным уравнениям подход к анализу *динамики* сложных систем. Поскольку пространственная дифференцировка на элементарные автоматы является имманентным свойством однородных структур, то они просто незаменимы именно там, где дифференциальные уравнения малоэффективны либо и вовсе не могут быть применены. В целом же ряде случаев отсутствует какой-либо иной способ выяснить *динамику* начальной конфигурации некоторой *динамической* системы, чем просто симулировать ее поведение посредством соответствующей ей ***ОС***-модели [536,567].

Обеспечиваемые на уровне ***ОС***-аксиоматики такие фундаментальные свойства, как локальность и однородность, тогда как на программном уровне и свойство *обратимости динамики*, позволяют рассматривать ***однородные структуры (ОС)*** в качестве весьма перспективной среды *физического* моделирования. Это и целый ряд других существенных обстоятельств переводят проблематику ***ТОС*** на достаточно серьезный *междисциплинарный* уровень, превращая ее в *концептуальную* среду моделирования, описания и исследования феноменов, процессов, явлений и объектов из разных естественно-научных и ряда других областей. Вместе с тем, именно возможности использования однородных структур в качестве нетривиальной среды физического моделирования позволяют рассматривать их значительно шире, чем просто (*пусть даже очень интересный*) самостоятельный объект исследований. В этой же связи их можно рассматривать в качестве нового *концептуального* подхода к организации *обратимых* вычислительных процессов в контексте исследования общей теории вычислений и создания новых перспективных средств вычислительной техники [536].

В настоящее время вполне можно констатировать, что ***ОС***-концепция предоставила достаточно перспективную среду моделирования для реализации концептуальных и прикладных аспектов пространственно-распределенных динамических систем, из которых наиболее существенными прототипами являются системы физические, биологические, системы параллельных обработки информации и вычислений. Достаточно полное представление в области прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики можно получить в работах [1,3-5,8,9,15,23,26-28,32,33,53-56,58,62,64-67,71-75,90, 146,149,150,156,157,161,166,167,171,178,184-187,201,209,213,255,273,285,308,318,333,354,360,373,374,378, 384-388,392,397-405,409-414,416,417,536,567] наряду с процитированными в них многочисленными оригинальными источниками.

8.1. Некоторые аспекты использования ОС-моделей в математике

После краткого обсуждения ряда математических приложений ***ТОС***-концепции более детально остановимся на применении ее для изучения некоторых интересных проблем комбинаторики, теории чисел и дискретной математики, хотя представленные в данном разделе математические приложения являются далеко не исчерпывающими. В настоящее время в ***ТТГ*** проводится целый ряд работ, связанных с применением ***ОС***–концепции в исследованиях математических проблем.

1. Прежде всего, использование самой концепции однородного Z^d-пространства в совокупности с аналитическими методами может быть весьма продуктивно использовано для решения целого ряда математических задач. Например, данный подход позволил исследовать целый ряд свойств решений некоторых типов целочисленных уравнений [5,54,88]. Например, знаменитая Великая теорема Ферма гласит: ***Не существует решения уравнения вида***

$$X^n + Y^n = Z^n \quad \text{для } n > 2 \qquad (\Re)$$

в целых положительных числах. Полное решение данной проблемы было получено ***Э. Уайлсом*** в ***1993*** как непосредственное следствие доказательства гипотезы *Таниямы-Шимуры*, относящейся к теории эллиптических кривых и модулярных форм. Представленное доказательство является гигантской цепочкой рассуждений, изложенных в ***100*** страничной математической рукописи. При этом, для многих математиков-профессионалов доказательство гипотезы *Таниямы–Шимуры* было несравненно важнее доказательства Великой теоремы Ферма, поскольку из этой гипотезы следует немало важных утверждений. Между тем, существует целый ряд решений той или иной степени общности, базирующихся и на значительно более простой методике с использованием ***ОС***-концепции. Например, используя вышеупомянутый подход [54], было получено интересное свойство уравнения ($\Re$), а именно:

Для достаточно больших целых n целочисленные положительные тройки чисел $<X,Y,Z^{[n/\ln 2]-1}>$ ***не могут быть решениями уравнения*** ($\Re$).

Имеются и другие довольно интересные результаты по *целочисленным* уравнениям, полученные на основе указанного подхода [54-56,88], иллюстрирующие его *потенции* в данном направлении.

Не имеющие на сегодня удовлетворительных прикладных интерпретаций *бесконечные* ***КФ*** в ***ОС***-моделях оказываются достаточно интересными в качестве представления действительных чисел, что позволяет исследовать ряд *специальных* вопросов теории чисел на новой основе. Так, в работе [154] был продемонстрирован ряд интересных примеров ***ОС***-моделей, генерирующих *фракталы*. Непосредственное исследование вопроса полиномиального представления ***ЛФП*** в классических ***ОС***-моделях алгебраическими методами привело к получению целого ряда полезных сравнений по модулям различных типов [53]. *Статистические* способы изучения ***ОС***-моделей предложили новый аналитический метод вычисления *инвариантных* мер для одного достаточно интересного класса хаотических систем [153]. Исследования по асимптотическим свойствам стохастических ***ОС***-моделей в качестве сопутствующих позволили сформулировать ряд интересных результатов по стохастическим *регулярным* матрицам [21]. Используя специальным образом организованные конечные ***2-ОС*** (*клеточные структуры Дирихле*), ***Р. Симсон*** показал, что они могут иметь немало интересных приложений в статистике и анализе различного рода данных [5]. Конечные модели ***ОС*** используются для исследования различного типа *оптимизационных* задач из областей чистой и прикладной математик. Группа французских математиков [3] показала, что ***ОС***-модели можно успешно использовать для решения целого ряда задач теории графов, например: гамильтоновы циклы, декомпозиция блоков, минимизация деревьев и др. Так, на основе *графо-топологического* подхода ***М. Насу*** показал связь ряда важных свойств параллельных *отображений*, индуцируемых классическими ***1-ОС***, с отображениями, индуцируемыми *гомоморфизмами* графов, что позволяет установить *более* тесную связь между методами теории графов и ***ТОС***-проблематикой [396]. При этом, имеются довольно успешные и интересные примеры применения классических структур и их модификаций для решения ряда задач вычислительной геометрии. К оптимизационным математическим задачам, успешно исследуемым средствами ***ОС***-моделей, можно отнести такие популярные задачи как поиск кратчайшего пути на регулярных решетках, а также поиск выхода из дискретных планарных лабиринтов. Средствами ***ОС***-моделей успешно исследуются вопросы решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений, вопросы работы с булевыми матрицами и целый ряд других важных математических задач как из чистой, так и прикладной математик [90,158,166,177-179,185-187,196,212,219,232,360,396,536,567]. Ниже представлены только некоторые из примеров использования ***ОС***-концепции для решения ряда достаточно известных математических задач из областей комбинаторики и теории чисел.

2. На основе специальных типов классических ***ОС***-моделей можно получать целый ряд довольно интересных нетривиальных свойств *обобщенного* арифметического *треугольника* Паскаля ***(ОТП)*** и чисел Фибоначчи [53]. Для дальнейшего изложения поясним ***ОТП***-понятие.

Рассмотрим произвольную строку целых чисел $P_o, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$, которая при $k=0$ вырождается в единственное число P_o. Образуем из нее новую строку чисел $B_o, B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{k+1}$ по следующему простому рекуррентному правилу, а именно:

$$B_o = P_o; \qquad B_j = P_{j-1} + P_j; \qquad B_{k+1} = P_k \qquad (1 \le j \le k)$$

Про эту новую строку будем говорить, что она получена из предыдущей по закону *Паскаля* и так далее. Если положить $P_o=1$, то получаем хорошо известный *арифметический треугольник Паскаля*.

Выбираем теперь классическую ***1-ОС*** с индексом соседства вида $X=\{0,1,2,3, \ldots, n-1\}$, алфавитом A внутренних состояний, совпадающим с множеством всех неотрицательных целых чисел, и ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ следующего линейного вида, а именно:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j, \qquad x_j \in A \quad (j = 1..n)$$

Тогда строки ***ОТП*** определяются как конечные конфигурации, генерируемые в заданной таким образом структуре из начальной примитивной *конфигурации* P_o=□1□. Пусть члены каждого ***ОТП*** нумеруются *слева направо*, начиная с нуля, тогда как число, находящееся на ***p***-м месте ***k***-й строки, обозначается через $T_k^p(n)$. Очевидно, выражение $T_k^p(n)$ определено при любых целых числах $k\geq 0$, $n\geq 2$ и $p=0 \,..\, k$. Пусть теперь ***S(k,n)*** обозначает сумму чисел ***k***-й строки ***ОТП***. Тогда при сделанных предположениях имеет место следующий достаточно интересный результат [53].

<u>Теорема 161</u>. Свойства обобщенного арифметического треугольника Паскаля удовлетворяют нижеследующим определяющим соотношениям, а именно:

$$\boxed{\begin{array}{c} S(k,n)*S(k,m)=S(k,n*m)\,; \quad S(k,n)*S(t,n)=S(k+t,n)\,; \quad S^m(k,n)=S(k,n^m)\,; \\ S(k,n)\,/\,S(t,n)=S(k-t,n)\,; \quad r=k*(n-1)+1\,; \quad T_n^p(n)=T_k^{r-p}(n)\,; \\ \sum_{p=0}^{r} T_k^p(n)=n^k\,; \quad \sum_{p=0}^{r} T_k^p(n)^2=T_{2k}^k(n)\,; \quad \sum_{p=0}^{r}(-1)^p\,T_k^p(n)=0 \end{array}}$$

Более детальное исследование позволит получить и другие интересные свойства ***ОТП***, а также и обобщить полученные результаты на общий ***d***-мерный случай. А так как треугольник *Паскаля* и числа *Фибоначчи* имеют очень тесную *связь* с биномиальными коэффициентами, факториалами, целым рядом важных математических формул и таблиц, то данные исследования представляют вполне определенный интерес также при организации параллельных вычичислений на основе ***ОС***-моделей. При этом, линейность ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ структуры, генерирующей строки ***ОТП***, позволяет предпринять попытку связать столь сугубо математические свойства линейных ***ОС***-моделей с их свойством *универсальной воспроизводимости* в смысле Мура *конечных* ***КФ***, которая в значительной мере обеспечивается симметричностью ***ГФП*** модели и отсутствием для нее неконструируемости ***НКФ***-типа. В данном направлении нами проводятся определенные исследования.

8.1.1. Решение одной комбинаторной проблемы Г. Штейнгауза

Известный польский математик ***Г. Штейнгауз*** более ***60*** лет тому назад сформулировал довольно интересную комбинаторную проблему, названную им «*плюсы-минусы*»; суть данной проблемы в нашей терминологии сводится к следующему [5,54-56,88,90].

Пусть ***c(k)=p(1,1)p(1,2)p(1,3)...p(1,k)*** будет *первой* строкой из *бинарных* элементов $p(1,j)\in\{0,1\}$; $j=1..k$. Значения для ***k*** выбираются только из множества $M=\{3+4t,\ 4+4t \mid t=0,1,2,3,\ ...\}$. Тогда элементы ***j***-й строки длины ***(k-j+1)*** получаются из ***(j-1)***-й строки длины ***(k-j+2)*** по следующему очень простому рекуррентному правилу, а именно:

$$p(j,i) = p(j-1,i) + p(j-1,i+1) + 1 \ (mod\ 2); \qquad (i=1 \,..\, k-j+1;\ j=2 \,..\, k)$$

Несложно убедиться, что в результате данного построения получается треугольная фигура ***T(k)***, состоящая из $N=k(k+1)/2$ *символов* $\{0,1\}$. Так как ***N*** являются четными числами для значений $k\in M$, то можно сформулировать следующий достаточно интересный вопрос: ***Возможно ли для любого допустимого значения k∈M определить фигуры T(k), которые будут состоять из одинакового числа m=k(k+1)/4 символов «0» и «1»?*** В случае *положительного* ответа будем говорить, что строка ***c(k)*** является решением проблемы Штейнгауза (*в дальнейшем для краткости используется термин «**Ш-проблема**»*) для данного целого ***k***-значения.

Решением ***Ш-проблемы*** занимался целый ряд профессиональных математиков и любителей, что позволило получить довольно интересные результаты. Между тем, ее общее решение оставалось открытым. И только на основе ряда результатов по классическим структурам ***2-ОС*** совместно с компьютерным моделированием удалось получить не только ряд новых достаточно интересных результатов, но и исчерпывающее решение проблемы [8,81]. Для дальнейшего нам понадобится ряд основных определений.

<u>Определение 30</u>. Решение S(k) Ш-проблемы для каждого целого $k \in M=\{3+4t,\ 4+4t \mid t=0,1,2,...\}$ будем называть производным [обозначение: D(k)], если оно представимо в форме конкатенации вида $D(k) = S(k1)S(k2)S(k3)\ ...\ S(kn)$ решений для значений $k_j < k$ при $\sum_j k_j = k$ (j=1..n). Пусть S(k) будет множеством всевозможных решений Ш-проблемы для некоторого значения k. Легко убедиться, что S(3)={000, 011, 110, 101} и S(4)={1101, 1011, 0011, 1100, 1010, 0101}; эти два множества решений будем называть базовыми. Производное решение D(k) называется базисным [обозначение: B(k)], если в его D(k)-представлении имеют место следующие определяющие соотношения, а именно: $S(kj) \in S(3) \cup S(4)$ (j=1 .. n).

Множества ***производных*** и ***базисных*** решений (*наравне с их элементами*) ***Ш-****проблемы* для каждого значения ***k*** будем обозначать соответственно как ***D(k)*** и ***B(k)***. Причем отметим, *базисные* решения представляют особый интерес в связи с тем, что они образуются из *элементарных базовых решений* и в определенной мере иллюстрируют один из интересных примеров феномена *самоусложнения* квантового характера. В качестве достаточно интересного упражнения читателю рекомендуется убедиться в принадлежности элементов из множества ***S(3)∪S(4)*** решениям ***Ш-***проблемы и найти по крайней мере по одному *базисному*, *производному* и просто решению ***Ш-***проблемы.

Для моделирования процесса генерации указанных фигур ***T(k)*** был определен ***специальный*** тип *классических* ***2-ОС***. Детальный анализ *динамики* конечных ***КФ*** в такого типа структурах, который базируется на исследованиях глубоких свойств их ***ЛФП*** $\sigma^{(25)}$ и ***ГФП*** $\tau^{(25)}$, позволил доказать, что для каждого допустимого значения ***k>2 Ш-***проблема имеет положительные ***S(k)-***решения. Тогда как используя соответствующие *классических* ***2-ОС*** совместно с компьютерным симулированием, оказалось возможным получить несколько довольно интересных свойств решений ***Ш-проблемы***, детализирующих их структуру. Общий результат в этом направлении представляет следующая основная теорема [5,9,54-56,81,88,90,536].

<u>Теорема 162</u>. Пусть S(k), D(k) и B(k) будут соответственно множествами всех, производных и базисных решений Ш-проблемы для некоторого значения $k \in M$. Тогда для каждого допустимого значения k>2 множество S(k) непусто, а для каждого допустимого целого значения k>10 имеет место следующее соотношение, а именно: #S(k) > #B(k), где #R – мощность множества R.

Таким образом, данная теорема дает полное решение ***Ш-***проблемы, сформулированной более ***60*** лет тому назад. Для исследования целого ряда количественных характеристик решений этой проблемы использовалось компьютерное симулирование посредством специальной программы, составленной на языке *Basic* для отечественного ***ПК ИСКРА-226*** [6,90]. Для этого симулирующая ***Ш-***проблему классическая ***2-ОС*** погружалась в программную среду, позволяющую проводить с ней различного рода экспериментальные исследования в интерактивном режиме с учетом ряда специфических черт симулирующей структуры. Оперативно проводился *визуальный мониторинг хода* эксперимeтального исследования. Использование комбинированных методов (*компьютерное моделирование и теоретический анализ соответствующих классических* ***2-ОС)*** позволило получить ряд интересных оценок для всех типов решений ***Ш-***проблемы [5,54-56,88,90,536].

<u>Теорема 163</u>. Для каждого целого $k \in \{3+4t, 4+4t \mid t=0,1,2,..\}$ имеют место следующие определяющие соотношения, а именно:

$$\#S(k) \succ 2^{k-r(k)} \quad for \quad r(k) \le [k/2]; \qquad \#B(k) \ge \begin{cases} 2^{3t-2}, & if \quad k \in \{3+4t \mid t=1,2,3,...\} \\ 2^{3t}, & if \quad k \in \{4+4t \mid t=1,2,3,...\} \end{cases}$$

Подобные результаты имеют место и для производных D(k)-решений Ш-проблемы.

Следует отметить, ***Ш***-проблема может быть существенно обобщена следующим образом. Вместо двух символов {***0,1***} используется типичный для ***ОС***-моделей алфавит ***A***={***0,1,2,...,a-1***}, а элементы строки ***c(k)*** выбираются из алфавита ***A***. Тогда как элементы ***j***-й строки длины ***(k-j+1)*** получаются из элементов ***(j-1)***-й строки длиной ***(k-j+ 2)*** по следующему простому рекуррентному правилу:

$$p(j, i) = p(j-1, i) + p(j-1, i+1) + 1 \ (mod\ a); \qquad (i=1 .. k-j+1; j=2 .. k) \tag{64}$$

В результате чего генерируется треугольная фигура ***T(k)*** из ***N = k(k+1)/2a*** символов из алфавита ***A***. А так как значения ***N*** являются целыми числами для бесконечного множества значений ***k***, то возникает следующий вопрос: ***Возможно ли для каждого допустимого k-значения определить фигуры T(k), которые будут содержать равные количества k(k+1)/2 вхождений символов из A алфавита?*** В данной постановке ***Ш***-проблема называется ***обобщенной***.

Вполне резонно предположить, что ***обобщенная Ш***-проблема может получать и более широкую интерпретацию, а именно: индекс соседства ***X***={***0,1,2,...,n-1***} для нее предполагается *произвольным*. В данной постановке допустимые значения ***k*** выбираются из множества ***M****={***n+t(n-1)*** | ***t=0,1,2,...***}, а рассматриваются ступенчатые фигуры ***R(k)***, содержащие ***L***=[***(n-1)***t^2***+(3n-1)t+2(n+1)***]/***2*** символов из алфавита ***A***. При сделанных предположениях *общая* ***Ш***-проблема сводится к вопросу наличия для каждого допустимого ***k***-значения ***R(k)***-фигуры, содержащей равное число ***L/a*** вхождений из ***A***-алфавита. Между тем, обобщение методов решения *классической* ***Ш***-проблемы позволяет нам сформулировать следующий основной в данном направлении результат [5,9,54-56,81,88,90,536].

<u>Теорема 164</u>. Для случая произвольного алфавита A={***0,1,2, ..., a-1***} ***и допустимого значения k≥2a обобщенная Ш-проблема имеет не менее 2a положительных решений. Количество G(k) решений обобщенной Ш-проблемы при A***={***0,1,2***} ***и допустимых значениях k∈***{***2+3t, 3+3t*** | ***t=1,2,3, ...***} ***будет удовлетворять соотношению G(k) > 2^{k-1}. Для каждого допустимого целого k∈M*, алфавита A и индекса соседства X***={***0,1,2, ..., n-1***} ***общая Ш-проблема имеет не менее 2k решений.***

В заключение раздела следует отметить, что результаты теорем ***162-164*** можно обобщать также и на случаи высших размерностей и рекуррентных правил ***(64)*** более общего вида. Немало других результатов исследования в данном направлении обсуждаются в работах [54-56,88,90].

8.1.2. Решение одной проблемы С. Улама из теории чисел

Эвристическое исследование проблемы роста уже в случае двух и трех измерений показывает все многообразие растущих фигур, которое достаточно сложно удовлетворительно характеризовать формальными методами. Поэтому с целью упрощения исследования данной проблемы ***С. Улам*** попытался ввести соответствующие определения в *одномерном* случае с надеждой, что некоторые *основные* свойства так называемых *последовательностей однозначно определенных сумм* ***(ПООС)*** [225] помогут прояснить картину в данном направлении [1,3,5,123,128,220]. Однако не столько с точки зрения *формальной* проблемы роста, сколько в связи с теорией чисел данная проблема получила большую известность и привлекла к себе внимание целого ряда исследователей. Основная суть данной проблемы достаточно проста и сводится к следующему.

На множестве ***M***={***1,2,3, ...***} целых положительных чисел определяется простая *бинарная* операция ***φ: x+y ⇒ z***, где ***x,y,z∈M***. Элементы ***z*** образуют множество ***M*⊂M***. На операцию φ накладываются следующие ограничения: ***(1)*** начав с чисел, равных ***a*** и ***b*** ***(a<b)***, все последующие элементы ***z=x+y*** получаем в виде суммы каких-либо двух *предыдущих* элементов ***x, y∈M*** из ранее уже полученной последовательности, однако не включаем в них те суммы, которые возможно получать более чем одним способом; ***(2)*** сами с собой числа не складываются и в сложении *должен* участвовать самый правый элемент сформированного отрезка ***(a,b)*** у ***ПООС***. Полученную таким образом числовую последовательность будем называть ***ПООС(a,b)***. В частности, первыми двенадцатью элементами ***ПООС(1,2)*** являются следующие натуральные числа, а именно: ***1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28***.

Близнецами в ***ПООС(a,b)*** будем называть пары смежных элементов, отличающихся между собой по значению на величину ***p=p(a,b).*** В дальнейшем любые множества пар *близнецов* будем просто обозначать ***Б(p).*** Например, ***Б(a+b) –*** множество пар близнецов вида ***p(a,b)=a+b.*** Первоначальная постановка проблемы ***С. Улама*** состоит в определении мощности множества ***Б(2)*** для ***ПООС(1,2),*** т.е. пар *смежных* элементов множества ***M*,*** отличающихся по значению на **2.** В этой связи ***С. Улам*** выдвинул гипотезу о *бесконечности* множества ***Б(2).*** Нами данная проблема исследовалась в *более* общей ее постановке, для чего потребуется ввести ряд дополнительных определений.

Дополнительно к последовательности ***ПООС(a,b)*** будем рассматривать последовательность типа ***ПООС1(a,b),*** отличающуюся от первой только тем, что мы не потребуем обязательного участия в бинарной **φ**-операции правого крайнего элемента уже сформированного отрезка ***(a, b)*** у ***ПООС.*** Отметим, что оба приведенных варианта ***ПООС*** наряду с самостоятельным интересом в теории чисел имеют ряд довольно интересных биологических интерпретаций, связанных с проблемой роста, формализованной для простейшего одномерного случая. Относительно к этой проблеме нами исследовались следующие вопросы поведения ***ПООС*** [1,3,5,88,90], а именно:

- определение ***частичных плотностей ПООС,*** начиная с заданного элемента***;***
- степень роста ***значений элементов ПООС,*** начиная с заданного элемента***;***
- изменение частичных плотностей ***пар близнецов*** относительно всей ***ПООС;***
- изменение расстояния между ближайшими ***парами близнецов*** в ***ПООС;***
- оценка количества ***пар близнецов*** в заданном отрезке ***ПООС.***

При этом, все перечисленные вопросы относятся как к последовательности вида ***ПООС(a,b),*** так и к ***ПООС1(a,b)*** при произвольных значениях целых положительных чисел ***a*** и ***b.***

Первые наши исследования по ***ПООС-***проблематике основывались на одной довольно простой классической ***2-ОС*** с использованием *компьютерного* симулирования на ЭВМ второго и третьего поколений [1,3]. Дальнейшее развитие ***ОС-***модели в совокупности с использованием развитого симуляционного интерактивного пакета ***POOS*** для ***IBM-***совместимых ***ПК*** позволило достаточно существенно продвинуть решение данной проблемы [6,15]. Основные результаты, полученные в данном направлении, можно охарактеризовать следующим образом.

Прежде всего, рассмотрим более *сложный* случай последовательности ***ПООС1(a,b).*** К сожалению, алгоритма формирования ***k-***го элемента множества ***M* (****кроме естественного алгоритма генерации*, *лежащего в основе определения последовательности****)*** обнаружить пока не удалось. Между тем, было установлено, что *любая* ***ПООС1(a,b)*** обладает *бесконечным* множеством пар близнецов по крайней мере одного из следующих типов, а именно: ***Б(a), Б(b)*** или ***Б(a+b).*** Показано, что если a_k есть ***k-***й элемент ***ПООС1(a, b),*** то ***k-***м элементом последовательности ***ПООС1(da, db)*** будет число da_k. Это свойство сохраняет силу также для последовательностей типа ***ПООС(a, b).***

Совершенно другая картина имеет место в случае последовательностей ***ПООС(a, b),*** где удалось получить практически исчерпывающие решения целого ряда вариантов обобщенной проблемы ***С. Улама.*** Например, ***ПООС(1,b)*** при ***b≥5*** обладает бесконечными множествами ***Б(b)*** и ***Б(b+1)*** пар близнецов, а ее элементы a_k вычисляются по простым рекуррентным формулам, а именно:

$$a_k = \begin{cases} b+k-2, & if \quad k \in \{3, 4, \ldots, b+2\} \\ 4*b-2, & if \quad k = b+3 \\ (k-b+1)*b+[(k-b-3)/2]-2, & otherwise \end{cases}$$

Плотность этой последовательности относительно множества ***N*** составляет величину ρ***=2/(2b+1).*** ***ПООС(a,b)*** при ***a>1*** и ***b/a-***[***b/a***]***>0*** имеет *бесконечное* множество ***Б(a)*** пар близнецов, а ее плотность относительно множества ***N*** составляет величину ρ ***= 1/a.*** Элементы данной последовательности, начиная с номера $k \geq 3$, вычисляются по несложной рекуррентной формуле $a_k = b + (k-2)a$. В наших книгах [9,15,54] можно найти целый ряд других интересных примеров ***ПООС(a,b)***, для которых можно установить *явные* функциональные соотношения вида $a_k = F(k,a,b)$ и выяснить ряд других интересных поведенческие свойства такого типа последовательностей.

Для характеристики поведения ***ПООС(1,2)***, т.е. классической проблемы ***Улама***, а следовательно, и ***ПООС(a,2a)***, поступаем следующим образом. Наряду с множествами K и $A(k)$ (*соответственно номеров* k *и значений элементов* a_k *последовательности*) определяем множество P разностей в виде $\Delta_k = a_{k+1} - a_k$ (*изменение значений элементов* ***ПООС***). Оказывается, что структура множества P более удобна для исследования. А именно, начиная с номера $k=14$, в множестве P прослеживается уже вполне определенная закономерность.

Будем называть элемент $\Delta_k \in P$ ***скачком***, если $\Delta_k \neq \{2,8\}$. *Нарастающим скачком* назовем такой $\Delta_k \in P$ элемент, который имеет *максимальное* значение среди всех скачков Δ_k $(j<k)$. Нарастающие скачки не ограничены сверху и их значения растут с ростом k-*значения*. Интервал из четырех элементов $<2,8,2,\Delta_k>$ (Δ_k – *скачок, не обязательно нарастающий*) будем называть *базовым*. Можно показать, что начиная с номера $k=14$, все множество P состоит лишь из *базовых* интервалов, прилегающих друг к другу, т.е.

$$P = \{<2, 8, 2, \Delta_1>, <2, 8, 2, \Delta_2>, <2, 8, 2, \Delta_3>, <2, 8, 2, \Delta_4>, ..., <2, 8, 2, \Delta_j>\}$$

Следовательно, исследование множества P сводится к исследованию поведения подмножестства $P1 = \{\Delta_k\}$ его скачков. Можно показать, что распределение нарастающих скачков во множестве P подчиняется определенной *закономерности*, позволяющей выявить следующее функциональное соотношение $a_k = F(k,d)$ для ***ПООС(d,2d)*** [5,8,9,15,88,90]. Это позволяет получить полное решение классической проблемы ***С. Улама***.

<u>Теорема 165</u>. Последовательность однозначно определенных сумм ПООС(1,2) имеет бесконечное множеством Б(2) пар близнецов, а ее предельная плотность относительно множества N целых чисел определяется следующим соотношением, а именно:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{4*(2^{k+2} - 4) + 14}{(12 + P_o)*(2^{k+2} - 4) + 72*P_o*5^{2k-10}} = 0$$

Для экспериментального исследования ***ПООС*** различных типов была разработана специальная симуляционная программа на алгоритмическом языке *PL/1* в *ОС/ЕС* для *ЕС ЭВМ* [9,320], которая позволила получить целый ряд очень интересных эмпирических результатов. В частности, было показано, что частичные плотности ***ПООС(1,2)*** монотонно стремяться к пределу в соответствии с эмпирической формулой $r(k) = 14/k^4 + m$ $(0 \leq m < 0.002)$, тогда как скорость сходимости к данному пределу определяется эмпирической формулой $\Delta(k) = 1.15*10^3*k^{-2.31}$. Более того, реализация на *ЭВМ* в определенной степени оптимального алгоритма, позволяющего исследовать достаточно важные аспекты *динамики* ***ПООС***, может послужить хорошим примером сложной во временном отношении задачи. В этом плане удалось получить удовлетворительную эмпирическую оценку *временной* сложности задачи в виде $t(p) = 4.472*10^{-6}*p^{2.92}$, где p – размер активной *информационной* базы решаемой задачи. Представляет определенный интерес исследование целого ряда других типов числовых последовательностей, в определенной мере имеющих хоть и весьма отдаленные формальные аналогии с процессом роста и другими биологическими феноменами в *одномерном* случае. В данном направлении в настоящее нами исследуется ряд весьма интересных числовых последовательностей, которые можно с определенной степенью формализации ассоциировать с некоторыми биологическими феноменами в одномерном случае.

Полученные нами результаты по *обобщенной* проблеме ***С. Улама*** наряду с чисто математическим представляют интерес также и в плане исследования формальных моделей роста в простейших одномерных случаях, а также и с точки зрения прикладной теории сложности вычислительных алгоритмов и прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики в целом.

8.1.3. Алгебраическая система для полиномиального представления локальных функций перехода в классических ОС-моделях

Исследование целого ряда типов *дискретных параллельных динамических систем* **(ДПДС)**, включая ***ОС***-модели, тесно связано с изучением свойств их ***ЛФП***, которые представляют собой ***а***-значные логические функции ***(а-ЗЛФ)***. Среди различных подходов к изучению данных функций особое место занимает алгебраический подход, при котором любую ***а-ЗЛФ*** можно взаимно однозначно представить некоторым алгебраическим *полиномом* по ***(mod a)*** максимальной степени ***n(a-1)*** над полем ***A***, где ***а-ЗЛФ*** – любое отображение $R^{(n)}: A^n \to A$. Между тем, в случае составного ***а***-числа далеко не все ***а-ЗЛФ*** могут быть представлены в такой полиномиальной форме, а точнее «*почти все*» функции не имеют данного представления. А так как алфавит ***А*** в ***ОС***-моделях может быть произвольным, то возникает достаточно актуальный вопрос распространения алгебраического метода исследований ***ЛФП*** на общий случай алфавита ***А***={***0,1,2, ..., а-1***} внутренних состояний.

В этой связи возникает интересная задача: ***Можно ли определить алгебраическую систему (АС), допускающую полиномиальное представление а-ЗЛФ в алфавите А при а-составном подобно случаю а-простого?*** В результате проведенных исследований была определена ***АС*** [5,8,9,15,84], описание которой представлено в разделе ***3.2***, допускающая для «*почти всех*» ***а-ЗЛФ*** указанного типа полиномиальное представление по ***(mod a)*** для случая составного ***а***-модуля. В такого типа $AC=<A_a; +; \#>$ операция **(+)** определяет классическую операцию *сложения* по ***(mod a)***, а операция **#** – *умножение* согласно табл. ***5***. Результат полиномиального представления ***а-ЗЛФ*** формулирует теорема ***62***. Данная теорема сыграла важную роль в исследованиях ***ДПДС*** для случая составного ***а***-модуля и позволила получить целый ряд интересных результатов в ***ТОС***-проблематике, часть из которых была представлена выше. Следует отметить, что *различия* между определенной нами $AC=<A_a; +; \#>$ и классической системой $AC^*=<A_a; +; x>$, в которой операциями **(+)** и **(x)** являются соответственно обычные бинарные операции сложения и умножения по ***(mod a)***, являются очень существенными и детально обсуждаются в [9,84]. Например, отличием нашей ***АС*** от *классической* ***АС**** является то, что для нее не соблюдается закон дистрибутивности, что в целом ряде случаев может достаточно существенно затруднять проведение основных операций в полиномиальной ***АС***-арифметике [5,88,90,536,567].

Этот и целый ряд других обстоятельств сделали довольно актуальным разработку специального небольшого программного пакета *Polynot* для автоматизации работы исследователя с системой $AC=<A_a;+;\#>$. Созданный для отечественного ***ПК ИСКРА-226*** пакет (*затем адаптированный на ряд других популярных PC платформ таких как Windows и Linux*) позволяет не только автоматизировать процесс представления произвольных ***а-ЗЛФ*** в полиномиальной форме $P_\#(n)$ ***(mod a)*** вида ***(34)***, но и очень просто выполнять все необходимые *базовые* и наиболее часто используемые операции в полиномиальной арифметике, определяемой указанной ***АС*** [6]. Данное программное средство оказалось довольно полезным в ряде приложений, использующих указанную полиномиальную арифметику на основе $AC = <A_a; +; \#>$.

Исследование проблемы декомпозиции ***ГФП*** наряду с целым рядом других фундаментальных вопросов динамики *классических* ***ОС***-моделей алгебраическими методами базируется, например, на возможностях полиномиального представления соответствующих им ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ над полем ***A***, где ***A*** – алфавит внутренних состояний ***ОС***-модели. В главе ***7*** результаты исследования *проблемы* *декомпозиции* алгебраическими методами рассматривались относительно вышеупомянутой ***АС*** и относительно классического поля ***А*** Галуа из ***а*** элементов ***(а – простое)***. Пусть теперь ***АС*** $<A_a;+;x>$ является полем Галуа из $a = p^k$ элементов ***(р – простое и k – любое положительное целое)***. Тогда для задачи полиномиального представления ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ над данными полями определенный интерес представляет следующий основной результат [5,53,88,90].

<u>Теорема 166</u>. В поле Галуа из $a=p^k$ элементов (р - простое, k - любое положительное целое число) имеют место следующие определяющие соотношения, а именно:

$$\boxed{(xy)^{a^m} = xy; \quad (x \mp y)^{a^m} = x \mp y; \quad \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^{a^m} = \sum_{j=1}^{n} x_j; \quad \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)^{a^m} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ c_j, x_j, x, y \in A; \quad j = 1..n}$$

Для каждых р-простого и целого X>p справедливо сравнение $X^{p+1} = X^2$ (mod p). Если m – целое и $X^k = X^q$ (mod m) для X<m (2≤q<k≤m), то данное сравнение справедливо и при всех значениях X≥m; если же q∈{0,1}, то $X^{k+1}=X^{q+1}$ (mod m) при X>m. В случае, если р – нечетное простое, m – целое и $a=p^m$, то $X^{a-a/p+m} = X^m$ (mod a) и $X^p = X$ (mod 2p). Если а – простое число, то будет справедливо следующее сравнение, а именно: $M = \sum_{j=1}^{a} X^j + X \pmod{a}$ при $X \neq 1$ и $M = 0$, в противном случае.

Результат данной теоремы может оказаться довольно полезным как при исследованиях *динамики* классических ***ОС***-моделей алгебраическими методами, так и при решении целого ряда и других математических задач из алгебраической теории *чисел* [54]. В связи со сказанным в общем случае представляет интерес следующий вопрос. Вполне очевидно, для каждого целого ***a>0*** существуют минимальные положительные целые ***p*** и ***k*** такие, что $X^p = X^k$ ***(mod a)*** для ***a≥ p > k≥1*** и с условием ***X∈A={0,1, ..., a-1}***. При этом, ***p=p(a)*** и ***k=k(a)*** являются функциями от вида разложения числа ***a*** на простые множители. При этом, вторая часть теоремы ***166*** дает ответ для двух вполне конкретных случаев $a=p^m$ и ***a=2p*** при ***p***-простом нечетном. Было бы интересно получить явные значения для выражений ***p(a)*** и ***k(a)*** как функции разложения ***a***-числа на простые множители для всех других либо наиболее интересных случаев.

Исследование вопросов динамики *различного* класса ***ОС***-моделей в качестве побочных позволило получить и ряд сугубо математических результатов. Так, *статистические* методы исследования для ***ОС***-моделей привели к созданию нового аналитического метода вычисления инвариантных мер одного класса *хаотических* систем [160]. Тогда как целый ряд исследований *асимптотических* свойств *стохастических* ***ОС*** [21] в качестве сопутствующих позволил сформулировать достаточно интересные результаты, в частности, по стохастическим *регулярным* матрицам, один из которых сводится к следующему, а именно.

<u>Предложение 34</u>. Пусть G*(i,j) – матрица, полученная из (nxn)-матрицы G = $\{g_{ij}\}$ вычеркиванием i-й строки j-го столбца. Если матрица G является стохастической, регулярной и g_{kk}=1, то для нее имеет место следующее определяющее соотношение, а именно:

$$\{g_{ik}\}[E - G^*(i,j)] - 1 = \{v = 1\} \qquad (i, j = 1 \,..\, n;\ i = k)$$

где все использованные обозначения соответствуют общепринятым в теории матриц.

Наряду с представленными результаты исследований по ***ТОС***-проблематике позволили также в качестве «*побочных*» получить целый ряд *других* довольно интересных результатов (*в том числе и сугубо математических*) различного уровня значимости, общности и применимости, с которыми можно ознакомиться, в частности, в [54-56,114]. В настоящее время подход на основе ***ТОС*** в свете ряда ранее полученных «*побочных*» результатов используется также в решении некоторых задач из теории чисел, фрактальной геометрии, оптимизации вычислительных алгоритмов для *ЭВМ* с массивным параллелизмом, и в целом ряде других интересных приложений [536,567].

8.2. Некоторые аспекты использования ОС-моделей в биологических науках

Последнее двадцатилетие характеризуется особенно интенсивным проникновением новейших математических концепций и методов в биологические науки. И в первую очередь это связано именно с дальнейшим становлением теоретической и математической биологий (*при этом в оба данные понятия мы вкладываем тот же смысл, что и в аналогичные понятия, относящиеся к предмету современной физики*), а также с массовым использованием современных вычислительных средств, позволяющих с очень высоким уровнем наглядности исследовать разнообразные биологические *модели*. Наиболее интенсивные, интересные и очень перспективные попытки предпринимаются в исследовании развивающихся *биологических* систем. Математическому анализу был подвергнут один из наиболее сложных и интригующих разделов современной биологии – *биология развития* живых систем.

Рассматривая в разделе вопросы дискретного моделирования биологии развития на основе ***ОС***-концепции, следует в то же время иметь в виду, что данный аппарат можно достаточно успешно использовать для построения и исследования целого ряда других *биологически* мотивированных формальных моделей, например, из эволюционной и популяционной биологий, иммунологии, нейробиологии, эпидемиологии, экологии и многих др. При этом следует иметь в виду, что ***ОС***-концепция носит существенно более общий характер, вовлекая в свою *модельную среду* основную медико-биологическую проблематику наряду с целым рядом *биофизических* направлений. При этом, обсуждение подобных и связанных с ними вопросов можно найти в цитированной выше литературе, а также в сети *Internet* по соответствующим ключевым словам.

8.2.1. Основные предпосылки модельного подхода в биологии развития

Первые попытки математизации данного раздела биологии встретили значительные трудности, а первые полученные результаты оказались слишком тривиальными, чтобы брать их за основу в дальнейших исследованиях. Именно поэтому все ***последующее*** развитие исследований пошло по пути создания отдельных математических моделей, отражающих те или иные аспекты биологии развития. К настоящему времени накопилось значительное число таких моделей, реализующих с различной степенью адекватности те или иные биологические процессы и феномены *развития* живых организмов. При этом, для моделирования использовались различные подходы, анализ и обзор которых можно найти в работах [1,3-5,10,123,134,162,163,193,194,264,329-335,537], а также и в цитированных в них многочисленных источниках наряду с такими известными журналах, как «*Биофизика*», «*Journal of Theoretical Biology*», «*Mathematical Biology*», «*Mathematical Biosciences*» и др. В настоящем разделе характеризуются основные подходы к моделированию биологии развития с кибернетической точки зрения с акцентом на дискретном аспекте моделирования. В этом плане особое внимание привлекает подход на основе *двух базовых* концепций – ***ОС***-моделей и ***L***-систем *Линденмайера* [1,3-5,23,26,27,31,33,46,88,114,136,163,171,201,203,233,251,264,333,536,567].

Развитие *организмов*, прежде всего, высших животных, является очень таинственным процессом:

Как может из единственной клетки – зиготы, вырасти весь организм, состоящий из огромного количества клеток, организованных в чрезвычайно сложную саморегулирующуюся систему?

Преклонение перед данным *феноменом* еще более возрастает, если вспомнить, что процесс роста существенно автономен, все клетки в организме генетически идентичны, сам процесс развития строго контролируем изнутри самого организма. Здесь следует сказать несколько слов о каждом из этих аспектов развития отдельно. Говоря об автономности процесса развития, прежде всего, мы имеем в виду тот важный факт, что вся информация, необходимая для развития организма, содержится в исходной клетке-зиготе; тогда как внешняя среда обеспечивает процесс развития только энергией и строительными материалами, а не информацией, необходимой для процесса собственно развития. Действительно, зигота определенного вида, какое бы то ни было *окружение* (*непосредственно не препятствующее самому процессу развития*), всегда будет превращаться в *новый* организм того же самого вида, что и его родители

Рост и обновление организма осуществляются, главным образом, через непрерывный процесс самовоспроизведения клеток в организме, между тем, дифференциация клеток в процессе роста значительно более сложна для понимания, так как по общему мнению современных *биологов* все клетки содержат один и тот же набор генетических правил – новые клетки будут генотипично идентичными своим предшественникам. В данной связи возникает следующий важный вопрос:

Как клетки становятся отличными друг от друга, развиваясь в тщательно выработанные и устойчивые пространственные формы?

Более того, весь процесс развития строго контролируем изнутри таким образом, что различные части развивающегося организма развиваются в определенных пропорциях относительно друг друга и организма в целом. Более того, организм в период развития (*и даже после этого*) в весьма значительных пределах способен устранять *повреждения*, вызванные внешними причинами, т.е. организм в определенных диапазонах способен к регенерации. Естественно, процесс развития использует строгие механизмы контроля, регуляции и адаптации. Между тем, на сегодня мы не знаем лучшего ответа на все эти вопросы, как решение аналогичных проблем для *искусственных* систем, т.е. использование *модельного* принципа исследования процессов развития. Следует при этом отметить, что изучение феномена развития привело ряд исследователей к весьма важному выводу, что организм нельзя рассматривать как некоторую искусственную машину – ***автомат***.

Поэтому с точки зрения кибернетики, общей теории систем да и самой биологии весьма важно попытаться выяснить важный гносеологический вопрос, а именно:

Может ли машина вообще развиваться подобно живым системам и, если может, то каким она образом может этого добиться?

Это важно знать по двум основным причинам: *во-первых*, если машина не может развиваться, то сохраняет определенную силу аргумент о том, что живые системы должны обладать некоторым специфическим феноменом. В таком случае аргумент кибернетики о том, что живые и неживые системы могут быть определены в терминах одних и тех же принципов, был бы поставлен под сомнение. *Во-вторых*, при положительном ответе, т.е. если были бы поняты принципы развития неживых систем и проведена удовлетворительная аналогия их с живыми системами, то наряду с весьма важными революционизирующими применениями в технологии, мы могли бы получить удовлетворительный аппарат исследования всех *живых развивающихся* систем, значение которого трудно было бы переоценить.

Биологическое развитие включает два важных феномена: *рост организма* и *дифференциация* клеток, его составляющих. *Рост*, как известно, означает простое *увеличение* размера организмов, главным образом, за счет управляемого *самовоспроизведения* его клеток, тогда как процесс *дифференциации* является более сложным явлением, поэтому весьма целесообразно выделять по крайней мере *два* ее типа – ***пространственную*** и ***фенотипическую***, которую ***М. Аптер*** называет ***функциональной*** [330]. Так, в растущей ткани можно выделить изменение формы и конфигурации межклеточной связи (*пространственная дифференциация*) наряду с увеличением дифференциации отдельных ее типов клеток (*фенотипическая дифференциация*). Необходимо отметить, что для *пространственной* дифференциации в биологии развития существует устоявшийся термин *морфогенез*, однако для целей нашего моделирования более естественным представляется использовать именно первый термин. Конечно, фенотипическая дифференциация имеет место также и в пространственной дифференциации, между тем, с целью большей *прозрачности* задач моделирования она нами не будет приниматься в рассмотрение при условии *главенствующей* роли именно *пространственной* дифференциации [4,5,27,31,33,46,88,90,536,567].

Однако *развивающийся* организм характеризуется не только возможностью достижения сложной *пространственной* и *фенотипической* дифференциации, но также и в большей или меньшей мере наличием способности к регуляции и регенерации в процессе своего развития и последующего функционирования. При этом, под *регуляцией* понимается возможность организма развиваться в *нормальную* особь, даже в случае возникновения помех в процессе своего развития (*например, при удалении или перестройке клеток, исключая критические случаи, летальные для организма*). Тогда как под *регенерацией* мы понимаем возможность организма восстанавливать (*в определенный пределах*) любое нарушение, которое организм получил в процессе своего полного развития.

Несмотря на важность понимания процессов биологического развития, включающих в себя как *пространственную*, так и *фенотипическую дифференциацию*, *регуляцию* и *регенерацию*, а также и сам собственно феномен *самовоспроизведения*, *первые* попытки достичь успеха в данном направлении можно отнести к первому этапу ***модельного подхода***, который характеризуется моделированием *отдельных* феноменов *общего* процесса развития, причем для моделирования используется самая разнообразная техника. Общим для всех этих моделей являлся сам принцип исследования:

Формализация исследуемого биологического феномена ⇒ построение его конкретной модели ⇒ сравнительный анализ функционирования построенной модели и реального биологического феномена на предмет их адекватности по тем либо иным выбранным критериям

Основную роль *первого* этапа *моделирования* можно охарактеризовать тем, что целому ряду очень сложных феноменов общего процесса биологического развития была дана удовлетворительная формализация, которая затем корректировалась на базе анализа многочисленных формальных моделей [1,3-5,23,26,27,31,33,123,136,162,330-338,343-351,536,567].

Последующий анализ целого ряда моделей позволил по-новому взглянуть на некоторые важные регуляторные механизмы процесса развития. Однако мы имели целый ряд несвязанных общей теоретической основой моделей. Естественно, данное положение не способствовало выработке ***единого*** аппарата моделирования в биологии развития. Между тем, уже в рамках первого этапа зародились два *формальных* аппарата моделирования некоторых феноменов процесса развития:

клеточные автоматы и развивающиеся параллельные грамматики Линденмайера

Клеточные автоматы, получившие впоследствии русскоязычный синоним *Однородные структуры* (***ОС; HS –*** *Homogeneous Structures*); в русскоязычную терминологию было введено с нашей подачи (*наряду с ныне общепринятой терминологией в данной области*) [1,3,19,20,119], впервые были реально использованы ***Дж. фон Нейманом*** для изучения проблемы самовоспроизведения [124,128], тогда как параллельные развивающиеся грамматики были *впервые* введены ***А. Линденмайером*** с целью моделирования процессов *морфогенеза* растений [3,163,251,264,336-338] и впоследствии получили название ***L-систем***. В настоящее время и ***ОС***, и ***L-системы*** представляют собой наиболее общий и популярный аппарат дискретного моделирования в биологии *развития* [3,5,163,251,264,336-338, 536], тогда как математическая теория обоих формальных средств моделирования очень хорошо развита и позволяет формальными методами исследовать на клеточном уровне такие феномены развития как рост, самовоспроизведение, дифференциация, регуляция и регенерация. Наряду с этими проблемами ***ОС***-модели позволяют удовлетворительно изучать такие вопросы развития, как сложность *развивающихся* систем; процессы, управляющие *ростом*, *регуляцией* и *регенерацией*; устойчивость процессов развития, необходимые и достаточные условия *регуляции* и *регенерации* и т.д. [1,3-5,23,26,27,31,33,54,90,536]. Вместе с тем, аппарат ***ОС***-моделей вызывает также ряд очень существенных сложностей при изучении в их среде некоторых биологически мотивированных феноменов. Основные трудности данного плана связаны именно с большой чувствительностью ***ОС***-моделей к такому важному фактору как *размерность*, а также с серьезными ограничениями на возможность *деления* клеток внутри моделируемого *развивающегося* организма, т.е. с наличием весьма жесткой системы координат в моделирующей ***ОС***-среде.

Учитывая существенные сложности моделирования в ***ОС***-среде ряда биологических феноменов и процессов, ***А. Линденмайер*** ввел свои системы, известные ныне под названием ***L-систем*** [3-5,9, 162,163,251,260,336]. В рамках ***L***-систем для моделирования морфогенеза и растущих структур ***А. Линденмайер*** предложил *ветвящиеся алгоритмы*, а рядом авторов для моделирования развития и роста были введены графические порождающиеся системы [337]. На основе ***L***-систем был затем реализован целый ряд весьма интересных растущих алгоритмов, хороший обзор которых может быть найден в прекрасной работе [338]. В последнее время на базе ***L***-систем разрабатывается все большее число моделей как собственно роста, так и роста в составе общего феномена развития. Между тем, несмотря на *большую* предпочтительность ***L***-систем в качестве среды моделирования в биологии развития, ***ОС***-модели представляют собой весьма интересное средство исследования многих процессов и феноменов развития по той причине, что они довольно удовлетворительно отвечают клеточной природе биологических систем и позволяют создавать весьма эффективные модели развития, весьма качественно *визуализируемые* средствами современных вычислительных средств. Можно со всей определенностью констатировать, что ***ОС-модели*** и ***L-системы*** хорошо дополняют друг друга, стимулируя создание современного аппарата моделирования процессов в биологии развития, наследующего лучшие черты обоих указанных систем [5,88,90,536,567].

Поэтому вполне уместно ввести понятие ***L-систем***. Пусть ***B*** есть некоторый конечный алфавит множества состояний клетки, а ***B**** обозначает множество всех одномерных слов из элементов ***B***-алфавита; ***B**** содержит и пустое слово. Тогда ***L-система*** – упорядоченная четверка $L=\langle B,b,\sigma,bS\rangle$, где: $b\in B$ – постоянное воздействие *внешней* среды на слово (*клетку*); σ – функция, определяющая по состоянию любых *трех* прилегающих клеток непустое конечное множество слов в алфавите $B\backslash\{b\}$, на которые заменяется внутренняя клетка из *трех* прилегающих; ***bS*** – начальная клетка, из которой и начинается весь процесс развития. Итак, рассматривается система параллельных σ-правил, которые порождают из одного начального однобуквенного слова (*зиготы*) множество одномерных слов (*имитирующих развитие организма*) в некотором конечном алфавите ***B***. *Правила* порождения слов допускают также и вставки любого числа букв в любые места слова; при этом, допускаются и *недетерминированные* переходы. Это обстоятельство и обеспечивает возможность моделирования процесса деления клеток внутри развивающегося биологического организма. В данном отношении ***L***-системы представляются более естественными для задач моделирования.

Таким образом, ***L***-системы существенно расширяют одномерные ***ОС***-модели в смысле множеств порождаемых ими слов. С точки зрения биологической адекватности они получают достаточно удовлетворительные интерпретации, отлично зарекомендовав себя при описании целого ряда биологических процессов и являясь в настоящее время, по-видимому, наиболее разработанным в математическом плане и адекватным в биологическом отношении *аппаратом* для многих задач дискретного моделирования в биологии развития [1,4,5,536]. В отношении же собственно самого аппарата ***L***-системы более абстрактны, чем ***ОС***-модели, хотя бы уже потому, что они не связаны жестко с системой координат и, по сути дела, являются одним из типов *параллельных формальных* грамматик, которые в настоящее время интенсивно изучаются [264]. При этом следует отметить, что и ***ОС***-модели могут рассматриваться как некоторый тип *параллельных формальных* грамматик (τ_n-*грамматики*; глава *5*). Несколько ниже мы более детально *проанализируем* как ***ОС***-модели, так и ***L***-системы на предмет их потенциальных возможностей в контексте моделирования биологии развития. Итак, имеющиеся у обоих систем недостатки предполагают насущную необходимость продолжения работ по созданию наиболее адекватного задачам биологического моделирования математического аппарата. В данном направлении ведутся довольно интенсивные проработки с использованием как междисциплинарных подходов, так и привлечением целого ряда известных специалистов, работающих в смежных областях [536,567].

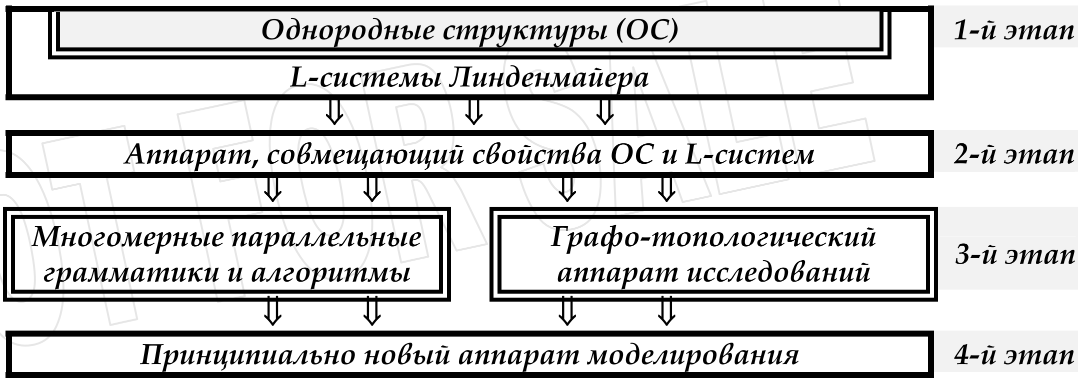


Рис. 24. Предполагаемая схема развития перспективного аппарата моделирования.

На рис. ***24*** представлены основные (*прогнозируемые*) этапы становления и дальнейшего развития дискретного модельного исследования в биологии развития и в ряде некоторых других разделах математической *биологии*. При этом, в дальнейшем нами делается акцент именно на дискретном аппарате моделирования, в связи с чем вне рамок рассмотрения оказался целый ряд достаточно интересных моделей развития непрерывного характера [1,4,5,536]. Далее обсуждаются наиболее интересные подходы и модели основных аспектов биологии развития на протяжении *нынешнего* **2-**го этапа моделирования, получившего наиболее яркое развитие в последнее время. С другими аспектами *моделирования* биологии развития можно детально ознакомиться в цитируемой выше литературе и содержащихся в ней многочисленных источниках.

Обсуждение начнем с проблемы моделирования такого общего для всего живого феномена как ***самовоспроизведение***. Данная проблема составляла краеугольный камень основных дискуссий о возможностях машин и живых систем, и явилась одним из основных катализаторов стимуляции исследований по абстрактным автоматам именно на предмет их возможностей как аналогов или даже заменителей развитых живых систем, включая самого человека. Естественно, актуальность данной проблематики весьма велика и носит чрезвычайно многоаспектный характер, включая и такой чрезвычайно сложный во всех отношениях вопрос, как проблема зарождения жизни и ее предназначения в общей системе мироздания.

8.2.2. Формальные дискретные модели процесса самовоспроизведения биологических систем

Упомянутый феномен *самовоспроизведения* является наиболее характерной чертой всего живого и неудивительно, что первые попытки *кибернетического* моделирования коснулись именно этого процесса. К детальному исследованию того, как в машине воплотить процесс *самовоспроизведения первым*, пожалуй, приступил ***Дж. фон Нейман***, который вскоре пришел к выводу, что программа построения машиной своей копии не может быть полной. Для получения полной программы ей необходимо дать описание не только самого автомата, но и программы [124]: потребовалось бы описание описания и так до бесконечности. Но ***Дж. фон Нейман*** избежал этой трудности, создав две машины, рассматривающие *описание* в двух различных аспектах. А именно, одна из машин – *копировальное устройство* (***КУ***), другая – *исполнительное устройство* (***ИУ***). Оба данных устройства работают в комплексе с *устройством синхронизации* (***УС***), управляющим работой каждого из них. *Программа самовоспроизведения* (***ПС***) должна описывать функционирование всех *трех* устройств ***КУ***, ***ИУ*** и ***УС***. Тогда *всю* машину можно описать формальным выражением ***КУ+ИУ+УС+ПС***. Если теперь такой машине дано ее полное описание, ***КУ*** копирует его, а ***ИУ*** производит все действия, необходимые для построения ***КУ***, ***ИУ*** и ***УС***. Результаты, полученные по молекулярной генетике, обнаруживают поразительные аналогии между вышеуказанными элементами машины ***Дж. фон Неймана*** и процессами в живой биологической клетке [536].

Ряд авторов рассмотрели проблему ***самовоспроизведения*** с чисто математической точки зрения. Так ***Дж. Майхилл*** [128] и ***А.Р. Смит*** [131] исследовали такую проблему с теоретико-рекурсивной точки зрения, а ***С. Улам*** [220] сформулировал проблему существования простой универсальной самовоспроизводящейся *матричной* системы, положительное решение которой предполагало бы существование данного типа формальных воспроизводящихся матричных систем. Между тем, в работе [16] мы доказали отсутствие универсальной воспроизводящейся матричной системы для достаточно большого ранга. Однако для случая *бесконечных* матриц данная проблема до сих пор остается открытой. На наш взгляд, существующие на сегодня эти *сугубо* математические модели, позволяя на формальном уровне исследовать только самый общий феномен *самовоспроизведения*, не в состоянии добавить что-либо новое к проблеме кибернетического моделирования *биологии развития*. В этом они сходны с механическими моделями самовоспроизведения [1,3-5,88,536,567].

Учитывая ограниченность применения механических и математических моделей, ***фон Нейман*** обратился (*по предложению* ***С. Улама***) к клеточным автоматам (*однородные структуры*; ***ОС-модели***). Концепция ***ОС*** позволила ***Дж. фон Нейману*** построить интересную клеточную модель, которая предоставляет возможность исследовать процесс самовоспроизведения формальными методами логики и теории абстрактных автоматов. Многие исследователи, работая по клеточной модели ***Дж. фон Неймана***, значительно ее улучшили и упростили; прекрасный обзор результатов в этом направлении можно найти в [1,3-5,8,46,128]. ***М. Арбиб*** [235] также обратил внимание на феномен самовоспроизведения, а его работа в данном направлении была выполнена в лучших традициях клеточной модели ***Дж. фон Неймана***. Однако она использует намного более сложные исходные компоненты, что позволяет существенно упростить ее программирование и снизить количество необходимых для процесса *самовоспроизведения* шагов. Следует отметить, повышенная сложность исходных компонент модели ***М. Арбиба*** не противоречит факту высокой сложности реальных клеток, участвующих в процессе развития реальных биологических систем. Был также изучен и целый ряд моделей самовоспроизведения, объединяющих механический и клеточный подходы.

Так, например, ***Р. Лэинг*** [339] предложил один *смешанный* автомат, способный к моделированию структуры любой машины, включая и самого себя. Данное свойство совместно с универсальной вычислимостью позволяет наряду с феноменом *самовоспроизведения* реализовать в таких моделях и самовосстановление. Предложенная модель имеет достаточно тесные аналогии с процессами, имеющими место в живых системах на макромолекулярном *уровне*. В данной связи ***Р. Лэинг*** [340] представил еще один интересный класс кинематических *молекулярных* машин, которые (*даже при условии, что их структура будет значительно упрощена*) сохраняют способность к универсальным вычислениям, воспроизводить свои описания и на их основе строить свои копии. ***Лэинг*** показал, как структурно упрощенная молекулярная машина может быть погружена в классические ***d-ОС*** и описал процесс самовоспроизведения такой машины, функционирующей в ***ОС***-*среде*. Данный подход формирует своего рода мосты между кинематическими моделями и моделями, которые были реализованы на основе ***ОС***-концепции. В работе [341] ***Р. Лэинг*** дал достаточно интересное обсуждение клеточной модели ***Дж. фон Неймана*** с биологической точки зрения. Аналогичные вопросы биологической интерпретации клеточных и автоматных моделей в биологии развития можно найти также в работах [1,5,88,90,332,536,567].

Так, в целях защиты от тривиальных случаев самовоспроизведения ***Дж. фон Нейман*** потребовал выполнения условия универсальной вычислимости для самовоспроизводящихся в ***ОС***-моделях конфигураций. Однако, ***Г. Херман*** [353] показал, что это требование не предохраняет от случаев тривиального самовоспроизведения. Это важное обстоятельство говорит о необходимости более внимательного подхода к выбору требований к конфигурациям ***ОС***-моделей, которые должны интерпретироваться как некоторые биологические процессы и феномены, тогда как к самим ***ОС*** как формальной среде моделирования биологических процессов и явлений. В этой связи весьма актуальным представляется следующий достаточно важный вопрос, а именно:

Существует ли другая вполне удовлетворительная мера сложности у самовоспроизводящихся конфигураций в ОС-моделях, не базирующаяся на понятии универсальной вычислимости?

Некоторые интересные графо-топологические подходы в данном направлении представлены в работах [1,3-5,8-10,88,90,536], а также в связи с проблемой сложности конечных конфигураций в ***ОС***-моделях (глава ***4***). Несмотря на определенные успехи в деле прояснения понятия сложности *конечных* конфигураций в ***ОС***-моделях, следует хорошо представлять себе настоящие проблемы. Реальный биологический организм развивается на основе информации, которая заложена в его *единственной* зародышевой клетке. Таким образом, для действительно *самоусложняющихся* систем количество информации в *самом начале* развития должно быть меньше количества информации, содержащейся в сформировавшейся системе, а для этого необходимо уметь оценивать оба такие количества информации и в оптимуме уметь прослеживать нарастание сложности в ходе самого процесса развития. Все это пока открытые и достаточно сложные проблемы, решения которых в ближайшее время, по-видимому, не предвидится.

В отличие от ***Дж. фон Неймана Э. Мур*** в своем исследовании ***ОС***-моделей самовоспроизведения не связывает себя с *универсальной вычислимостью* [274]. Определения ***Э. Мура*** охватывают только самую общую суть процесса воспроизведения, позволяя именно на ней сконцентрировать наше внимание (раздел ***3.2***). В данном направлении был получен целый ряд довольно оригинальных моделей, но все они представляют интерес только с самой общей точки зрения на сложнейший процесс самовоспроизведения, и эти модели не могут получать достаточно удовлетворительной *биологической* интерпретации. Действительно, исследование этого типа ***ОС***-моделей показывает, с одной стороны, что в них действительно имеет место своего рода аналог закона Мальтуса, т.е. количество потомков самовоспроизводящейся конечной ***КФ*** (*абстрактного организма*) не может расти быстрее имеющегося для них «*жизненного*» пространства – активной области пространства модели. С другой стороны, в данных ***ОС***-моделях имеют место и феномены, непосредственно присущие моделируемому процессу воспроизведения, но не имеющие биологических аналогов. Так, например, нами был обнаружен следующий интересный феномен, присущий ***ОС***-моделям самовоспроизведения в смысле Э. Мура [1,3-5,88,90].

Предположим, ***c1*** и ***c2*** (***c1≠***c2) есть достаточно сложные конечные ***КФ*** одного и того же размера в классических структурах ***2-ОС***. Тогда самовоспроизводящиеся в смысле Мура конфигурации ***c1*** и ***c2*** способны воспроизвести соответственно $M_1(t)$ и $M_2(t)$ своих копий за время t; более того, те же конфигурации ***c2*** и ***c1*** способны за это же время t воспроизвести $N_1(t)$ и $N_2(t)$ соответственно копий конфигураций ***c1*** и ***c2*** при наличии следующего определяющего соотношения, а именно:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_1(t)}{M_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{N_1(t)}{N_2(t)}=1$$

Подобные моменты необходимо иметь в виду при биологических интерпретациях ***ОС***-моделей на предмет их адекватности *моделируемым* явлениям и процессам. Вопросы исследования класса *линейных* классических ***ОС***-моделей, обладающих свойством универсальной воспроизводимости в смысле Мура, обсуждались в разделе ***3.2***. Интерпретируя теперь действия ***ГФП*** на некоторую конечную конфигурацию в ***ОС***-модели как воздействие процессов развития на представляемый ею некоторый абстрактный организм, можно говорить об определенной *устойчивости феномена воспроизведения* относительно влияния внешних воздействий на процесс развития. Эта аналогия, естественно, носит весьма общий характер. В этой связи следует упомянуть парадокс ***Э. Вигнера***

[343], утверждающий о том, что вероятность существования самовоспроизводящихся систем по существу равняется нулю. С другой стороны, ***Дж. Ричардсон*** [344] ввел понятия непрерывных и стохастических ***ОС***-моделей и определил в них процесс самовоспроизведения. И на этой основе ему удалось показать, что самовоспроизведение обладает определенной степенью *устойчивости*, что говорит о необходимости очень осторожного обращения с *парадоксами* типа, предложенного ***Вигнером***. О наличии устойчивых режимов функционирования ряда стохастических структур ***2-ОС*** говорят и наши исследования по асимптотическим свойствам данного типа структур [21], а также последние компьютерные эксперименты с данным классом структур [5,88,90,536].

В частности, наши экспериментальные исследования на совместимых ***ПК*** с вполне достаточной степенью достоверности показывают [54-56,90], ***ГФП*** $\tau^{(n)}$, представляемые в форме композиции конечного числа функций из некоторого достаточно широкого множества ***B***, перемежающихся функциями из множества ***M(A,d,G)***, определенного нами в разделе ***7.1***, в значительной степени сохраняют свойство *воспроизводимости* в смысле Мура конечных конфигураций. Таким образом, даже в таких «*игровых*» моделях развития, каковыми и являются ***ОС***-модели, рассматриваемый в них феномен самовоспроизведения обладает значительной степенью устойчивости к внешним воздействиям при весьма широких допущениях.

Из проведенного анализа формальных моделей ***воспроизведения*** следует, что само по себе такое моделирование не представляет, на наш взгляд, особых трудностей и не вносит в наши знания о природе данного феномена ничего принципиально нового, однако на этом пути был достигнут ряд положительных результатов, из которых отметим следующие, а именно:

♦ ***выяснилось, что требования, предъявляемые к этим самовоспроизводящимся искусственным системам, имеют прозрачную биологическую интерпретацию;***

♦ ***доказано, что существуют нетривиальные самовоспроизводящиеся искусственные системы, а также уточнен и формализован ряд понятий в данном направлении;***

♦ ***сам процесс моделирования процесса самовоспроизведения вызвал к жизни и такие объекты, как однородные структуры, явившиеся новой перспективной средой моделирования во многих физических, биологических и вычислительных приложениях, а также в других областях;***

♦ ***именно успехи в моделировании феномена нетривиального самовоспроизведения привлекли внимание многих исследователей из точных наук к проблеме кибернетического моделирования в биологических науках;***

♦ ***наконец, работы по клеточным моделям самовоспроизведения проложили своего рода мосты между математической биологией и вычислительными науками, что предоставляет хорошую возможность взаимно обогащаться идеями и полученными результатами обоим этим весьма приоритетным на сегодня естественно научным направлениям.***

В заключение настоящего раздела следует отметить, что все существующие на сегодня модели самовоспроизведения имеют довольно малое отношение к реальной проблеме биологического развития, так как «*родитель*» строит своего «*потомка*», а не «*потомок*» развивается сам на основе информации, полученной от «*родителя*» через его зародышевую клетку. А именно, клеточные модели самовоспроизведения демонстрируют лишь процесс воспроизведения многоклеточным организмом своей копии, однако они не показывают как *многоклеточный* организм может расти и развиваться из единственной зародышевой клетки. В этой связи можно сформулировать очень интересную и достаточно сложную проблему, а именно:

Как описать в рамках ОС-аксиоматики модель развития из единственной клетки достаточно сложной пространственно дифференцированной конфигурации, способной в определенной мере к регуляции и регенерации, и обладающей способностью к самовоспроизведению.

На наш взгляд, это представляется достаточно и сложной, и трудоемкой задачей, если исходить из аксиоматики классических ***ОС***-моделей. Вместе с тем, задача может в значительной степени и существенно упроститься, если исходить из *иных* типов ***ОС***-моделей (*например*, ***ОС*****-модели и др.*). Вышерассмотренные же модели самовоспроизведения напоминают, скорее, некое копирование генетической информации в ядре клетки, чем реальное *самовоспроизведение* организмов [88,536]. Поэтому в данном направлении еще предстоят весьма серьезные исследования.

8.2.3. Формальное моделирование процессов роста в среде однородных структур различных типов

Феномен роста в той либо иной мере присущ любой развивающейся системе. С биологической точки зрения это, быть может, одна из *наиболее* простых составляющих *общего* процесса развития, но и здесь имеется целый ряд открытых вопросов. Рост является одним из неотъемлемых свойств живого, так как для выживания любого вида составляющие его *особи* должны достигнуть вполне определенной массы, без чего просто невозможно выполнение ими всех необходимых *жизненных* функций. Каждый отдельный индивид имеет конечные размеры, процесс достижения которых называется ***ростом***. Общепринятой является точка зрения, что размеры организмов закреплены *генетически*. В настоящее время отсутствует *единое мнение* о влиянии на процесс роста различных факторов, а именно: метаболических, термодинамических, экологических и т.д., а также степень абстрагирования от частных явлений. Не вникая в глубинную суть процесса *роста*, как одной из базовых составляющих общего процесса развития, на формальном уровне мы рассмотрим лишь ***три*** основные проблемы, характеризующие ***рост*** как самостоятельное биологическое явление, представляющее несомненный интерес со многих точек зрения.

Одна из основных проблем развития – как *воспроизвести* данный организм, используя возможно наименьшее число инструкций. Это весьма важно с точки зрения понимания развития в живых системах, поскольку зигота должна быть в некотором смысле *проще*, чем организм, которому она дает жизнь. Другая проблема относится к ограничениям размеров выращиваемого в различных условиях организма, если такой процесс должен быть полностью обусловлен именно генотипом самовоспроизводящихся в процессе роста клеток. И, наконец, *третий* круг вопросов относится к изучению такого роста, когда может происходить пространственная *дифференцировка* в процессе непрерывного самовоспроизведения исходного набора инструкций без влияния какого-нибудь внешнего воздействия. Для ответов на данные и другие вопросы были предложены различные формальные модели роста, часть которых обсуждается ниже с акцентом на дискретный подход. Разнообразие моделей роста объясняется распространенностью механизмов ограничения роста *развивающегося* организма, которые так же широко распространены, как собственно сам процесс самовоспроизведения. При этом, исследование механизмов регуляции роста актуально также и для понимания феномена морфогенеза, т.к. рост можно рассматривать в качестве одномерного аналога морфогенеза [3-5]. С достаточно широко представленной проблематикой непрерывных *моделей роста* можно ознакомиться в коллективной монографии [3] и цитированной в ней очень обширной библиографии, а также в [537].

Простейшие *модели* роста исследовались посредством компьютерного моделирования ***С. Уламом*** и его сотрудниками [225], которые явились одними из первых инициаторов изучения феномена роста посредством дискретного аппарата, хотя намного ранее этой проблемой занимался целый ряд исследователей (***А. Томпсон, Л. Берталанфи*** *и др.*) с использованием непрерывного аппарата моделирования. Исследованные группой ***С. Улама*** *дискретные* модели роста наиболее пригодны для описания ряда *неживых* систем (*подобных кристаллическим структурам, простым органическим молекулам и простым растениям*), чем реальных сложных биологических систем. Несмотря на это работа с такими моделями позволила прояснить ряд вопросов роста фигур при различного рода ограничениях геометрического, логического и других характеров. Была предпринята и попытка связать феномен роста с *самоусложнением* системы, а посредством эмпирического компьютерного моделирования была исследована и связь между сложностями начальной фигуры, рекурсивных правил роста и выращиваемых на их основе конечных фигур [536].

Работая по *дискретным* моделям роста ***С. Улама,*** мы использовали аппарат *классических* структур ***2-ОС,*** что позволило получить целый ряд новых интересных свойств *дискретного* процесса роста по различным рекуррентным правилам, что и дает возможность исследовать данный феномен формальными средствами [1,3-5,54-56]. Дальнейшее развитие ***ОС-***концепции в качестве основы дискретного моделирования феномена роста было получено ***Д. Баттлером*** и ***С. Нтафос*** [309] посредством определения так называемого векторного строчного описателя, который позволяет получать целый ряд очень интересных свойств ***ОС-***моделей. Дополнительную информацию по данному вопросу можно найти в работах [5,55,88,90,536].

С точки зрения исследования феномена роста несомненный интерес представляет и проблема распространения возбуждений в ***ОС-***моделях с рефрактерностью (раздел ***1.2).*** На основе такого класса структур был предложен целый ряд интересных моделей *возбудимых* сред, часть которых может использоваться для исследования процессов *самоорганизации* в различного типа системах клеточной природы [1,3-5,8,9,90,167,198,203]. Исследование данного типа ***ОС-***моделей позволило получить ряд довольно интересных результатов по распространению возбудимости, имеющих и другие интересные медико-биологические интерпретации. В частности, был получен ряд очень интересных результатов и им были даны весьма оригинальные интерпретации с точки зрения естественных нейроно-подобных сетей и других классов сетей порогового типа [1,3-5,55,90]. Так, для задач моделирования феномена дискретного процесса роста ***М. Аптер*** использовал [330,345] классические машины Тьюринга и пропозициональное исчисление.

Ряд достаточно интересных вопросов, связанных с выращиванием в ***ОС-***среде *пространственных форм* различной геометрии, рассматривается в книге [158], где, например, доказана возможность реализации в *классических* ***2-ОС*** параллельных алгоритмов, обеспечивающих выращивание ***КФ,*** в процессе которого возникают контуры, неограниченно приближающиеся к контурам наперед заданной геометрической фигуры из достаточно широкого класса допустимых фигур. Как уже отмечалось раньше, классические ***ОС*** достаточно хорошо моделируют процессы роста на основе относительно простых порождающих правил и ограничений. Однако, эти *правила* недостаточно сложны, чтобы моделировать естественный рост и другие феномены развития живых систем.

Тогда как результаты уже по *полигенным* ***ОС*** показывают, что они могут быть использованы для моделирования довольно сложных растущих реальных систем, которые симулируют некоторые естественные феномены роста. Так, в работе [329] полигенные ***2-ОС*** успешно используются для моделирования процесса роста соцветий. Основной результат здесь сводится к доказательству возможности моделирования процесса роста соцветий любого вида с помощью *полигенной* ***2-ОС*** с ***ШС*** размера не более ***9, А-***алфавитом мощности не более ***12*** и ***G-***множеством допустимых ***ГФП*** $\tau^{(n)}$ мощности ***7.*** На основе результатов данного моделирования представлен весьма интересный сравнительный анализ *классификаций* как классической ботанической, так и на базе ***2-ОС*** роста соцветий, а также продемонстрирована конкурентоспособность ***ОС-***моделей по отношению к ***L-***системам на целом ряде задач моделирования роста и морфогенеза растений. Однако, данного типа ***ОС*** недостаточно просты, чтобы снабдить исследователя удобным и наглядным аппаратом моделирования феноменов, которые сами по себе достаточно сложны. Между тем, быть может, использование полигенных ***ОС-***моделей совместно с компьютерным симулированием и сможет существенно изменить данную ситуацию к лучшему.

Для моделирования феноменов биологического *развития* нами были предложены ***ОС*** с *памятью* ***(ОСП)*** [1], которые весьма просто реализуют сети растущих автоматов ***М. Аптера*** [345], позволяя моделировать процессы роста довольно *сложных* пространственно дифференцированных *фигур.* При этом, растущая в ***ОСП*** конфигурация может быть представлена в форме конечной сети из функционирующих автоматов, в которой можно определять направленный поток информации (*сигналы инициации процесса роста*). Именно с целью определения сложности такого рода фигур роста было введено понятие сложности, базирующееся на графо-топологическом подходе, и по которому шла речь в предыдущем пункте настоящего раздела.

Очень интересные проблемы оптимизации возникают в связи с вопросами *ограничения* процесса роста. Действительно, реальные *биологические* организмы не растут неограниченно, а полностью контролируют свой рост на протяжении всего процесса развития и жизнедеятельности. И в этой связи ***Д. Гайский*** и ***Х. Ямада*** исследовали *правила* роста в ***ОС***-моделях, позволяющие выращивать фигуры заданного ограниченного размера [191]. Основной своей целью ставилось установление максимально возможного размера пассивных ***КФ (ПКФ)***, генерируемых классическими ***d-ОС*** из некоторой простой начальной ***КФ***, однако без акцента на связи ее размера с размером шаблона соседства структуры. Такая задача в определенном смысле явилась распространением известной задачи ***Т. Радо*** [192] на случай *классических* ***d-ОС***. Заинтересованный читатель может обратиться к работе [191], содержащей не только интересные результаты по *нижним оценкам* размеров таких максимальных ***ПКФ*** в терминах различных основных параметров ***d-ОС***, но и весьма интересные обсуждения биологических интерпретаций результатов, полученных и в данном направлении. Интересные вопросы выращивания цепочек автоматов заданной длины можно найти и в работе [195]. Отмеченные работы в данном направлении тесно примыкают и к нашим результатам по *проблеме ограниченного роста* (***ПОР***), рассмотренной в разделе ***1.2***. Данная проблема относится к классу минимаксных задач в ***ТОС***-проблематике и представляет определенный интерес с точки зрения развивающихся клеточных систем различной природы. Действительно, процесс роста в реальных биологических системах ограничен, строго контролируем изнутри, а также зависит от генетических и ряда внешних факторов. Более того, ***ПОР*** имеет весьма большое познавательное значение, т.к. позволяет нам в *определенной* мере оценивать количество информации, требуемое для выращивания сложных многоклеточных организмов. Более подробно с данной проблемой и с интерпретацией полученных по ней результатов можно ознакомиться в разделе ***1.2*** и в работах [3-5]. В плане более прикладных аспектов ***ПОР*** следует отметить ее полезность для исследования вопросов информационной связи межклеточных взаимодействий *развивающихся* систем, а также для формирования ряда соображений о характере генетического кода [5,88,90,536,567].

Учитывая сложность моделирования в ***ОС***-среде ряда биологических феноменов и процессов, ***А. Линденмайер*** в ***1968 г.*** ввел свои уже упоминавшиеся ранее ***L***-системы. В рамках таких ***L***-систем для моделирования морфогенеза и растущих структур ***А. Линденмайером*** были предложены так называемые ***ветвящиеся алгоритмы***, на основе которых был смоделирован целый ряд довольно интересных процессов роста, прежде всего, из растительного мира [5,163,251,264,336-338]. ***Х. Люк*** [346] для объяснения роста тканей также использовал модель на основе ***L***-систем и получил на ее основе ряд интересных результатов. В последнее время на основе ***L***-систем появляется немало моделей как собственно роста, так и роста в составе общего феномена биологического развития [536]. Ниже мы коснемся детальнее вопроса сравнительного анализа ***ОС*** и ***L***-систем на предмет использования их в качестве дискретного аппарата моделирования в биологии развития.

Кроме рассмотренных выше дискретных ***ОС***-моделей, исследующих проблему ограниченного роста и объясняющих механизмы управления процессом *ограничения* на основе концепции ***ОС***, существует целый ряд иных ***ОС***-моделей, объясняющих этот *феномен* с иных позиций, а именно: энергетической целесообразности, термодинамических законов, принципа подобия, адаптации к внешней среде, механической устойчивости и др. Подобная многоплановость интерпретаций несомненно необходима и позволяет проводить многоаспектное исследование проблемы роста и развития в целом. Наряду с этим, ее в определенном смысле можно рассматривать в качестве биологического аналога принципа дополнительности ***Нильса Бора*** [3,5,88,90,536,567].

Здесь следует упомять еще об одной проблеме, возникающей в ***ОС***-моделях, и на первый взгляд, не связанной с их биологическими прикладными аспектами. Это *общая проблема синхронизации **(ОПС)*** процессов в ***ОС***-моделях, частными проявлениями которой являются хорошо известные проблемы *синхронизации сети автоматов* [196], *ограниченного роста* [3-5,191] и *Французского флага* [3-5]. Действительно, ***ОС***-модели являются системами параллельной обработки информации, и поэтому для них проблемы синхронизации процессов встают значительно более остро, чем для последовательных систем, т.к. налицо некий дополнительный уровень сопряжения различных принципов: параллельного и последовательного (*в частности, параллельная обработка определяет последовательную историю развития модели, в целом ряде случаев необходимо сугубо последовательный процесс погрузить в параллельную модель на осного того либо иного класса **ОС**-среды*).

Следует отметить, что подходы к решениям ***ОПС*** могут быть весьма полезными при решении и синхронизационных проблем во многих моделях, реализуемых в ***ОС***-средах. Данные проблемы, естественно, связаны с самой сущностью конкретных моделей, но во всех отношениях отдается предпочтение, как правило, минимальным по времени решениям. Например, параметр «*время*» играет весьма существенную роль в *синхронизационных* проблемах, возникающих в реализациях параллельных вычислений и алгоритмов в ***ОС***-моделях, а также в целом ряде хорошо известных моделей биологии развития. Между тем, в целом ряде биологических процессов собственно сам параметр времени не играет такого уж существенного значения (*а, точнее говоря, согласно нашим современным представлениям*), так как здесь на *первый* план выступает далеко не до конца понятое так называемое *биологическое* время. Поэтому с точки зрения биологического моделирования на базе ***ОС***-концепции, прежде всего, представляют интерес именно *классы* качественных аспектов проблем синхронизации процессов, управляющих теми либо другими феноменами в биологии развития и в других биологически мотивированных рассмотрениях. В настоящее время именно на принципиальной основе ***ОС***-подхода создан целый ряд моделей, симулирующих достаточно важные *поведенческие* аспекты биологических систем различного уровня организации, начиная с клеточно-тканевого до ценотического [5,88,90,536].

8.2.4. Формальные ОС-модели дифференциации, регуляции и регенерации в биологии развития

В предыдущих пунктах раздела с кибернетической точки зрения было показано, что некоторые черты развития, такие как самовоспроизведение и рост, могут быть присущи и искусственным системам. Теперь попытаемся кратко рассмотреть вопросы дискретного моделирования и более сложных феноменов развития – *дифференциации, регуляции и регенерации*. *Дифференциация клеток* представляет собой *одну* из важнейших проблем в современной биологии развития. Несмотря на огромное число работ, посвященных тем или иным особенностям клеточной дифференциации, на сегодня мы не располагаем общей теорией дифференциации – большинство теоретических рассмотрений и гипотез относятся к молекулярным механизмам клеточной дифференциации. В частности, отсутствует количественная теория дифференциации и даже не понятны подходы к построению этой теории. В значительной степени это объясняется неясностью самого понятия *дифференциации* и отсутствием точных критериев для получения ее численных оценок [3-5,88].

Весьма существенной чертой биологического развития является *формообразование* (*морфогенез*) и *пространственная* дифференцировка. При этом, в настоящее время, на наш взгляд, отсутствуют достаточно убедительные экспериментальные данные, чтобы создавать динамические модели, непосредственно сопоставимые с реальными биологическими феноменами либо с процессами развития. И поэтому моделирование направлено на то, чтобы проиллюстрировать возможность реализации различных феноменов развития на уровне довольно общих предположений. Итак, создаваемые в этом направлении ***ОС***-модели доказывают возможность: управления процессами роста, регуляции и регенерации; образования иерархических структур и др. Следует отметить, что подобные модели в настоящее время интенсивно исследуются и не только с биологической точки зрения, но и в рамках новой общенаучной дисциплины о самоорганизации – ***дискретной*** *синергетики* [4,5,90,155,536]. Наряду с этим, используемые в этих моделях *управляющие* алгоритмы могут оказаться весьма полезными для параллельных вычислительных систем [11,12,54].

Анализируя процесс развития на общем уровне, мы неизбежно должны придти к выводу о том, что дифференцировка клеток и регенерация у высокоорганизованных живых существ являются результатом деятельности чрезвычайно сложных регуляторных механизмов. Поэтому, с учетом сказанного, нам в первую очередь необходимы некоторые рабочие, но достаточно эффективные модели, цель которых должна состоять в том, чтобы помочь в формализации данной проблемы и, возможно, найти ключ к получению решения на языках кибернетики и других точных наук. Построение данного типа формальных моделей основывается на целом ряде абстрагирований и общих биологических предположений и постулатов. В частности, имеются интересные работы по использованию ***ОС***-концепции для моделирования как нормального, так и патологического роста биологической ткани и целый ряд других [536].

В процессе своего размножения клетки развивающегося организма не остаются функционально идентичными, будучи, между тем, генотипично тождественными. В развивающемся организме реализуется как пространственная, так и фенотипическая *дифференциация*. Наиболее ранними кибернетическими моделями, включающими феномены *обоих* типов дифференцировки, можно рассматривать клеточные модели *самовоспроизведения* и *роста* на основе ***ОС***-концепции, которые вкратце обсуждались в предыдущих пунктах раздела. Так, проводя аналогию между единичным автоматом ***ОС***-модели и биологической клеткой, мы видим их явную тождественность в наборе выполняемых инструкций, тогда как в процессе выращивания и функционирования организма в ***ОС***-модели он претерпевает *пространственную* дифференциацию, тогда как клетки различных его частей становятся функционально различными в процессе существования самого *организма*, при этом оставаясь *генотипично* тождественными. Такие моменты наглядно прослеживаются на примере клеточной модели самовоспроизведения ***Дж. фон Неймана*** [124,125,536].

При этом, на сегодня *клеточные* модели *самовоспроизведения* не обладают в значительной степени свойством *регуляции* и *регенерации*, что позволяет говорить о наличии именно чистого феномена *дифференциации* в них. Здесь можно отметить достаточно интересный факт: при нетривиальном *моделировании* феномена роста и самовоспроизведения в клеточных структурах (*под клеточными понимаются структуры, которые состоят из некоторых формальных аналогов реальной биологической клетки*) в качестве сопутствующего феномена имеет место дифференциация одного либо обоих типов. Это позволяет в *определенной* мере говорить о довольно тесной связи основных компонент развития – *самовоспроизведения*, *роста*, *регуляции*, *дифференциации* и *регенерации*, что и определяет требование *комплексного* моделирования фундаментального *явления* биологии развития в целом. Пока же мы занимаемся моделированием пока лишь *отдельных* феноменов развития по причине чрезвычайной сложности данного *явления* в целом и не до конца понятости многих его аспектов. Однако именно сейчас в момент предварительного и общего изучения проблемы *биологического* развития желательно, на наш взгляд, иметь как можно больше разноплановых идей и моделей, а не одну модель развития, сколь бы хорошей она нам не представлялась. Следовательно, данный подход к моделированию феноменов биологии развития в настоящее время вполне обоснован и уместен [23,27,31,33,54-56,88,90,536].

Одними из первых типов *кибернетических* моделей развития были технические подобно случаю с механическими моделями самовоспроизведения [1,3-5]. Между тем, подобные модели не могли служить достаточно эффективным аппаратом исследования таких довольно сложных и важных феноменов развития, именно поэтому внимание исследователей привлекли формальные *модели* развития на основе динамических систем непрерывного и дискретного характеров. К наиболее известным моделям *первого* типа относятся динамические модели, которые допускают описание соответствующими системами дифференциальных уравнений, тогда как ко *второму* типу могут быть отнесены дискретные динамические модели, базирующиеся на ***L***-системах и однородных структурах [1,5,88,90]. Именно второму классу моделей и уделяется ниже основное внимание.

Переходим теперь непосредственно к вопросам формализации проблемы развития и регуляции биологической структуры. Пытаясь ввести процесс биологического развития в рамки некоторой *общей* теории, необходимо различать в нем процессы, протекающие во времени и проходящие в пространстве. Такое разделение процессов развития вполне соответствует *современному* подходу к проблеме биологического развития. Так, большинство современных исследований в области эмбриологии затрагивает, как правило, процессы развития во времени, которые проявляются в дифференциации клеток. Пространственным же аспектам процессов развития, включающим и образование *пространственной* структуры (*регионализацию*) или *формы* (*морфогенез*), уделялось до настоящего времени недостаточное внимание. При этом, следует еще раз подчеркнуть, что все вышесказанное и далее в настоящем разделе относится, в первую очередь, к вопросам именно дискретноного моделирования процессов биологического развития в целом [1,3-5,88,90,536].

Центральная проблема развития сводится к вопросу о том, как из яйца, кажущегося совершенно недифференцированным и простым в структурном отношении, сможет затем развиться весьма сложный многоклеточный организм. В данной связи было высказано предположение, что яйцо содержит только программу развития, а не полную спецификацию всего организма, который из него должен развиться. Например, в формулировке ***К. Уоддингтона*** [331] проблема *образования пространственной* структуры заключается в определении непосредственных причин разделения однородной клеточной области на отдельные элементы, которые расположены в пространстве в четко определенном порядке. Наряду с этим, мы неизбежно должны придти к выводу о том, что *дифференцировка* клеток у высокоорганизованных живых существ является прямым результатом деятельности чрезвычайно сложных регуляторных механизмов. По-видимому, прежде всего нам действительно необходимы рабочие, но достаточно эффективные модели, цель которых должна состоять в том, чтобы помочь в формализации данной проблемы и, по-видимому, найти ключ к пониманию основных подходов к решению проблемы на языках точных наук. Данную задачу и преследуют дискретные модели развития, обсуждаемые нами ниже.

Способность к восстановлению осевой структуры можно проследить во многих биологических системах; некоторыми наиболее характерными чертами ее являются следующие, а именно:

♦ ***постоянство в определенной мере соотношений между отдельными составными частями в биологических структурах разных размеров;***
♦ ***способность части системы воспроизводить всю систему или в известной мере способность любой части системы превращаться в любую другую ее составную часть;***
♦ ***сохранение полярности системы, т.е. образование отдельных частей системы в правильном положении относительно друг друга и к исходной системе в целом.***

Экспериментальный подход к этой проблеме позволил сформулировать целый ряд интересных и упрощающих проблему концепций, среди которых следует особо выделить такие принципы, как *градиентность* и *доминантность* [3-5,331]. Между тем, вопросу создания работающих моделей уделялось недостаточно внимания. И первая серьезная попытка создания модели, способной к развитию и регуляции осевой структуры, была предпринята ***С. Роузом*** [347], который высказал предположение о том, что происхождение *пространственной* структуры может быть результатом действия достаточно сложной иерархии самоограничивающихся реакций и распространением в структуре ограничивающей или тормозящей информации от одного дифференцирующегося участка структуры к другому, а также и градиентом скоростей дифференцировки. Тогда как ***Л. Вольпертом*** [331,348] в качестве моделей были предложены модель *установившихся градиентов* и модель *уравновешивания*. При этом, вторую модель ***Л. Вольперта*** можно в определенном смысле противопоставить первой, поскольку в ней отсутствует градиент. В дальнейшем был предложен целый ряд достаточно интересных моделей, довольно развернутый обзор которых можно найти в монографиях [3-5,567] и работах [31,33,54-56,88,90,536].

Однако наиболе известной формальной моделью дифференцировки, регуляции и регенерации является так называемая *проблема Французского флага* ***(ПФФ)***, предложенная ***Л. Вольпертом*** [331]. В простейшей форме ***ПФФ*** формулируется следующим образом, а именно:

Имеется одномерная связная система из 3m клеток, каждая из которых допускает состояния «красный», «белый» и «синий»; требуется определить правила функционирования такого вида клеточной системы, финальным состоянием которой является конфигурация Французского флага (КФФ), в определенных пределах устойчивая к внешним воздействиям и повреждениям.

Для решения ***ПФФ*** в ее классической постановке нами был предложен ряд и математических, и автоматных моделей и проведен их анализ с биологической точки зрения [1,3-5,23,26,27,31,33,46]. В частности, проведены обсуждения постановки ***ПФФ*** как формальной модели *дифференциации*, *регуляции* и *регенерации осевой* биологической структуры на конкретных биологических объектах [3-5,88,90].

Для решения и исследования ***ПФФ*** нами использовались ***ОС***-модели нескольких типов; между тем, перед моделированием ставился целый ряд задач. Прежде всего, нас интересовал вопрос о *минимальной* сложности модели, способной к дифференциации, регуляции и регенерации. Так как для исследования ***ПФФ*** мы используем модели на базе концепции ***ОС***, вполне естественным является определение наиболее простой ***ОС***-модели, решающей эту проблему. В работах [26,27] доказано, что при моделировании ***ПФФ*** даже на основе полигенных ***1-ОС*** алгоритм, решающий проблему, должен быть алгоритмом над алфавитом ***A***, элементами которого являются символы, образующие *конфигурацию Французского флага* ***(КФФ)***. Следовательно, для решения ***ПФФ*** уже на основе полигенных ***ОС***-моделей требуется использовать расширенный алфавит ***A**** внутренних состояний единичных автоматов структуры и, вероятно, некоторые иные предположения. При этом, дополнительные внутренние состояния единичного автомата модели должны допускать и приемлемую интерпретацию в соответствующих биологических категориях, требуя проведения дополнительного анализа на соответствие моделируемого явления модельным результатам [88].

Итак, *вторым* вопросом является определение тех *достаточных* условий, которые способствовали бы решению ***ПФФ***, и их удовлетворительной биологической интерпретации. С этой целью был исследован целый ряд моделей на основе ***ОС***-концепции. Так, в работе [26] для моделирования ***ПФФ*** использовались модели ***1-ОС***, в качестве единичных автоматов которых были определены ограниченные трехленточные машины Тьюринга. Определенным данным способом структуре и функционированию автомата-клетки могут быть даны достаточно интересные биологические интерпретации, включая вопросы исследования *клеточной* организации в рамках общей теории систем.

Клеточные автоматные системы с *двухсторонними входами*, способные моделировать ***ПФФ***, были исследованы ***М. Арбибом*** [331] и нами [3-5,23,26,27,31,33,46]. Так, в работах [5,26] мы определили одну числовую ***ОС***-модель, решающую ***ПФФ***, которая реализована на *специальных* ***Е***-элементах, имеющих *пороги*, *задержку* и *память*. Модель *поляризована*, характеризуется отсутствием *градиента* и просто обобщаема на двухмерный случай. В данной модели ***КФФ*** устанавливается за время не более, чем $t = 3m+2$, где m – число дифференцирующихся ***Е***-элементов в структуре. Изменение направления потока *управляющей* информации в модели ведет к установлению конфигурации, мало отличающейся от ***КФФ***. Данная модель способна к *регенерации*, достаточно проста и может быть легко реализована средствами современной микроэлектроники. Мы показали, что данная модель может быть, в частности, использована для формального исследования таких процессов, как элиминация и восстановление *меристемных* клеток в облученных *радиацией* растениях. Этот результат говорит о возможности использования подобных *модельных* подходов в радиационной биологии и медицине. Тогда как по вычислительным возможностям данная модель напоминает модель развития ***М. Аптера*** [330], в основу которой также были заложены вполне определенные элементы процесса счета наряду с использованием пропозиционального *исчисления* в описаниях клеточных инструкций.

В работе [23] нами представлены две наиболее интересные модели, решающие ***ПФФ***. Первая из них способна к *весьма* совершенной *регуляции* и слегка напоминает известную модель ***М. Арбиба*** [331], однако она более проста и избавлена от некоторых недостатков модели ***М. Арбиба***. Более того, основными свойствами модели являются: отсутствие *градиента* и *порогов*, а также наличие в ней *полярности*, *спонтанной самоограничивающейся реакции* и *двухстороннего потока* управляющей информации [331,345]. Тогда как вторая модель в качестве единичного ***Е****-автомата* в ***ОС***-модели использует специальный ***Р***-автомат с памятью. Данная ***ОС***-модель также способна к достаточно совершенной регуляции и характеризуется *тремя* основными свойствами, а именно: наличие у нее *памяти*, *полярности* и *спонтанной самоограничивающейся реакции*. Характерной чертой модели является отсутствие двухстороннего потока управляющей информации. К *первой* из отмеченных моделей (*в плане основных присущих ей черт*), определяющих решение ***ПФФ***, примыкает и модель на основе класса структур ***1-ОС****, позволяющих решать ***ПФФ*** в ее обобщенной постановке.

Определяется конечная ***КФ*** c_o длины r из состояний единичных автоматов в ***1-ОС**** следующего вида, а именно:

$$c_o = \square x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots x_r \square, \qquad x_j \in A = \{0,1,2,3,\ldots,a-1\} \ \ (j = 1 \,..\, r)$$

Тогда ***обобщенная ПФФ*** сводится к определению некоторого функционального алгоритма ***FA*** структуры (*сложность которого не зависит от числа **r** единичных автоматов дифференцирующейся цепочки*), позволяющего устанавливать и поддерживать в ***1-ОС* обобщенную КФФ*** следующего структурного вида, а именно:

$$C_f = \nabla \underbrace{b_{1_1} \cdots b_{1_q}}_{q} \underbrace{b_{2_1} \cdots b_{2_q}}_{q} \cdots \underbrace{b_{(a-3)_1} \cdots b_{(a-3)_q}}_{q} \underbrace{b_{(a-2)_1} \cdots b_{(a-2)_q}}_{q} \underbrace{b_{(a-1)_1} \cdots b_{(a-1)_k}}_{k} \nabla \qquad (65)$$

$$b_{p_j} = p;\ p = 1 \div (a-2);\ j = 1 \div q;\ q = [r\,/\,(a-1)];\ b_{(a-1)_i} = (a-1);\ i = 1 \div k;\ k = r - (a-2)q$$

В связи с использованием для решения *обобщенной* ***ПФФ*** однородных структур нам прежде всего хотелось бы определить наиболее простой тип ***ОС***-моделей, позволяющих ее решать. В данном направлении имеет место следующий результат [1,3-5,26,88,90,536].

<u>Теорема 167</u>. Не существует полигенной структуры 1-ОС с алфавитом общего вида, которая решала бы обобщенную ПФФ, определенную в том же самом конечном алфавите А.

Таким образом, решающий *обобщенную* ***ПФФ*** алгоритм на основе ***ОС***-моделей должен быть ***над*** алфавитом ***А***, т.е. невозможно определить локальный алгоритм поведения единичного автомата в таких моделях, который использует для своего функционирования информацию о состояниях только своих соседей (*согласно индекса соседства **X***) и чья сложность не зависит от длины цепочки дифференцирующихся единичных автоматов. Следовательно, для решения обобщенной ***ПФФ*** даже в классе полигенных ***ОС***-моделей требуется использовать расширенный относительно ***А***-множества алфавит внутренних состояний и, возможно, другие предположения.

Так, одна из моделей [1] на основе структур ***1-ОС**** использует простейший вариант символьной сортировки, позволяя решать ***ПФФ*** в классической постановке ***Л. Вольперта*** за время не хуже, чем $t=3m$; m – длина дифференцируемой цепочки автоматов структуры. При этом, сортировка выступает как один из видов логического *градиента*, а сама модель позволяет сделать целый ряд интересных следствий биологического характера. Приведем теперь схему функционального ***FA*** алгоритма ***ОС*-***модели, которая решает обобщенную ***ПФФ*** за *минимально* известное на сегодня время (рис. ***25).***

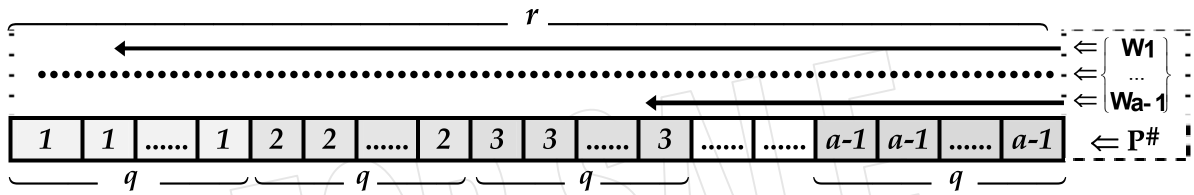


Рис. 25. Иллюстрация принципа организации ОС*-модели, решающей ПФФ.

Предположим, что дифференцируемая цепочка автоматов в структуре ***1-ОС**** имеет длину ***r*** и ее дифференцируемые состояния принадлежат алфавиту $A\backslash\{0\}$. Следовательно, *цепочка* автоматов должна дифференцироваться на ***(a-1)*** равных по длине частей, т.е. каждая из которых содержит автоматы в одном и том же самом состоянии $j\in A\backslash\{0\}$ ***(j=1..a-1)***, образуя *обобщенную* ***КФФ*** {*рис.* ***25***, *с учетом обозначений в* ***(65)***}. Положим, не нарушая общности, на правом конце данной цепочки *спонтанно* возникает пакет импульсов $P^{\#}=\{W_j\}$, распространяющихся в цепочке справа налево с относительными скоростями $V_1/V_{a-p}=(2a-p-2)/p$; $j=1..a-1$; $p=1..a-2$. Такого типа распространение импульсов в ***ОС*-***модели с требуемыми скоростями весьма просто обеспечивается специальным механизмом смены вспомогательных управляющих импульсов; при этом, необходимость самих импульсов, инициирующих процесс *клеточной дифференцировки* отмечается многими ведущими исследователями [5,537,567].

Импульс W_j, распространяясь по цепочке автоматов, переводит *каждый* встреченный им автомат в ***j***-состояние ***(j=1 .. a-1).*** При этом, импульс W_1, имеющий и максимальную скорость V_1, первым достигает *левого* конца дифференцируемой цепочки автоматов и, отразившись от него, меняется на импульс W^*_1, который с той же скоростью V_1 распространяется в *обратном* направлении *слева направо*, не изменяя состояний единичных автоматов в структуре ***1-ОС**** и нейтрализуя на своем пути все встреченные импульсы W_k ***(k=2..a-1).*** Достигнув *правого* конца цепочки автоматов, W^*_1-импульс инициирует новый $P^{\#}$-пакет.

Нетрудно убедиться, что вышеописанный функциональный алгоритм позволяет формировать и поддерживать в ***ОС*-***модели обобщенную ***КФФ.*** Более того, время *полного* установления ***КФФ*** не превышает величины $t=[(2a-3)/(a-1)]*r$. Для данного простого функционального алгоритма полученный результат во временном отношении достаточно хороший. Между тем, усложнение приведенной схемы функционального алгоритма ***FA*** путем *допустимости* испускания подобных пакетов $P_л^{\#}$ и $P_п^{\#}$ импульсов с обоих концов дифференцируемой цепочки и с использованием принципов взаимодействия управляющих импульсов, предложенных при определении первой модели из работы [26], позволяют добиться решения обобщенной ***ПФФ*** в ***ОС*-***модели за время не хуже, чем $t=[r/2]$. Сказанное позволяет сформулировать следующий результат [5,88,90].

<u>Теорема 168</u>. Для структуры 1-ОС* с алфавитом A={0,1,2, ..., a-1} внутренних состояний будет существовать функциональный алгоритм, сложность которого не будет зависеть от длины r дифференцируемой цепочки единичных автоматов и который при довольно больших значениях r решает обобщенную ПФФ за время не хуже, чем t=[r/2]. Множество GSK всех минимальных по времени решений обобщенной проблемы Французского флага нерекурсивно.

Представленный в данной теореме ***168*** результат является наилучшим на сегодня во временном отношении решением обобщенной ***ПФФ.*** Из него, например, следует, что при весьма больших значениях ***a*** и/или ***r*** время решения ***ПФФ*** асимптотически приближается к половине длины ***L*** дифференцируемой цепочки единичных автоматов ***ОС*-***модели. В этой связи возникает весьма интересный вопрос: ***Существуют ли алгоритмы FA иного типа, решающие данную проблему за***

лучшее время? На наш взгляд, существенно улучшить время решения *обобщенной* ***ПФФ***, которое определяется теоремой ***168***, не представляется возможным. Действительно, из самой постановки обобщенной ***ПФФ*** следует, что решающий ее функциональный алгоритм в ***ОС*-***модели может базироваться только не более, чем на двух пакетах *управляющих* импульсов, которые *периодически* испускаются либо *самопроизвольно* возникают на противоположных концах дифференцируемой цепочки автоматов. Тогда как специфика самой ***ПФФ*** не делает целесообразным использование принципа испускания *управляющих* импульсов и внутренними автоматами дифференцируемой цепочки в такого типа ***ОС*-***модели.

Наряду с этим возникает интересный вопрос исследования *обобщенной* ***ПФФ*** для случая высших размерностей, когда вместо линейных цепочек рассматриваются ***d-***мерные ***(d ≥ 2)*** сети конечных дифференцируемых идентичных автоматов. В таком случае результаты решения обобщенной ***ПФФ*** существенно зависят (*как показывают и компьютерные эксперименты* [88]) и от самого вида ***d-***мерной ***КФФ***. Следует отметить, что на основе метода ***Ж. Мазойера*** [196] легко доказывается *нерекурсивность* множества всех минимальных по времени решений *обобщенной* ***ПФФ***. Очевидно, что данный результат доказывает и *нерекурсивность* множества всех решений обобщенной ***ПФФ*** безотносительно к их временным характеристикам.

Итак, вышеупомянутые ***ОС-***модели, решающие ***ПФФ***, в определенной мере дают возможность прояснить такие вопросы, как входные/выходные управляющие импульсы, свойства единичных автоматов-клеток и природу связей между ними, а также ряд других предпосылок, приводящих к разбиению *клеточной* системы *вдоль оси* на сегменты, расположенные в определенном порядке. Между тем, достаточно интересным представляется определить минимальные требования к ***ОС-***модели, решающей ***ПФФ***. Для нашей ***ОС-***модели, предназначенной для изучения минимальных требований, используется такая известная вычислительная процедура, как простейший вариант сортировки для двухсимвольного алфавита. Результаты, полученные на такой ***ОС-***модели, дают возможность сделать целый ряд выводов, которые имеют достаточно интересные биологические интерпретации [1,3-5,46, 88,90,536].

Первый вывод касается изучения механизма *самосинхронизации* системы из ***m*** *связанных* активных единичных автоматов ***ОС-***модели. Единичные автоматы сами не способны к самопроизвольной активности, исключая моменты образования ***КФФ*** и нарушений (*повреждений*) в системе. Если автомат в системе не подвержен действию управляющих импульсов, то его функционирование подчиняется ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$ структуры, как и в случае классической ***ОС-***модели, в противном случае *состояния* единичных автоматов (*симулирующих реальные биологические клетки*), а также их *выходы* в момент времени ***t>0*** определяются их состояниями и выходными импульсами прилегающих к ним соседей в момент ***(t-1)***. В целом, подобная система *связанных* единичных автоматов является системой *без полярности*. *Второй* вывод касается свойств отдельного единичного автомата в этой системе. Такой автомат довольно прост и связан только со своими непосредственными соседями посредством двух информационных каналов, и каждый единичный автомат модели способен выбирать свое состояние согласно некоторому логическому градиенту (*сортировке*) в системе.

Таким образом, такая ***ОС-***модель обладает следующими тремя *основными* свойствами, а именно: **(1)** *существование логического градиента*, **(2)** *самопроизвольная самоограничивающаяся реакция*, а также **(3)** *отсутствие полярности в системе*. Следовательно, свойства нашей *модели* можно выбирать как *достаточные условия* возможной дискретной клеточной *модели*, а результаты, полученные на ней, следует сопоставлять с результатами исследования поведения *реальных* биологических объектов. Наряду с вышерассмотренными имеются и другие интересные ***ОС-***модели основных процессов и феноменов биологии развития, с которыми можно ознакомиться в работах [1,3-5,26,27,54-56,88, 264,329-351,536].

Как выясняется из обсуждения *клеточных моделей* в биологии развития, ***ОС-***модели также можно использовать для симуляции динамики многих биологических систем, для которых умеренные начальные условия и отношения локального соседства могут давать глобальные эффекты. Итак, учитывая сложность отслеживания динамики ***ОС***-моделей развития, представляется достаточно актуальным использование для этих целей симуляционного компьютерного подхода, описание конкретных реализаций которого можно найти в [5,55,78,85,88,150,165,166,167,174,250]. В основе реализации данного подхода лежит создание дружелюбных симуляционных *дисплейных* систем ***(СДС)***, позволяющих достаточно наглядно отслеживать, зачастую, довольно сложную динамику симулируемой модели и влиять на ее развитие во времени. Итак, модели развития строятся на базе ***ОС***-концепции либо ***L***-систем как среды биологического моделирования, имеющей вполне удовлетворительные биологические интерпретации, тогда как их динамика изучается на основе соответствующих ***СДС*** на ***ЭВМ.*** Учитывая все возрастающую тенденцию привлечения для целей биологического моделирования все более сложных типов ***ОС*** и ***L***-систем, работы в направлении создания *эффективных* ***СДС*** представляются нам весьма желательными и *первые* положительные результаты в этом направлении уже отмечались выше. Данный подход к исследованию проблем биологии развития и биологии в целом получает очень *серьезный* импульс в связи с интенсивной компьютеризацией общества, доступностью все более мощных ***ПК***, программного обеспечения, а также развитой системы средств визуального отображения информации и, в первую очередь, графической [6,8,13,15,118]. В настоящее время уже появился целый ряд достаточно интересных в данном отношении программных систем, о некоторых из них речь шла в разделе ***6.6.***

Обзор основных подходов к дискретному моделированию процессов биологического развития [3-5,88,90] со всей очевидностью показывает, в настоящее время одними из основных аппаратов моделирования в этой области являются ***ОС***-концепция и ***L***-системы. Поэтому, вполне уместно попытаться провести некий *сравнительный* анализ обоих подходов и обсудить связанные с ними некоторые биологические соображения, а также в определенной мере оценить возможные пути дальнейшего развития аппарата дискретного моделирования в биологических науках. Неся во многом *прогнозный* характер, данные оценки, вместе с тем, представляют вполне определенный интерес для исследователей в области математической и теоретической биологий. Более того, на сегодня некоторые из вышеприведенных оценок получают достаточно серьезное обоснование в свете новых результатов в области моделирования биологии развития.

8.2.5. Сравнительный анализ ОС-моделей и L-систем как формального дискретного аппарата модельных исследований в биологических науках

Процесс *биологического* развития, в ходе которого одна клетка (*зигота*) превращается в сложный многоклеточный организм, по праву можно назвать одним из самых замечательных явлений в природе. В последнее время было получено достаточно много весьма важных теоретических и экспериментальных результатов, представляющих большой интерес для понимания этого очень важного процесса. Между тем, по мнению целого ряда исследователей для полного понимания процесса развития необходима, по-видимому, разработка *совершенно* новых методов и подходов. В качестве одного из таких основных подходов можно выделить *кибернетическое* моделирование процесса развития, а из теоретических методов – ***ОС***-модели и ***L***-системы. Оба эти формальных аппарата дискретного моделирования допускают ряд довольно интересных для биологических приложений модификаций и биологических интерпретаций, рассмотрение которых проведено ниже. Это тем более актуально, т.к. из-за невозможности экспериментально выделить основные факторы, не утрачивая при этом самой специфики биологии развития, используется наиболее подходящая формальная техника как в целях упрощения теоретического анализа исследуемых биологических явлений, так и в надежде на то, что на данном пути нам, возможно, удастся хоть ненамного приблизить к точной науке биологию, аналогично теоретической и математической физикам. В данном контексте обсудим ***ОС***-модели и ***L***-системы с наиболее общей точки зрения. Основой биологических интерпретаций ***ОС***-моделей стали следующие аксиомы, а именно:

♦ ***В качестве основной биологической единицы более всего нам подходит клетка, которая есть некоторый конечный автомат и все, что нам нужно знать о ней – лишь зависимость ее выхода от входа в предыдущий момент времени и ее текущего состояния.***

♦ ***Все клетки в организме имеют одинаковый генотип, т.е. один и тот же кортеж инструкций их развития и функционирования.***

♦ ***Развитие клеточной системы весьма существенно зависит от обмена информацией между составляющими ее клетками.***

♦ ***Организм сам регулирует наиболее важные стороны своего развития; точнее, само развитие управляется изнутри, а не извне организма.***

♦ ***Развитие каждого организма осуществляется самовоспроизведением клеток, составляющих организм, путем их деления.***

Конечно, каждая из *пяти* представленных аксиом в той или иной степени является упрощением реального положения вещей, но когда *формальные* модели, основанные на них, помогут добиться какой-то ясности, то впоследствии к ним можно будет подключать и все новые предположения в целях большего их приближения к реальности. Так, например, при моделировании регуляции, регенерации и дифференциации на базе ***ОС***-концепции дополнительно к указанным аксиомам использовался принцип ***Сэджер*** [349] образования форм в соответствии с системой инструкций. Данное представление об инструктивной (*программируемой*) системе управления развитием для нас наиболее привлекательно именно тем, что оно сможет послужить перспективным развитием того пути, по которому обычно мыслится приложение *теории информации*, *общей теории систем*, а ныне и такой междисциплинарной науки, как *синергетика*, в биологии развития.

Нетрудно убедиться, что поведение ***ОС***-моделей может быть описано на языке *логических* сетей, а так как ***М. Сугита*** доказал возможность представления генетических моделей *Жакоба-Моно* на языке логических сетей, то ***ОС***-модели процессов *биологии* развития также могут получать очень интересную генетическую интерпретацию [1,5,46,88]. В данной связи вытекает принципиальная возможность интерпретации ***ОС***-моделей развития генетическими моделями *Жакоба-Моно*. Так, моделирование на основе ***ОС***-концепции позволяет рассматривать процессы развития и с точки зрения иерархических структур. В данном контексте модели развития, реализованные на такой основе, могут исследоваться и средствами теории систем, что обеспечивается свойствами самого ***ОС***-подхода. Это позволяет получать качественно новые результаты в моделировании процессов биологического развития [46,90]. Так, на основе этого подхода анализ ***ОС***-моделей регенерации, регуляции и дифференциации клеток позволил сделать вывод, что при предположении о том, что процесс дифференциации и регенерации управляется изнутри клеточной системы, то в ней обязательно должны существовать и *более высокие* уровни организации, чем дифференцировка и регенерация, что, вообще говоря, и наблюдается в реальности [88,90,536].

На *общем* уровне рассмотрения вышеуказанные пять *аксиом развития* вполне удовлетворительно отвечают ***ОС***-концепции. В этом случае клеткам *развивающегося* организма отвечают единичные автоматы ***ОС***-модели. На самом деле *реальная клетка* по своей структуре намного сложнее наших автоматов, но для исследования проблем развития на *клеточном* уровне мы должны как-то снять вопросы, обусловленные *структурной* сложностью клетки, наряду с вопросами, которые связаны с функционированием составляющих ее частей. Этого мы добиваемся, рассматривая клетки как «*черные ящики*», т.е. рассматривая межклеточные взаимодействия, переходим на более высокий *уровень* организации, чем тот, который рассматривали те исследователи, которые моделировали системы ферментов в клетках. Выбирая теперь в качестве основной единицы клетку, в смысле ее поведения мы будем ограничиваться лишь зависимостью выхода клетки от входа и ее состояния в предыдущий момент времени. В принципе, ***ОС***-концепция вполне допускает и структурный уровень моделирования, когда при реализации ***ОС***-моделей развития исследуется и внутренняя организация их единичного автомата-клетки. В ряде моделей развития, упоминавшихся ранее, весьма существенно использовались внутренние структуры единичного автомата-клетки. Таким образом, и ***ОС***-концепция допускает моделирование биологических процессов на более низких уровнях рассмотрения, чем отдельная биологическая клетка.

Время в ***ОС***-моделях полагается дискретным, тогда как на самом деле оно непрерывно. Но для целей кибернетического моделирования процессов развития это пока не столь существенно, тем более, что еще довольно мало известно о собственно биологическом времени, играющем весьма существенную роль в развитии. Каждая клетка имеет *одинаковый* генотип, от которого, вероятно, и зависит вид получающегося из нее организма. Поэтому, возможно, наиболее удобным путем создания эффективных моделей развития является моделирование самого генотипа (*программы работы клетки*). И действительно, до сих пор основная часть работы по исследованию вопросов дифференцировки клеток велась на уровне взаимодействия между тканями, тогда как крайне существенно распространить наше понимание на природу процессов, происходящих также на клеточном уровне. Таким подходом мы исключаем из рассмотрения одноклеточные организмы, также испытывающие развитие, которое, в основном, представляет результат внутриклеточной деятетельности. Однако на данном этапе моделирования мы пока вынуждены мириться с этим. Выше мы предположили, что все клетки имеют *одинаковый генотип*, т.е. каждая клетка, начиная с зиготы, приступает к работе с одним и тем же набором генетических инструкций. Собственно и сама ***ОС***-концепция предполагает именно данный постулат.

Между тем, имеются экспериментальные данные, свидетельствующие, что для ряда организмов различные клетки могут иметь различный генотип. Однако, из самого функционирования ***ОС***-моделей можно показать [5,46], что данный феномен имеет место при интерпретациях и такого класса моделей развития. Предположение о том, что *развитие* организма существенно зависит от *межклеточного* обмена информацией, также легко вписывается в ***ОС***-модели развития, как один из неотъемлемых атрибутов самой ***ОС***-концепции. В настоящее время этот биологический факт является общепризнанным и для случая ***ОС***-моделей подобным обменом информацией служит *передача* одним автоматом другому (*другим*) символов из входного (*выходного*) алфавитов, а также *сообщения* о своем текущем состоянии. На наш взгляд, нет никакой необходимости в каких-либо ограничениях для передачи информации между автоматами ***ОС***-модели по причине сложности реальных межклеточных взаимодействий в биологических системах.

Так как организм вырастает из единственной клетки (*зиготы*) путем ее самовоспроизведения, то единичный автомат ***ОС***-модели должен обладать способностью в требуемый момент порождать свою *копию*. Это достигается тем, что какой-нибудь соседний нефункционирующий единичный автомат переводится в некоторое *ненулевое* состояние, становясь функционирующим и *составной* частью уже более сложного организма; при этом, он получает весь генотип исходного автомата, из которого развивается организм в такой ***ОС***-модели. На этом завершается краткое обсуждение основных свойств ***ОС***-моделей с точки зрения упрощенной *биологической* аксиоматики, лежащей в основе процессов биологического развития на *клеточном* уровне, и переходим к рассмотрению ***классов задач***, относящихся к тому либо иному процессу развития и которые можно достаточно успешно моделировать и исследовать в рамках общей ***ОС***-концепции.

<u>Первый</u> класс задач заключает в себе основной вопрос о том, каким образом осуществляются три *процесса дифференциации*, *регуляции* и *регенерации* в организме. Построение ***ОС***-моделей для этой задачи позволило прояснить целый ряд вопросов и сформулировать интересные проблемы для дальнейших исследований в этом направлении. Вопросы, относящиеся к данному классу задач биологии развития, могут привести нас к лучшему пониманию сложной проблемы образования *пространственной* структуры вообще. С другой стороны, в процессе исследования этих вопросов само понятие ***ОС***-моделей было существенно расширено и сделано более *приемлемым* для целей биологического моделирования. При этом, алгоритмы, лежащие в основе *биологических* моделей дифференциации, регуляции и регенерации, могут быть положены в основу систем *управления* различного рода *клеточных* систем *искусственного* характера. Например, ряд полученных в этом направлении алгоритмов успешно использовался нами при создании ряда параллельных систем обработки информации и параллельной управляющей системы для *однородных вычислительных* систем на базе *ЕС ЭВМ* [42,50-52,88,90,536].

Второй класс задач относится к *проблеме роста*, который сам по себе с абстрактной точки зрения не представляет особой проблемы, ибо обеспечивается процессом самовоспроизведения клеток, на котором и основано само развитие *биологической* организации материи. Однако эта проблема включает важный вопрос о том, каким образом *развивающийся* организм сможет контролировать свои размеры в процессе самовоспроизведения клеток, если этот момент должен обеспечиваться лишь *генотипом его* клеток. Действительно, интерес представляет такой рост, когда наряду с ним может происходить пространственная дифференцировка в процессе непрерывного и массового *самовоспроизведения* исходного набора клеточных инструкций без какого-либо *влияния* внешнего воздействия. Интересным представляется также изучение процессов роста, которые приводят к получению из *ограниченного* числа клеточных инструкций организмов, состоящих из огромного числа клеток. В этом плане интересным представляется также изучение вопросов устойчивости процессов роста и их контролируемости по отношению к различного рода нарушениям, ибо это сможет представить определенный интерес и для такой области медицины, как онкология. Так, некоторые из вышеперечисленных вопросов исследовались с помощью ряда ***ОС***-моделей роста, обсуждаемых выше. Данная проблематика представляет большой интерес и для искусственных систем клеточной организации в целом [5,88,90,536,567].

Третий класс задач – это проблема *самовоспроизведения биологических* организмов. Подавляющее большинство существующих на сегодня формальных *моделей* самовоспроизведения может быть охарактеризовано тем, что один организм строит свою копию. Однако, с точки зрения биологии развития наибольший интерес представляет вопрос о том, как может один *единственный* автомат ***ОС***-модели, начав процесс *самовоспроизведения*, породить достаточно сложный пространственно дифференцированный нетривиальный организм, способный к самовоспроизведению, а также в определенной мере к регуляции и регенерации. В этой связи предстоит исследовать следующий достаточно сложный и интересный вопрос, а именно:

Как образование достаточно сложного пространственного организма оберегает себя от ряда ошибок и каким набором клеточных инструкций исходного единичного автомата ОС-модели этого можно добиться?

Таким образом, круг задач *третьего* класса предполагает использование *подхода* к исследованию проблемы биологического самовоспроизведения именно на уровне клеток, а не организмов.

Четвертый класс задач можно охарактеризовать как проблему *сложности* в биологии развития. Здесь можно сформулировать целый ряд весьма интересных вопросов о сложности единичного автомата-клетки ***ОС***-модели развития, из которого вырастает весьма сложный многоклеточный организм; о сложности пространственной дифференциации; об *изменении* сложности в процессе развития биологической организации, да и о самом понятии сложности в целом. Некоторые из данных вопросов исследовались нами в рамках вышеупомянутых ***ОС***-моделей развития, однако до полного понимания проблемы еще далеко. В этом отношении проблема ***сложности*** является *одной* из наиболее фундаментальных и интригующих тем современного естествознания и науки в целом. На сегодня имеется ряд подходов к определению этого понятия, но полного понимания нет до сих пор.

Каждая из перечисленных задач *четырех* описанных классов является составной частью единого процесса биологического развития, однако в настоящее время необходимо думать о том, как бы разложить процесс развития на его основные составляющие и отдельно проанализировать их. В то же самое время не следует думать, что какая-то простая модель раскроет все свойства какого-либо процесса развития. Поэтому каждый из перечисленных выше классов задач предполагает целый ряд других возможных направлений *моделирования* как дискретного, так и непрерывного типов, да и сам перечень *классов* задач до некоторой степени является условным. Все это требует дальнейшей серьезной проработки указанной проблематики [536].

Таким образом, уже такое краткое *обсуждение* возможностей ***ОС***-концепции и ее биологические интерпретации позволяют сделать вывод о том, что она во многих случаях может послужить в качестве вполне удовлетворительной отправной точкой для задач дискретного моделирования в биологии развития. На основе ***ОС***-концепции к настоящему времени построен целый ряд очень интересных дискретных моделей развития и в ряде случаев дана их вполне удовлетворительная биологическая интерпретация. На *начальном* этапе кибернетического моделирования биологии развития, когда сомнение вызывала сама принципиальная возможность, подобный подход был, пожалуй, *единственно возможным* как в плане существования пригодного аппарата, так и в плане готовности самой биологии. Более того, и сами ***ОС*** зародились именно как средство такого типа моделирования. Однако, моделируя на основе ***ОС***-концепции процессы *развития*, мы в большой мере игнорировали *основу* данных процессов (*размножение клеток путем их деления*) ввиду самого понятия *однородных структур*. Поэтому сейчас можно отметить, аппарат ***ОС*** (*несмотря на то, что структуры допускают целый ряд интересных обобщений, существенно расширяющих их возможности для биологии развития*) не сможет выполнять роль того универсального аппарата моделирования, посредством которого можно было бы успешно исследовать *проблемы биологии* развития в целом. Между тем, это нисколько не умаляет роли ***ОС***-концепции в биологическом моделировании и на этом пути еще будет получен целый ряд интересных результатов, тем более, что собственно ***ОС***-концепция на сегодня обладает рядом черт, которые либо отсутствуют, либо недостаточно четко выражены в других аппаратах дискретного моделирования процессов биологии развития, да и биологии в целом [4,5,88,90,536].

Но для дальнейшего прогресса дискретного моделирования в биологии развития потребовалось снять ряд ограничений, присущих ***ОС***-концепции как основы биологического моделирования. Поэтому, ***А. Линденмайер***, базируясь на ***ОС***-концепции, ввел свои системы, известные ныне под названием ***L***-систем. В настоящее время ***L***-системы весьма интенсивно развиваются как в плане исследования их в качестве самостоятельного объекта – *формальных параллельных грамматик*, так и в плане использования их для решения задач дискретного моделирования биологии развития [136,162,163,251,264,332-338]. Поэтому здесь отметим лишь, что ***L***-системы довольно существенно расширяют возможности одномерных ***ОС***-моделей; между тем, и с точки зрения биологической адекватности они получают вполне удовлетворительные на сегодня интерпретации в объеме, о котором и упоминалось выше. ***L***-системы уже хорошо проявили себя при описании целого ряда биологических процессов и феноменов и являются, судя по всему, на сегодня *одним* из наиболее разработанных и адекватных аппаратов для описания целого ряда биологических феноменов, и особенно морфологии растений на клеточном уровне [536].

Из результатов *моделирования* процессов развития и целого ряда иных соображений мы пришли к выводу, что ***ОС***-концепция наиболее удобна для дискретного биологического моделирования на *структурном* уровне с последующей компьютерной *реализацией* результатов моделирования; тогда как, например, ***L***-системы *Линденмайера* существенно удобнее для формального описания развивающихся биологических систем, являясь довольно удобным языком их лингвистического описания. Хотя и для случая ***L***-систем возникает целый ряд затруднений при росте размерности системы, которых, по-видимому, и удастся избежать именно на основе использования ***d***-мерных параллельных τ_n-грамматик (глава *5*) и пространственно параллельных грамматик [254]. Между тем, формальные модели *развития* на основе ***ОС***-концепции позволяют для своего исследования привлечь такие относительно *новые* для биологии развития разделы кибернетики и математики, как теория информации, теория алгоритмов и рекурсивных функций, теория автоматов, общая теория систем, логика, теория динамических систем и ряд др., что позволяет формулировать и решать принципиально новые задачи в биологии развития. Более того, ***ОС***-концепция получше приспособлена для исследования именно *процессообразных* феноменов развития: процессы роста, регуляции, регенерации, дифференциации и т.д.; тогда как ***L***-системы намного лучше отвечают топологическим показаниям развития: структурообразованию, морфогенезу, пространственной дифференцировке и целому ряду др. Между тем, ***ОС***-концепция и ***L***-системы довольно хорошо дополняют друг друга в деле дискретного моделирования в биологии развития и, по-видимому, именно поэтому ***Ле Хой*** [350] ввел свои параллельные обменные системы, которые наследуют и основные черты обоих систем, хотя и они весьма чувствительны к размерности моделируемого пространства, имея довольно плохо формализуемые элементы, например, движение единичных модулей системы в моделирующем пространстве.

Использование ***ОС***-концепции, ***L***-систем и иного подобного им аппарата для задач дискретного моделирования в биологии развития даст, по всей вероятности, еще немало весьма интересных результатов. Между тем, вряд ли на основе упомянутых формальных аппаратов может получить дальнейшее развитие качественно новый аппарат моделирования, как это произошло в случае с появлением ***L***-систем на основе концепции одномерных ***ОС***-моделей. Основная причина такого положения вещей состоит в том, что все эти системы весьма чувствительны к важному аспекту – размерности моделируемого пространства и у них, на наш взгляд, отсутствует по отношению к *биологии развития* главное интуитивное качество, присущее любой *хорошей* формальной теории, которое обычно называют изящностью.

В этом плане, прежде всего, необходимо четко представить себе основные недостатки, присущие предыдущим аппаратам *дискретного* моделирования биологии развития. В автоматных моделях *(****ОС****-модели,* ***L****-системы и т.д.)* генетический и эпигенетический механизмы *биологической* клетки представляются неким функционированием *конечных* автоматов, т.е. элементами с дискретными множествами состояний. При этом, взаимодействия элементов порождают переходы из одного состояния в другое по определенным *детерминированным* правилам. Поэтому к недостаткам этих моделей по сравнению с *непрерывными* динамическими моделями можно отнести их достаточно существенную отвлеченность от *конкретных* биологических механизмов. Однако, преимущества таких моделей состоят в возможности исследовать очень *сложные* сети с элементами, имеющими большое число стационаров. Между тем, интересный *промежуточный* подход, базирующийся на дискретно-непрерывной модели генетических сетей, был разработан ***Р. Цаневым, Б. Сендовым*** и их коллегами [340]. В данном направлении имеется ряд и других интересных подходов [536].

Хорошо известно, что описание *поведения* отдельной клетки можно выразить на языке конечных автоматов. Так как совокупность клеток развивается не только за счет изменения самих клеток, а скорее благодаря обмену информацией между ними, то математический аппарат для описания процессов развития на клеточном уровне, вероятнее всего, следует искать в дискретной области, аппарат которой в настоящее время наилучшим образом отвечает подобным задачам. При этом, основные трудности до сих пор встречались именно в связи с *размерностью* моделируемого нами пространства, в котором происходит развитие, и спецификой самих процессов развития – когда собственно само *поведение* клетки в значительной степени зависит от информации, получаемой от ее непосредственных соседей; *клетка* делится в окружении своих соседей, а затем *новая* клетка устанавливает информационные связи со своим новым окружением методом контакта (*исключая граничные клетки*). На базе анализа основных *недостатков* существующих аппаратов дискретного моделирования мы попытались спрогнозировать возможные пути разработки более адекватного аппарата моделирования процессов биологического развития [3-5,46,88,90,536,567].

Возможные пути становления и дальнейшего развития аппарата дискретного моделирования в биологии развития схематично представлены на рис. ***24*** (*пункт* ***8.2.1***). На ***первом*** этапе в данном контексте наибольшее развитие получил аппарат именно *дискретного* моделирования на основе ***ОС***-концепции, из которой на ***втором*** этапе выросли ***L***-системы и были предприняты попытки совместить положительные черты обоих этих аппаратов. Два первых этапа весьма тесно связаны друг с другом как непосредственной преемственностью, так и их *объединяющими* системами для моделирования, пусть даже не в полной мере и разработанными. Итак, современное дискретное моделирование в биологии развития приходится, в основном, на данные два этапа. На ***третьем*** этапе необходимо избавиться от затруднений, которые связаны с размерностью моделируемого пространства и которые до сих пор служат основным препятствием на пути задачи дискретного моделирования такого важного феномена развития, как деление и смерть внутренних клеток в пространственном многоклеточном организме. В данной связи нам представляются достаточно актуальными следующие *три* возможные пути решения данной проблемы, а именно:

♦ ***разработка специальных многомерных паралельных грамматик и алгоритмов, допускающих максимальное паралельное выполнение операций подстановок, а также вставку в любое место перерабатываемого слова любых конечных (возможно и пустых) подслов;***
♦ ***широкое использование идей и понятий графо-топологического аппарата;***
♦ ***разработка принципиально нового аппарата дискретного моделирования, который лучшим образом отвечает проблематике биологии развития.***

На что же реально в настоящее время имеет смысл нам рассчитывать? Прежде всего, о ***первой*** возможности. Разработка *параллельных* алгоритмов и грамматик, оперирующих с многомерными словами, представляет действительно большой интерес. Однако здесь опять возникают сложные проблемы, связанные с *размерностью*. Наш поиск удовлетворяющих таким свойствам грамматик и алгоритмов, пока ни к чему не привел. Однако работа в данном направлении принесла и свои положительные результаты для ряда задач дискретного моделирования биологии развития [90].

Тем более не имеет особого смысла рассчитывать на создание в ближайшее время *принципиально* нового аппарата, *наилучшим образом* отвечающего нуждам биологии развития. Как показал опыт, такой фундаментальный аппарат не создается быстро и притом, практически, на пустом месте. Остается возможность использования ***графо-топологического*** подхода. Наиболее пригодным в настоящее время представляется именно дискретный графо-топологический подход, который действительно учитывает все ранее указанные затруднения *предыдущих* систем, хотя и является еще более абстрактным и менее наглядным. Ряд интересных моделей развития, использующих этот подход, уже появился [3-5,46,88,90]. И в заключение хотелось бы подчеркнуть, мы разделяем мнение ***К. Уодингтона*** в том, что ***основная теория должна быть сходна с топологией d-мерного пространства***. Поэтому уже сейчас мы должны очертить наиболее существенные на клеточном уровне феномены многоклеточных развивающихся организмов, искать наиболее адекватный их моделированию формальный аппарат. И это настолько важный вопрос для биологии развития, что здесь нельзя проявлять какую бы то ни было слабость, пытаясь и далее описывать процессы биологического развития, главным образом, в терминах традиционных понятий кибернетики и математики. Действительно, большинство затруднений использования современного аппарата математики в биологии развития (*впрочем и в биологических науках в целом*) состоит именно в том, что мы пытаемся (*за очень редким исключением*) использовать *формальные* системы, разработанные на основе и для целей исследования неживой природы, и качественно отличной от той области, которой занимается биология и, в частности, ***биология развития***.

В процессе *биологической* эволюции возникли чрезвычайно сложные и вместе с тем поразительно эффективно функционирующие живые организмы, функционирование которых обеспечивают соответствующие биологические управляющие системы. Механизмы, лежащие в основе данных систем, достаточно сложны и по мнению целого ряда исследователей круг вопросов, связанных с этой проблематикой, должен составить *основу* зарождающегося *нового* научного направления – *эволюционной кибернетики*. При этом, основное направление ее исследований можно определить как теоретический анализ, базирующийся на разнообразных математических и компьютерных моделях эволюции биологических систем обработки информации и кибернетических свойств живых организмов. В качестве одного из основных модельных подходов в данном направлении предполагается использование и ***ОС***-моделей в самом широком их понимании. Так, на основе кинематических ***ОС***-моделей уже предпринято симулирование феномена эволюции [536].

8.3. Вопросы использования ОС-моделей в вычислительных науках

В настоящее время довольно значительная активность теоретических исследований в развитии перспективных архитектур вычислительных систем ***(ВС)*** с новыми свойствами и областями их приложений наблюдается относительно параллельных вычислительных моделей ***(ПВМ)***. Работа в этом направлении привела к созданию ряда интересных формальных моделей параллельных вычислений и параллельной обработки информации. Успешно реализован целый ряд проектов по созданию *высокопараллельных* ***ВС***, использующих ту или иную *формальную* модель вычислений [5,11,12,36,42,178,202,234,238,352-363,366-369,403]. Такие известные проекты по созданию ***ЭВМ 5-го*** поколения как «*Fifth Generation*» (*Япония*), «*Alvey*» (*Англия*), «*Esprit*» (*Европа*), «*Strategic Computing*» и «*МСС*» (*США*), и другие предусматривают проведение весьма серьезных работ по *параллельной* обработке информации и высокопараллельным ***ВС*** (*систолические структуры*, *транспьютерные сети*, *матричные и клеточные процессоры*, *однородные вычислительные структуры и т.д.*). А такая, в первую очередь, коммерческая корпорация, как *IBM* уже с ***1976*** начала проводить *международные* научные форумы по *параллельной* обработке информации в рамках математических оснований вычислительных наук. В настоящее время проблематике параллельных ***ВС***, вычислениям на них и обработке информации посвящен целый ряд специальных журналов, регулярно проводятся и международные конференции наряду с выставками различного уровня [201,202,238,308,352,353, 356,357,359-363,367], издается также большое количество литературы различных направлений и уровня [368]. Практические разработки высокопараллельных ***ВС*** представляются и на ставших уже традиционными специализированных выставках современной высокопроизводительной ***ВТ*** [352,353,361,363]. Можно с полной уверенностью констатировать, что параллельные *архитектуры* современных ***ВС*** позволяют сформировать новый взгляд на основные черты их перспективных архитектур, отличных от традиционной *последовательной* фон неймановской архитектуры. Для более подробного знакомства с данной проблематикой в рамках современных вычислительной техники и программного обеспечения можно обратиться к работам [9,358,366,369,372], каталогам публикаций [368,371], а также вышецитированной литературе. Довольно интересный экскурс в развитие архитектур параллельных ***ВС*** (*базирующихся на конечных* ***ОС****-моделях*), их приложениям можно найти также и в [420,536].

Хорошо известные клеточноподобные системы образуют весьма интересный класс таких ***ПВМ*** и ***ОС***-модели являются достаточно типичными и популярными представителями данного класса, образуя собственный подкласс класса всех *параллельных дискретных динамических систем* ***(ПДДС)*** [1,3,5,8,9,11,54,128,147,150,158,159,161,166,177,308,366,536]. Вопреки актуальной проблеме создания высокопараллельных ***ВС*** и *параллельных* принципов обработки информации и вычислений, нам не представляется возможным в рамках этого раздела рассмотреть даже основные аспекты этой проблематики по причине ее обширности, обилия и всего разнообразия имеющегося на сегодня материала. Поэтому рассмотрение ограничим лишь теми основными прикладными аспектами, которые в той или иной мере базируются на вычислительных ***ОС***-моделях и находятся в сфере наших интересов, отсылая более требовательного читателя к соответствующей литературе [536].

Так, *однородные вычислительные структуры* ***(ОВС)*** представляют собой довольно широкий класс дискретных устройств, имеющих теоретической основой ***ОС***-модели. Данная прикладная часть ***ТОС***-проблематики имеет дело с такими *вопросами* как надежность и жизнеспособность, методы контроля и диагностики повреждений, экономические аспекты, параллельное *программирование*, конструирование, методы организации параллельных вычислений и т.д. В рамках ***ОВС*** может быть представлена и модель параллельной операционной системы, которая весьма существенно использует целый ряд *параллельных* управляющих алгоритмов и принципов непосредственно из теории однородных структур [40,45,51,52].

Показано, что ***ТОС***-подход может служить в качестве математической основы методологии для параллельного микропрограммирования. При данном методе способы описания параллельных микропрограмм, их преобразований и синтеза базируются на *специальных системах параллельных подстановок* (***СПП***), которые оказываются строго эквивалентными классическим ***ОС***-моделям. И действительно, ***СПП*** с процедурой их применения строго эквивалентны ***Sb(m)***-грамматикам ***Е. Щербакова***, которые, в свою очередь, строго эквивалентны параллельным τ_n-грамматикам, т.е. определяемым классическими структурами ***1-ОС*** [5,60]. Следовательно, и подход к построению микропрограммной параллельной техники, базирующейся на ***СПП***, может достаточно успешно использовать применимые результаты и методы ***ТОС***-подхода. В качестве примера применения этого подхода можно привести решение проблемы *распознавания непротиворечивости алгоритмов параллельных подстановок* (***АПП***), определяемых ***СПП*** и процедурами их применения. Используя соответствующие результаты по ***ТОС***-проблематике, нам удалось доказать [53], что:

Проблема непротиворечивости АПП имеет конструктивное решение.

Данный результат позволил получить ряд интересных следствий, включая сугубо прикладного характера, в частности, для конструирования *микропрограммно* управляемых систем и устройств, а также роботов и целого ряда других систем со встроенным интеллектом.

Искусственный интеллект вобрал в себя основные попытки отобразить *нейрологические* функции человеческого мозга такие как, познание, ощущения, обработку образов, взаимодействие на базе логических символов в некоторых формальных системах на основе современных компьютерных технологий. Наиболее удачными и практически реализованными разработками в этой области являются *экспертные системы* и различного назначения *знаниеориентированные* системы [94-96], а также естественные языки программирования. А используемые ими технологии предполагают обработку и анализ огромного количества фактов, знаний и правил вывода, для чего необходим широкий и быстрый обмен с базами данных и/или знаний, что обеспечивается только за счет использования ***ВС*** на основе параллельных архитектур. Проведенный обширный анализ [8,9,15, 83,87,90,121,150,159,160,201,202,308,352-373] показывает преимущества и очень большое будущее у параллельных вычислительных архитектур, особенно для научных исследований, для решения глобальных и стратегических задач, систем автоматизации *проектирования* в различных областях планирования и прогнозирования и др. Причина такого положения заключается в возможности достижения *ультравысокой* скорости вычислений в сочетании с относительно *низкой* стоимостью. В этой связи ***ВС*** параллельного действия на основе вычислительных ***ОС***-моделей представляют значительный интерес [3,5,83,147,150,159,160,178,179,201,308,354,366,370,373,376,536], что серьезно стимулирует их интенсивные исследования.

В этом плане весьма перспективными представляются так называемые «*нейронные компьютеры*» [94-96,159,354,374], чьи архитектура и топология наследуют ряд основных черт вычислительных ***ОС***-моделей. Предполагается, что в будущем компьютеры данного класса будут в значительной степени использовать принципы функционирования реального мозга и позволят значительно более успешно решать и задачи искусственного интеллекта. Наряду с этим, нейрокомпьютеры позволят достаточно существенно расширить и класс эффективно моделируемых задач, а также помогут заложить *предпосылки* новых принципов организации памяти *ЭВМ* и работы с данными различных типов. И действительно, реально существующие модели таких компьютеров вселяют определенный оптимизм, обладая целым рядом существенных преимуществ перед *предыдущими* архитектурами [536].

Унификация средств конструирования архитектуры ***ОВС*** и их программного обеспечения тесно связана с исследованием универсальных структур памяти, к которым относятся также ***d***-мерные абстрактные регистры с *периодически* определенными преобразованиями (***ПО****-преобразованиями*), играющие достаточно важную роль в проектировании перспективных параллельных ***ВС***. Было показано (раздел ***6.2***), что подобные формальные конструкции эквивалентны классическим ***ОС***-моделям, а концепция ***ПО***-преобразований и ***ОС***-моделей очень хорошо отражает синхронную *мультиобработку* структур данных и применима при проектировании и конструировании ***ОВС***, а также их базового программного обеспечения на основе параллельных управляющих систем [11,12,15,53-56,88,90,325,536].

Так, в частности, к классическим ***ОС***-моделям тесно примыкают и так называемые ***регистровые автоматы*** [226], представляющие собой математическую модель структуры современных *ЭВМ*. Функционирование таких *регистровых* автоматов определяется ***ПО***-преобразованиями, которые упоминались ранее. Применяя данную концепцию бесконечного автомата, можно построить и абстрактную модель центрального процессора *ЭВМ*, а также решать разнообразные вопросы его микропрограммирования. Следует отметить, что теория *регистровых* автоматов, основы которой были заложены ***В. Глушковым***, весьма тесно увязывается с ***ТОС***-проблематикой и, в частности, с теорией *итеративных автоматов* [536].

В связи с применением теории абстрактных автоматов к теории математических машин важное значение получает понятие *многорегистрового автомата*, как бесконечного автомата *специального* типа, чрезвычайно удобного для описания и изучения *операционных* устройств ***ВС***. Это понятие играет центральную роль в теории дискретных преобразователей [375]. Основными областями *приложений* этой теории являются такие как теоретические вопросы программирования, а также алгоритмическое и логическое проектирование архитектур современных и перспективных ***ВС***, параллельных алгоритмов и весьма широкого спектра устройств дискретного характера [536].

Будучи *эквивалентными* ***d***-мерным ***ПО***-преобразованиям, классические ***ОС***-модели обладают по отношению к ним значительными преимуществами конструкционного характера, что особенно важно с прикладной точки зрения. Наряду с этим, аппарат ***ОС***-моделей позволяет в целом ряде случаев проводить на формальном уровне исследования намного более глубоких свойств ***ПВМ***, а полученные результаты наглядно интерпретировать в рамках базовых понятий используемых технических средств [53-56]. Это является еще одним *доводом* в пользу важности исследований по ***ТОС***-проблематике как одной из перспективных теоретических основ ***ненеймановского*** подхода к вычислениям и организации архитектуры *высокопроизводительных параллельных* ***ВС*** следующих поколений [96,537].

С этими абстрактными *моделями мультиобработки* ассоциированы модифицированные *системы алгоритмических алгебр* (***САА***), ориентированные на вопросы формализации структурированных параллельных схем программ. Операторные представления в данных модифицированных ***САА*** называются параллельными регулярными схемами. Синтез аппарата модифицированных ***САА*** с теорией языковых *мультипроцессоров* привел к определению понятия грамматик структурного проектирования (***ГСП***), которые лежат в основе изобразительных средств ***САА***. А денотативный характер описания процесса конструирования программ в ***ГСП***-терминах сочетается с их явным представлением на базе формальных ***С***-грамматик, что представляет также и непосредственный прикладной интерес [51,53,227,536].

В процессе развития нового подхода к обработке информации, который использует т.н. режим *информационного распараллеливания* (***ИР***) [8,9,11,12,15,49-53], были спроектированы и реализованы *два* программных пакета ***ПСОИ*** (*параллельная система обработки информации*) и ***ПУС*** (*параллельная управляющая система*) для *сосредоточенных однородных вычислительных систем* (***СОВС***), состоящих из моделей *ЕС ЭВМ* с массовыми средствами комплексирования. При проектировании пакетов были существенно использованы практические выводы, полученные при исследованиях целого ряда параллельных алгоритмов и процессов в классических ***ОС***-моделях. В частности, на основе принципа *локального* взаимодействия в ***ОС***-моделях в пакете ***ПУС*** был реализован эффективный принцип *глобально-локального* управления [49-52]. Для целей управления использовались аналоги ряда *оптимальных параллельных* алгоритмов, исследованных в связи с моделированием процессов управления в *биологических* моделях развития на основе ***ОС***-концепции [11,12,52]. Практические рекомендации, полученные в результате исследования погруженных в ***ОС***-модели *параллельных* алгоритмов, были использованы при создании параллельного программного обеспечения, что позволило увеличить полезное время ***СОВС*** на ***10% – 15%*** при прочих равных условиях. На базе анализа функционирования ***СОВС*** в ***ИР****-режиме* под управлением пакетов ***ПСОИ*** и ***ПУС*** создана вычислительная ***ОС***-модель [11], позволяющая устанавливать достаточно интересные аналогии с реальными биологическими клеточными системами. Следовательно, вполне реально говорить о наличии общих *концептуальных* черт функционирования параллельных ***ВС***, базирующихся на вычислительных ***ОС***-моделях, и реальных биологических клеточных систем. Это обстоятельство позволяет сделать *существенные* шаги по наведению мостов между вычислительными и науками биологческого направления, что открывает широкие возможности для взаимного обогащения и развития. Таким образом, ***ОС***-концепция имеет все предпосылки для того, чтобы сыграть весьма существенную роль в вопросе объединения на сегодня настолько различных научных областей современного естествознания. И все это позволяет говорить, что ***ТОС***-проблематика все больше принимает новый и весьма важный *междисциплинарный* характер [536,567].

Анализ автоматной модели функционирования ***СОВС*** под управлением пакетов ***ПУС*** и ***ПСОИ*** в ***ИР***-режиме показал [51,52], что оба пакета допускают представление на основе соответствующих ***С****-грамматик*, описывающих их архитектуру и функционирование. Полученный здесь результат может быть успешно положен в основу использования аппарата тождественных преобразований операторных и логических выражений, разработанного для модифицированных ***САА*** с целью детального описания, анализа и оптимизации параллельных пакетов ***ПСОИ/ПУС*** да и подобных им параллельных программных систем, что позволяет существенно повышать *эффективность* их функционирования в ***СОВС***. А так как *обе* упомянутые модели функционирования ***СОВС*** будут эквивалентны [51], то появляется возможность использования формальных ***С***-грамматик также с целью моделирования биологических процессов и феноменов развития. При этом, автоматную интерпретацию ***ИР***-режима в ***СОВС*** можно получить также в терминах клеточных ***d***-графовых автоматов и древовидных машин [54,88]. Подробный анализ и описание подходов к реализации ***ИР***-режима на основе параллельных пакетов ***ПСОИ*** и ***ПУС*** и связанных с этим вопросов можно найти, в частности, в наших научно-технических сборниках статей [11,12,15,536].

Концепцию, методы и подходы ***ТОС*** можно использовать и для решения ряда более *специальных* задач параллельной вычислительной техники ***(ВТ)***, являющихся составной частью реализации архитектур высокопараллельных *перспективных* ***ВС*** на основе итеративных сетей, клеточных и систолических структур. Вопросы клеточных вычислительных архитектур достаточно подробно обсуждаются в [6,137,138,156,160,169,175,242,360,394], а систолических структур – в [178,370]. Тогда как по итеративным сетям имеется настолько обширная литература, что здесь упомянем только наиболее общего характера источники [230,263,308,357,360-365,367,374]. Сюда непосредственно примыкают и все более активно развиваемые и теоретические, и прикладные исследования и по нейрокомпьтерным архитектурам, составляющим ныне отдельную ветвь общей ***ОС***-концепции [148,322,342-344,347,350,354-358,536]. Практические результаты в данном направлении позволили довольно существенно продвинуть наши представления о возможностях реальных *параллельных вычислительных машин* ***(ПВМ)*** при решении разноплановых конкретных задач.

Существующие на сегодня ***ВС*** с параллельной архитектурой вызвали к жизни целый ряд весьма интересных с прикладной точки зрения работ [8,9,11,12,15,54,87,94-96,121,146,160,166,175,202,234, 238,308,352-374], предлагающих новые эффективные подходы к организации *высокопараллельного* программного обеспечения для решения наиболее часто встречающихся как вычислительных, так и другого типа задач. Наряду с этим, все большее внимание уделяется вопросам разработки конкретных параллельных алгоритмов для решения различных классов вычислительных задач (*дифференциальные уравнения*, *математическая и вычислительная физика*, *линейная алгебра и ряд др.*) [158,177,202,234]), а также других классов задач как вычислительного, так и невычислительного характера (*распознавание образов и обработка сигналов*, *прогнозирование*, *глобальное и стратегическое планирование*, *искусственный интеллект и робототехника и др.* [15,94-96,149,150,159,160,178,234,238, 308,354,356,357,366,368,372,391,392,394]). В данном контексте соответствующие исследования по формальным вычислительным ***ОС***-моделям могут представить весьма серьезный интерес и для теоретического обоснования и практического проектирования перспективных параллельных вычислительных архитектур и их программного обеспечения различных уровней и назначения [5,15,88,90,360-372,374,377,383,420,536].

Целый ряд исследователей, имеющих дело не столько с теоретическими аспектами, сколько с их приложениями, нашли ***ОС***-концепцию очень плодотворной для проектирования *перспективных параллельных* ***ВС*** на основе итеративных, систолических и нейронных структур. Сегодня область данных исследований чрезвычайно обширна, поэтому заинтересованный читатель может с ней ознакомиться по приводимой литературе и содержащимся в ней многочисленным источникам. Целый ряд достаточно интересных исследований рассматривают применение ***ОС***-моделей для изучения молекулярных и биомолекулярных вычислений, а также вопросов теории сложности вычислений [536]. Из более прикладных аспектов ***ОС***-концепции остановимся на некоторых.

Прикладные аспекты ***ТОС***-проблематики в вычислительных науках можно классифицировать как макроклеточные исследования и практические разработки, когда единичный автомат в ***ОС***-модели выбирается в виде структурно существенно более сложного конечного автомата, тогда как их связанное поведение определяет структурные и динамические свойства *реализуемой* ***ПВМ***. Мотивировкой для данного типа прикладных исследований является такая направленность как: клеточная логика, дискретные параллельные вычислительные устройства, машинная графика, нейронные структуры, распознавание образов, итеративные и систолические сети, клеточные и нейронные процессоры, параллельные вычисления в реальное время, обработка сигналов, сети транспьютеров, робототехника, распределенные экспертные системы, искусственный интеллект и др. Например, на основе ***ОС***-моделей имеются практические наработки интересных оболочек экспертных систем, экспертных систем продукционного вида с механизмами *логического* вывода, технологии представления знаний с использованием языкового управления, основанными на ***ОС***-моделях, имеется также ряд весьма интересных динамических механизмов, используемых в распознавании образов и не базирующихся на ***ОС***-моделях, но они могут без каких-либо особых сложностей быть преобразованы в ***ОС***-*модели*, при определенных условиях включая *классические* ***ОС***-модели [117,124,127,135,139,142,145,148,158,164-168,280,281,284-290,297,343,355-358,417,536].

Отметим, с использованием достижений *микроэлектроники* уже сейчас строятся вычислительные системы, содержащие десятки тысяч элементарных процессоров. Данные системы по существу представляют собой аппаратную реализацию ***ОС***-моделей. На основе таких моделей могут быть очень успешно описаны процессы, довольно схожие с распространением волн, их отражением и целый ряд других процессов и явлений, имеющих вполне определенный физический смысл. И, следовательно, имеется перспективная возможность описывать некоторые *физические* процессы, предварительно не формулируя их в виде непрерывных математических моделей (*в частности, на уровне дифференциальных уравнений и их систем*), а всего лишь непосредственно погружая их в соответствующие ***ОС***-модели с последующим анализом на функциональном уровне. На сегодня данный подход уже в целом ряде случаев становится конкурентноспособным относительно ряда традиционных методов, использующих *непрерывные* математические модели. Прежде всего, это относится к тем случаям, когда применение дифференциальных уравнений затруднительно.

Группа венгерских исследователей, возглавляемая ***Т. Легенди,*** в процессе работы по клеточным процессорам существенно упростила и модифицировала клеточную модель ***Дж. фон Неймана*** и его непосредственных последователей [124,128,169,170,175,288-291]. Дальнейшие исследования в этом направлении привели к созданию практических реализаций вычислительной ***ОС***-модели в виде т.н. «*клеточных процессоров Легенди*», а затем и клеточных ***ML***-сопроцессоров для класса ***ПК*** [171,175]. Многолетнее сотрудничество исследовательских групп ***Легенди*** (*Венгрия*) и ***Фольмара*** (*Германия*) способствовало созданию работающих моделей клеточных процессоров и их вполне удовлетворительной теоретической проработке, включая создание *коммерческих* компьютерных симулирующих средств, системного и прикладного параллельного программного обеспечения. Использование ***ML***-сопроцессоров позволяет существенно повысить быстродействие в решении таких важных *классов* задач как распознавание образов, обработка сигналов, использование ряда типов операций с базами данных и знаний, с экспертными системами, организация управления технологическими процессами, все типы клеточных и булевых вычислений и др. В рамках такой совместной деятельности по указанной проблематике проводился целый ряд широко известных международных конференций ***PARCELLA (PAR****allel* ***CELL****ular* ***A****utomata*), издавались интересные серии сборников научно-технических публикаций [156,165,179,308,536].

Другой интересный и перспективный подход к практической реализации вычислительной ***ОС***-модели предложил ***Т. Тоффоли*** созданием *серии* т.н. «*клеточных машин*» (***CAM – C****ellular* ***A****utomata* ***M****achines*) [150-152,165,318,376]. В настоящее время последней моделью является машина ***CAM-8*** [165], тогда как популярное описание ***CAM*** и результатов экспериментов с ними можно найти в превосходной книге [150]. Так, модель ***CAM-6*** представляет собой машину клеточных автоматов, предназначенную для экспериментального исследования относительно простых ***ОС***-моделей. Она представляет собой среду для интерактивных исследования и демонстрации ***ОС***-моделей в режиме реального времени. Физически модель ***CAM-6*** представляет собой (*как* ***ML***-*сопроцессоры*) *специальный клеточный* сопроцессор для ***ПК***. Последней моделью серии является ***CAM-8***, которая технически представляет собой *систолический массив процессоров*, симулирующий параллельную архитектуру ***SIMD***-типа [6]. Разработана в рамках проекта ***ARPA*** в Лаборатории компьютерных наук ***МТИ*** (*США*) и представляет собой вычислительную архитектуру, построенную на основе ***ОС***-модели. В отличие от современных *параллельных* вычислительных систем архитектура ***CAM*** реально не зависит от размеров машины, позволяя создавать весьма большие системы простым наращиванием структурных модулей. Модель выпускается фирмой *Step Research* и ее подробное описание можно найти в [165]. Практическое использование модели ***CAM-8*** оказалось довольно эффективным при моделировании сложных задач гидродинамики, экологии, изучении целого ряда математических свойств ***ОС***-моделей, физического моделирования, получения *специальных* эффектов, обработки образов и др. [166,366,384,392,394,536]. Разработки в данном направлении лежат в русле ***ОС***-моделирования различных процессов на платформе ***CAM-8***, привлекая целый ряд перспективных исследователей к такому модельному подходу. Сегодня в этом направлении уже наметилось достаточно тесное научно-техническое сотрудничество с рядом таких ведущих организаций как *U.S. Air Force*, *Boston University*, *Los Alamos National Laboratory* и др. Серия машин ***CAM*** вывела ***ТОС***-проблематику на качественно новый уникальный уровень, отлично дополнив формальные ***ОС***-модели их прямыми вычислительными аналогами. Это важное обстоятельство позволяет весьма существенно расширять прикладную *модельную* ***ТОС***-проблематику по целому ряду достаточно важных направлений.

Именно создание машин ***CAM*** решило вопрос обеспечения *предельно* простых моделей обычных дифференциальных уравнений в физике таких, как уравнение теплопроводности, уравнение Навье-Стокса, волновое уравнение и которые можно представлять себе как предельные случаи исключительно простых процессов комбинаторной динамики. ***ОС***-подход обеспечивает весьма обширную и непрерывно растущую коллекцию типичных моделей, для которых погружаемые в них явления и феномены могут быть исследованы относительно удобно и легко, на отличном иллюстративном уровне [536,567].

В значительной степени дальнейшим *развитием* вычислительной ***ОС***-архитектуры для решения задач искусственного интеллекта можно рассматривать также среду ***CAM-Brain Machine (CBM)***, созданную в ***Genobyte Inc.*** Среда представляет собой специализированные аппаратные средства, которые формируют вычислительную ***ОС***-модель, базирующуюся на модулях нейронной сети, ориентировочно за ***1*** с. Это настолько быстрая реакция, что, практически, с данного момента в ней будет возможно формировать *искусственные* умственные способности, ассемблируя десятки тысяч таких быстро развивающихся модулей в человеко-подобные искусственные умственные способности. Данного типа модули загружаются в ***1*** *GB* оперативной памяти ***(ОП)*** и ***CBM*** сможет модифицировать ячейки ***3***-мерных ***ОС***-моделей в ***ОП*** со скоростью ***150*** *млрд/сек*, модифицируя *искусственный мозг*, состоящий из ***32000*** модулей ***(40*** *миллионов нейронов****)*** со скоростью ***300*** *раз/сек*, достаточно быстро для симулирования в реальном времени простейших актов поведения. Вот лишь некоторые основные технические характеристики ***CBM-среды:***

скорость обновления ***ОС****-модели –* ***114 - 152*** *млн. ячеек/сек*
число ячеек ***ОС****-модели –* ***453*** *млн.*
число поддерживаемых нейронов (на «мозг») ***– 37.748.736***
вычислительная мощность ***≈10.000*** *Pentium II* ***400*** *MHz*

Предполагается, что обнадеживающие результаты, полученные на ***CBM***, можно рассматривать как достаточно перспективное направление в попытках создания *искусственного мозга* и, в целом, как модель для решения задач искусственного интеллекта.

В качестве интересной параллельной вычислительной системы можно отметить также ***кластер*** из ***1000*** процессоров *Pentium* ***II***, используемый *Genetic Programming Inc.* для решения важных задач клеточных автоматов ***(ОС***-моделей***)***, автоматического синтеза аналоговых электрических сетей и контроллеров, вычислительной молекулярной биологии, исследования операций и целого ряда др. Программное обеспечение решения указанных задач базируется на средствах генетического и эволюционного программирования [536].

Итальянскими учеными из института системного анализа и информационной технологии ***(ISI – CNR)*** была создана эффективная вычислительная среда ***CAMEL (C****ellular* ***A****utomata environ****M****ent for sys****T****ems mode****L****ing****)***, базирующаяся на ***ОС***-модели и реализованная на многомашинном комплексе транспьютерной архитектуры [427,428]. Среда ***CAMEL*** предназначена для высокоэффективных приложений в науке, технике и технологиях. Она предоставляет пользователю вычислительную мощь высокопараллельного компьютера, скрывая от пользователя все проблемы, связанные с ее архитектурой. Система может использоваться как инструмент для моделирования *динамических* сложных явлений и как вычислительная модель для параллельной обработки. Система ***CAMEL*** обеспечивает простой интерфейс, позволяющий в процессе обработки приложения *динамически* изменять параметры, располагая графическим интерфейсом для отображения результатов всех вычислений. При этом, архитектура ***CAMEL*** допускает реализацию на нескольких компьютерах с распределенной памятью таких, как *Intel iPSC*, the *Ncube*, the *CRAY T3D* и *Connection Machine 5*. Система обеспечена *высокоуровневым* языком программирования ***CARPET (C****ellul****AR P****rogramming* ***E****nvironmen****T)***, базирующимся на ***С***-языке с некоторыми дополнительными конструкциями для описания *локальных* функций перехода единичного автомата клеточной структуры. Результаты, полученные в рамках применения указанных средств, показали, что они могут вполне успешно применяться как для моделирования *реальных* систем многих приложений, так и для получения высокой производительности, требующейся для выполнения целого ряда важных вычислений. Детальнее с архитектурой системы и ее программным обеспечением можно ознакомиться в [427, 428]. В определенной мере представляет интерес и ***ОС***-подобная машина ***CEPRA-8***. В некотором смысле к ***CAMEL*** примыкает среда моделирования и библиотека для исследования структур ***ОС*** и ***CAME&L*** (***C****ellular* ***A****utomata* ***M****odeling* ***E****nvironment* **&** ***L****ibrary*), а в более общем отношении набор средств для распределенных и параллельных вычислений [536].

Из программного обеспечения, ориентированного не только на сугубо *параллельную* обработку, можно отметить программу *gridMathematica* фирмы *Wolfram Research*, которая может выполняться в любой компьютерной сети, работающей на платформах *Unix*, *Linux*, *Windows*, *Mac OS X*, требуя только протокол связи *TCP/IP* между машинами. Между тем, преимущество данной программы не ограничивается простым увеличением числа используемых компьютеров; она поддерживает все известные *концепции* параллельных вычислений такие, как блокирование и скрытие времени ожидания, виртуально совместно используемая либо распределенная память, автоматическое или явное распределение и параллелизм, включая синхронизацию. Другие функции включают машинно-независимое выполнение и параллельное программирование, а также восстановление после отказа и автоматическое перенаправление взаимосвязанных процессов в случае системной ошибки. Успешно используется данное средство также для симуляции с высокой реактивностью классических ***ОС***-моделей [536].

Как уже отмечалось, архитектура ***ОС***-моделей привлекательна из-за ее высокого параллелизма, простых вычислительных структур и локальных ресурсов маршрутизации. В данной связи ряд авторов исследовали ***ОС***-модели как универсальные вычислители, эквивалентные *универсальной* машине *Тьюринга*. Например, *программируемые пользователем вентильные матрицы* (***ППВМ***) могут обеспечивать программируемую, максимально параллельную реализацию довольно небольших ***ОС***-моделей. Иначе для больших ***ОС***-моделей требуются *многократные* ***ППВМ*** или рост времени мультиплексирования. Некоторые исследователи использовали генетические алгоритмы для определения ***ОС***-моделей, выполняющих требуемые вычисления. Генетические алгоритмы при исследовании ***ОС***-моделей применяются для формирования правил параллельных подстановок (*определяющих отображения конфигураций* ***ШС***) таким образом, чтобы сама динамика ***ОС***-модели удовлетворяла заданному критерию [536]. Поиск правил, позволяющих найти нужное *поведение* ***ОС***-модели, прежде всего, *многомерной*, в целом ряде важных случаев является довольно сложной задачей. Между тем, показано [536,564,583-585], что поиск ***ОС***-моделей на основе генетических алгоритмов и эволюционного программирования оказывается весьма эффективным средством для получения требуемой *динамики* многомерных ***ОС***-моделей, описывающих *реальные* объекты, процессы, явления и феномены. Между тем, существенно параллельная ***ОС***-модель так же как и генетический алгоритм достаточно плохо приспособлены для их реализации на универсальных микропроцессорных системах. В этой связи предложена модель ***ППВМ*** [15,540], обеспечивающая существенное повышение быстродействия. Были представлены как ***ППВМ***, так и ее приложение к эффективному поиску гибридных ***ОС***-моделей (*с шаблоном соседства размера* **5** *и* **2** *внутренними состояниями элементарных автоматов*), обладающих свойством универсальной вычислимости. А *гибридность* ***ППВМ*** обусловлена дополнительными ресурсами триггерной памяти. Обсуждается применение таких моделей к задачам обработки изображений и анализа бинарных текстур.

Интересной представляется и вычислительная ***ОС***-модель, созданная в *Cell Matrix Corp*., которая представляет собой регулярную матрицу, клетки которой есть физически простые, идентичные мелкозернистые ячейки. Каждая клетка модели связана лишь со своими ближайшими соседями. Эффект от такой организации несомненен: аппаратные средства модели имеют весьма простую конструкцию, недороги и высокотехнологичны в производстве, да и весьма гибки относительно используемых материалов. Архитектура *модели* обеспечивает *ошибкоустойчивость* относительно производственных дефектов, а также и относительно повреждений, возникающих в процессе ее функционирования [536].

В настоящее время растет интерес к генерации *последовательностей*, реализованных отличными от традиционных методами, однако довольно хорошо приспособленными для ряда конкретных прикладных задач. В этой связи представляет определенный интерес использование *однородных структур* для генерации псевдослучайных последовательностей. При этом, рассматриваются и ***ОС***-модели, чья геометрия может базироваться не на прямоугольных целочисленных решетках в $\boldsymbol{Z^2}$, а на треугольных либо даже мозаичного типа. Для исследования динамики таких структур широко используется структурно-графовый метод на базе матриц *инциденций гиперграфов* [536].

В связи с успехами *микроэлектроники* ряд авторов уже сейчас предлагают практические подходы к реализации перспективных сверхбольших интегральных схем на базе концепции ***ОС***-моделей [371,377], которые могут быть разработаны в ближайшее время. В связи с развитием технологии интегральных схем (*где сама специфика производства такова, что там удобно создавать устройства итеративной архитектуры*) интерес к ***ТОС***-проблематике неуклонно растет. ***Клеточная логика*** имеет дело с математическими моделями и техникой для анализа и синтеза цифровых сетей на базе вычислительных ***ОС***-моделей, однако из-за обширности данной тематики ее рассмотрение выходит за рамки настоящей книги, а интересующийся читатель отсылается к соответствующей литературе. Предлагаются методологии организации вычислений в средах ***2-ОС*** с реализацией всех базовых и массовых операций. При этом, тестирование проводится на основе специальных имитационных систем. К вычислительным ***ОС***-моделям достаточно тесно примыкают также и вычислительные структуры на *систолических* принципах функционирования, характеризуемых однородностью вычислительных ячеек, регулярностью и локальностью *информационных* связей. В настоящее время исследования в области практической реализации *систолических процессоров* ведутся довольно широко и полученные прикладные результаты по ***ОС***-моделям, прежде всего, алгоритмического характера могут оказаться достаточно полезными также и для организации систолических вычислений и обработки данных [536,576].

С развитием *наноэлектроники* растет интерес к одному из наиболее перспективных направлений современной кибернетики – ***ОС***-моделям. Когда говорят о процессорах, первая характеристика, которая называется – это тактовая частота. Ведущий мировой производитель процессоров ***Intel*** довольно быстро сумела убедить человечество, что самое главное в процессоре – это его тактовая частота, хотя в реальности это и не совсем так. За *тактовую частоту* процессора отвечает весьма маленький кварцевый генератор, задающий ритм всему происходящему в компьютере. Однако, эти «*часы*» совсем не обязательны для работы всех цифровых устройств. Более того, целый ряд специалистов даже считают, что со временем *интегральные* схемы, работа которых регулируется тактовыми генераторами, уступят место *асинхронным* схемам, в которых нет внутренних «*часов*». Действительно, при *одновременном* росте сложности схем и скорости вычислений *согласованность* всех процессов с помощью ***единых*** тактовых синхроимпульсов становится достаточно сложной и энергетически неэффективной. Но хуже всего то обстоятельство, что в синхронных схемах *общая* производительность определяется производительностью самой *медленной* компоненты, и иногда такой компонентой являются сами «*часы*». Поэтому сейчас в лабораториях ряда компаний идут эксперименты с процессорами, не имеющими тактовой частоты. К таким относятся процессоры, построенные на базе асинхронных схем без тактового генератора, либо процессоры, отдельные компоненты которых могут иметь внутренние «*часы*», однако соединены они вместе с помощью асинхронных цепей. В этом направлении японские исследователи [536] предложили концепцию асинхронного нанокомпьютера на основе ***ОС***-модели, основу которого составляют квадратные ячейки, хранящие четыре бита (*по одному на каждую сторону*) и ***9*** простых правил, управляющих взаимодействиями между ячейками. С помощью данного набора можно выполнять логические и арифметические операции, и организовывать циклы обработки. Была продемонстрирована принципиальная работоспособность компьютера такой конструкции, эффективность которого зависит не столько от аппаратной части, сколько от качественного программного обеспечения. Результаты, полученные в данном направлении, представляются достаточно перспективными и проводимые здесь проработки уже находятся на достаточно серьезном практическом уровне.

<u>Проблемы, возникающие при переходе к архитектуре нанокомпьютера</u>:

• переходом к вычислительным элементам нанометровых размеров является значительный рост количества достаточно сложно реализуемых соединений

• невозможность синхронизации работы отдельных элементов микросхемы (*ибо в наноизмерениях становится существенным расстояние от синхронизатора до элемента*). Традиционная архитектура не учитывает стохастический характер квантовых явлений. Традиционные компьютеры весьма чувствительны к задержкам сигналов и различного рода другим помехам

• неудобство сборки устройств, содержащих триллионы наноэлементов, достаточно неудобная технологичность проектирования и производства компьютеров с неоднородной архитектурой (*элементы **ИС** – интегральных схем – существенно различаются структурно между собой*)

• при повышении плотности вычислений мы имеем дело с ростом выделения тепла, связанным с тем, что при обычных вычислениях увеличивается энтропия (*процессор быстро нагревается*). По этой причине невозможно создавать сверхплотные трехмерные логические схемы

• высокая дефектность производства ***ИС***, неизбежная при сборке их на *наноуровне* из огромного количества соединений

• ограниченная гибкость традиционных логических схем, чьи функции во многом определены их аппаратной реализацией

• традиционные схемы при своей работе излучают электромагнитные волны в радиочастотном диапазоне; следовательно, их просто выявить, сканировать и легко поразить электромагнитным импульсом

<u>Решение вышеотмеченных проблем на основе вычислительных ОС-моделей:</u>

• элементарные ячейки нанокомпьютера на базе ***ОС***-модели плотно прилегают друг к другу, не требуя каких-либо сложных дополнительных соединений

• все ячейки ***ОС***-нанокомпьютера работают независимо друг от друга и, следовательно, для них отсутствует необходимость в устройствах внешней синхронизации; они также могут работать в условиях задержки сигнала и целого ряда других помех, носящих ярко выраженный квантовый характер

• самосборка позволяет создавать огромные массивы однородных наноструктур с обеспечением высокой технологичности при их физической реализации в качестве ***ОС***-компьютера

• вычисления в ***ОС***-моделях не ведут к существенному повышению энтропии, ибо ***ОС***-модели могут обеспечивать вычисления без потери информации, т.е. применять *обратимые* вычисления

• поскольку ***ОС***-процессор состоит из однородных элементов, то дефекты элементарных ячеек в нем не ведут к критическим ситуациям в его работе. Итак, вышедшая из строя ячейка попросту не участвует в вычислениях, не влияя на работоспособность ее соседей

• функции, выполняемые ***ОС***-процессором, полностью определяются его программной средой. Практически, достаточно простым программированием процессор можно наделить и любыми функциями по обработке информации и обеспечения вычислений

• в отличие от традиционных схем ***ОС***-модели не нуждаются в тактовом генераторе, на котором они работают. Каждая ячейка сама решает, когда ей работать, на основе только своего состояния и состояний своих непосредственных соседей. Поэтому, мелкие разнонаправленные импульсы излучения, возникающие при работе отдельных ячеек ***ОС***-модели, практически, нивелируются. Следовательно, в результате излучение такой системы подобно не сигналу радиопередатчика, как в случае обычного компьютера, а скорее напоминает электроэнцефаллограмму мозга; таким образом, запеленговать такого типа компьютер и повлиять на его работу извне весьма сложно.

Как правило, *нанокомпьютеры*, использующие ***ОС***-концепцию, базируются на ***2-*** либо ***3***-мерных ***ОС***-моделях. Кратко остановимся на проблемах, возникающих при переходе от традиционных сегодняшних компьютеров к нанокомпьютерам и каким образом их решению сможет помочь и способствовать использование *вычислительных* ***ОС***-моделей, которым в последнее время уделено весьма повышенное внимание. Выше представлена *сводка* ряда основных соображений в данном направлении, которая, нося субъективный характер, в целом представляется нам полезной [536].

Рассмотрим некоторые принципиально неразрешимые *технологические* проблемы производства компьютеров. При *экспоненциальном* росте количества интегрированных транзисторов размеры самого единичного транзистора и ширина контактных дорожек также должны уменьшаться по *экспоненциальному* закону, для обеспечения *размещения* всех транзисторов на небольшом участке, отведенном под процессор. Так как атом является наименьшей частицей, сохраняющей свойства химического элемента, ширина контактной дорожки не может быть меньше атома. Опираясь на закон ***Мура***, можно рассчитать, примерно к ***2050 г.*** ее ширина совпадет по размеру с отдельным атомом и дальнейшее уменьшение с более плотной *упаковкой* транзисторов в рамках технологии *CMOS* становится просто невозможным. Однако оказывается, предел теоретически возможной *миниатюризации* ширины дорожки в рамках технологии *CMOS* гораздо ближе и рассчитывается, исходя из других принципов, в частности, связанных с большим выделением тепла.

В настоящее время главной причиной выделения тепла является несовершенство материалов. Между тем, опыт последних тридцати лет показал, что за счет использования новых материалов удавалось поддерживать *экспоненциальный* рост производительности компьютеров, но проблема существенного уменьшения тепловыделения заключается не в несовершенстве материалов, а в т.н. принципе *Ландауэра*, который основывается на принципе неубывания энтропии замкнутой системы, которой в этом случае выступает система компьютера и источника питания. Принцип *Ландауэра* гласит, что *независимо* от физики и технологии вычислительного процесса при потере ***1*** бита информации в процессе вычисления выделяется определенная энергия, *вполне* доступная оценке. Эта энергия настолько мала, что кажется несущественной. Однако даже поверхностный анализ объема энергии, выделяемой в связи с потерей информации, показывает, что и в рамках современной технологии просто отбрасывать или списывать на погрешность измерений ее уже нельзя. При срабатывании каждый транзистор теряет ***1*** бит информации, а выделяемая им при этом энергия оказывается примерно в ***500*** раз больше установленного ***Р. Ландауэром*** минимума. Проведенные оценки, связанные с *потерей* информации, дают тепловыделение порядка ***0.147*** вт, что само по себе, естественно, не критично, между тем, в связи с вышеупомянутым *законом* Мура настораживает. Итак, обеспечить необходимое охлаждение *принципиально* невозможно, а значит, развиваться технологии *CMOS* осталось недолго. В научном же смысле она уже изжила себя.

Какие же на сегодня существуют альтернативные способы организации вычислений, а также и технологии создания перспективных вычислительных устройств?

Рассмотрим подход к организации самого процесса вычислений. Здесь для достижения высокой производительности следует выполнять вычисления без потери информации, т.е. вычисления должны быть обратимыми. ***Ч. Беннет*** показал, что нулевая потеря энергии возможна лишь при использовании *обратимых* вычислительных блоков. Такого типа *обратимый блок* позволяет точно восстановить входные данные по выходным данным. Работы в этом направлении ведутся весьма интенсивно, хотя здесь существуют достаточно сложные *технические* проблемы. Здесь в качестве вычислительных моделей представляют особый интерес ***обратимые ОС***, исследуемые довольно интенсивно не только в контексте физического моделирования, но также в связи с организацией обратимых вычислений [376,378,430,536,594].

Некоторые из *логических* вентилей, достаточных для создания универсального компьютера (*так, например*, ***XOR***), необратимы. По этой причине до ***1970***-*х* полагалось, универсальное вычисление должно быть ***необратимым.*** Но в ***1970****-х* работами ***Беннетта, Марголуса, Тоффоли, Фредкина*** и другими, было доказано, что и универсальные компьютеры могут быть обратимыми, и тогда же был предложен ряд обратимых логических вентилей, пригодных для создания универсального компьютера. Существенный шаг в этом направлении был сделан в ***1982 Ч. Беннеттом,*** который показал, что универсальный цифровой компьютер типа машины *Тьюринга* может быть построен на логически и термодинамически обратимых вентилях таким образом, что его энергия должна будет рассеиваться только за счет необратимых периферийных процессов ввода информации в машину и вывода из нее результата. К типичным *обратимым универсальным* вентилям относятся вентили ***Фредкина*** и ***Тоффоли*** [536,593].

Как известно, вычислительный процесс в общем случае является *необратимым*, т.е. по конечному результату в общем случае невозможно однозначно восстанавливать промежуточные, тем более начальные (*исходные*) данные. Между тем, *обратимые* вычислительные ***ОС-****модели* предоставляют принципиальную возможность создания *полностью обратимых* (*в указанном смысле*) компьютеров и организации *обратимых вычислений*. В настоящее время уже предложен целый ряд интересных обратимых вычислительных ***ОС-***моделей, базирующихся на достаточно известных физических принципах [150,360,366,384,388,536,593]. Данное обстоятельство позволяет нам пересмотреть ряд традиционных положений классической теории вычислений, подводя под нее весьма серьезный *физический* фундамент, т.е. позволяет увязать физические и вычислительные процессы в рамках единой физической концепции мира.

Внедрение *микросотовых* сетей предполагает потенциальное увеличение емкости сотовых сетей, однако здесь возникают проблемы *управления* этими сетями. Один из подходов к решению этих проблем состоит в использовании правила *самоорганизующихся* алгоритмов назначения каналов с распределенным управлением. Иранские специалисты предложили очень интересный подход на основе ***ОС-***концепции [536]. С этой целью они определили обучающиеся ***ОС-***модели (***ООС***), в основу которых положено использование *обучающихся* автоматов для настройки вероятностей переходов состояний ***ОС-***моделей. На основе ***ООС*** был предложен один самоорганизующийся алгоритм назначения каналов сетей. Предложенный алгоритм уменьшает время, необходимое алгоритмам, которые используют полный перебор для нахождения оптимального решения, для фиксированного назначения каналов. Экспериментальное компьютерное симулирование таких моделей вполне убедительно подтвердило, сотовая сеть может самоорганизовывать назначение каналов в процессе своего функционирования, используя достаточно простой и эффективный алгоритм.

Из наиболее последних разработок, использующих ***ОС-***технологию, следует отметить создание в университете Нотр-Дама *первого «бестранзисторного» чипа*, который рассматривается в качестве прототипа процессоров будущего. Как сообщает *Wired News*, вместо *полупроводниковых* элементов логические операции в нем выполняют *наномагниты*, а сам процессор устроен по принципу ***ОС-***модели; при этом, для практической реализации данной ***ОС-***модели предлагается использовать системы квантовых точек [536,567].

В рамках создания *перспективных* вычислительных архитектур имеется несколько направлений, в которых вполне возможно рождение и новой логики – это, прежде всего, *квантовые вычисления*, подходы на основе биологических принципов и ***ОС-***моделей. По мнению целого ряда ведущих специалистов-практиков *реалистичность* перспектив *первого* направления рассматривается очень скептически – за прошедшие ***5*** лет появилось немало публикаций по «*квантовым вычислениям*», но ***90%*** из них – теоретические. В большей степени полагаются на биологические подходы; при этом, данное направление может придать особую значимость междисциплинарной связи между инженерами и нейроспециалистами. Наконец, *другой* перспективный подход к реализации ряда компьютерных функций – использование ***ОС-***модели, чья сущность состоит во взаимодействиях наномасштабных элементов (*электростатически связанных квантовых точек либо взаимосвязанных* *наномагнитов)* в регулярной большой решетке. Потенциал такого направления видится, прежде всего, в специальном приложении таком, как распознавание образов. Основные сложности при реализации квантовых клеточных автоматов были изучены еще в ***1996 г. Д. Мейером*** [536]. Пока в практическом отношении исследования квантовых клеточных автоматов не обнадеживают, и на прогресс в данном направлении в ближайшее время рассчитывать особенно не стоит.

Существенный интерес в контексте реализации вычислительных ***ОС***-моделей представляет т.н. *ансамблевый* ***ЯМР*** *квантовый* клеточный автомат. Первые прототипы такого типа ***ЯМР*** квантовых компьютеров были реализованы в ***1997*** *(см.* ***Jones J.*** [536]*)*. Главным преимуществом компьютера такого типа является то, что практически независимые молекулы жидкости, из-за усреднения в результате интенсивного броуновского движения молекул меж- и внутримолекулярных диполь-дипольных магнитных взаимодействий, действуют *независимо*, вполне обеспечивая возможность управления ими и измерение их состояний посредством хорошо известных в технике ядерного *магнитного резонанса* ***(ЯМР)*** операций над *макроскопическим* объемом жидкости. Индивидуальное обращение к отдельным кубитам заменяется одновременным обращением к соответствующим кубитам во всех молекулах ансамбля. Компьютер такого типа и получил название ***ансамблевого ЯМР квантового компьютера***. Примечательно то, что он в принципе работает при комнатной температуре. В области ***ЯМР*** квантовых компьютеров на органических жидкостях к настоящему времени достигнуты наибольшие успехи. Экспериментально на таких компьютерах реализован целый ряд сложных алгоритмов. Между тем, компьютеры такого типа имеют ряд существенных органичений [536]. Вследствие этого было обращено внимание на ансамблевый твердотельный квантовый компьютер, работающий по принципу ***ОС***-моделей. Основные принципы данного компьютера рассматривались в целом ряде работ [536]. Так, ***S. Lloyd*** [536] рассмотрел систему из двухуровневых квантовых элементов, которыми могут быть и ядерные спины с ***I=1/2***, имеющую периодическую структуру типа цепочки ***ABCABCABC...***, где ***A,B,C*** – три различных типа *ядерных* спина с различающимися резонансными частотами. Предполагается, атомы с *ядерными* спинами имплантированы в кристаллическую решетку некоторого *бесспинового* твердого тела. При этом, предполагается также, что данная система ядерных спинов может быть инициализирована, т.е. переведена каким-либо способом в начальное основное состояние – ***0***. При этом, ядерные спины располагаются на таком расстоянии друг от друга, которое обеспечивает наличие *определенного* взаимодействия между соседними спинами и, как следствие, зависимость резонансной частоты каждого спина от состояния его соседних спинов. В деталях с организацией данного квантового компьютера можно ознакомиться в [536].

Между тем, уже в такой простой системе с помощью только соответствующей *последовательности* импульсов можно выполнять *любую* цифровую и квантовую *логическую* операцию. В этом смысле такой квантовый компьютер является универсальным. Более общая модель твердотельного ***ЯМР*** ансамблевого квантового клеточного автомата была представлена в работе ***Wei H.*** и др. [536], где рассматривалась *периодическая* структура типа ***ABCABCABC...*** в двух- и трехмерных структурах с ядерными спинами трех различных типов. ***С. Бенжамин*** показал, что для построения квантового компьютера, функционирующего по принципу ***ОС***-модели [536], вполне достаточно лишь двух разных типов ***2***-уровневых элементов – физических кубитов ***A*** и ***B***, в частности, ядерных спинов, отличающихся резонансными частотами. Было показано, что легирование примесями ***3***-мерной сверхрешетки из ядерных спинов позволяет создать твердотельные квантовые автоматы с весьма высокой интеграцией, в которых целый кристалл будет представлять собой большой ансамбль идентичных параллельно работающих квантовых компьютеров. Из вышеупомянутых вариантов квантовых ***ОС***-*компьютеров* в качестве главного технологического процесса является *выращивание* соответствующих кристаллических структур. Роль нанотехнологии здесь сводится к минимуму, например, для создания лишь затворов над атомами, играющими роль портов, либо в процессе *имплантации* атомов с отличающейся ядерной *резонансной* частотой, служащих для ансамблевого ввода и вывода информации.

В работах ***А.А. Кокина*** были достаточно детально исследованы физические основы и проблемы *реализации* твердотельных ***ЯМР*** квантовых компьютеров, базирующихся на ***ОС-***модели [536,593]. Были определены преимущества ансамблевого квантового клеточного автомата по сравнению с ансамблевым вариантом с полосковыми затворами, а именно:

– отсутствие системы управляющих затворов довольно существенно упрощает технологию при изготовлении структуры такого компьютера, исключая один из связанных с ними существенных источников декогерентизации;

– кодирование *логических* кубитов на четырех физических кубитах обеспечивает более высокую степень помехозащищенности проводимых логических операций;

– переход к схеме квантовых клеточных автоматов ***(ОС)*** позволяет решить и четвертую, и пятую проблемы схемы ***Кейна*** [536,593].

Между тем, к недостаткам этого компьютера можно отнести относительно *сложную* организацию логических операций над логическими кубитами. Из проведенного анализа следует [536], что вариант *твердотельного* ***ЯМР*** ансамблевого квантового компьютера с двухмерным электронным газом требует использования *высокоточной* нанотехнологии (*квантовые ямы и системы полосковых затворов*)**,** тогда как вариант на естественных кристаллах предполагает использование слишком больших градиентов магнитного поля. Таким образом, наиболее перспективным представляется *направление* разработки ансамблевых твердотельных ***ЯМР*** квантовых компьютеров, при котором используются принципы квантовых ***ОС-***моделей и которое уже потенциально допускает отказ от создания регулярных наноструктур в виде цепочки затворов, что представляется достаточно существенным моментом.

Идея квантового компьютера восходит к работам ***R. Feynman*** [536]**,** в которых он рассмотрел весь вычислительный процесс с физической точки зрения**.** ***Feynman*** показал, что сделав вычисления *обратимыми*, можно создавать вычислительные системы на уровне нанотехнологий (*современным языком*)**,** когда квантовые эффекты играют очень существенную роль и обусловлено это, прежде всего, ростом энтропии для *необратимых* вычислений. В середине ***80-х*** появились работы ***A. Yao, D. Deutsch, E. Bernstein*** и ***U. Vazirani,*** в которых были описаны формальные модели квантового компьютера. Затем ***P. Shor*** в ***1994 г.*** [536] создал первый квантовый алгоритм факторизации, что породило массу работ в данном направлении по той причине, что разложения целых чисел на множители используются**,** в частности, для дешифровки. Все такого рода известные алгоритмы для обычного компьютера требуют экспоненциального роста врененных затрат (*экспонента от числа знаков факторизуемого числа*)**,** тогда как на квантовом компьютере такая задача имеет всего лишь кубическую сложность. Таким образом, это *новое* направление, как «*квантовые вычисления*» в настоящее время привлекает самое пристальное внимание и ***ОС-***модели в данном контексте благодаря их особенностям (*универсальность*, *обратимость*, *локальность*, *параллелизм и др.*) **с**могут, как вкратце было показано выше, сыграть довольно существенную роль**.** В частности, в качестве моделей квантовых клеточных процессоров и нанопроцессоров [536].

В ***2007 г.*** группа исследователей фирмы *IBM* разработала способ манипулирования магнитными свойствами отдельных атомов, что сможет привести к разработке в самом ближайшем будущем сверхъемких модулей памяти микропроцессоров с архитектурой, совершенно отличной, чем у современных кремниевых. Основа этой методики – спектроскопия «*переключения спинов*» – была ими заложена в ***2004 г.*.** Уже тогда впервые появилась возможность исследовать атомы в качестве «*элементарных магнитов*»**.** Разработчики идеи преследуют цель целенаправленно «*переключать*» магнитный момент у как можно меньшей группы атомов**.** Именно в русле данных исследований совсем недавно был разработан прототип «*магнитного процессора*»**,** который устроен по *принципу* вычислительной ***ОС-***модели [536].

В заключении этого раздела кратко резюмируем основные практические выходы теоретических результатов по ***ТОС***-проблематике, рассмотренных в предыдущих главах книги. Прежде всего, *проблема неконструируемости* (глава ***2***) вполне естественным образом увязывается с проблемой о возможности погружения в вычислительную ***ОС***-модель того или иного *параллельного алгоритма* ***(ПА)*** и возможностям параллельного программного обеспечения в перспективных *параллельных* ***ВС*** на ее основе. Сюда же относится и проблема исследования алгоритмов, наилучшим образом приспособленных для погружения в ***ОС***-модели. В данной связи нами был определен класс т.н. *локально реализуемых алгоритмов* ***(ЛРА)***, основной характерной чертой которых является именно возможность представления вычислительного алгоритма посредством локальных идентичных алгоритмов над отдельными подсловами любого перерабатываемого слова. Довольно типичным примером алгоритмов такого класса являются алгоритмы символьной сортировки. Имеется ряд попыток интерпретации результатов по *неконструируемости* для случая нейроноподобных сетей и ряда других типов ***ОС***-моделей [269]. Тогда как ряд результатов по *воспроизводимости* (глава ***3***) и *сложности* конечных ***КФ*** (глава ***4***) могут оказаться достаточно полезными и при исследовании проблем самовосстановления и надежности в ***ОС***-подобных вычислительных системах, а также сложности вычислений [54,88,90,536].

Ряд исследователей показал, что подходящим выбором ***А***-алфавита, области определения ***ГФП*** и некоторых дополнительных процедур погружения алгоритмов класса ***ПА*** в вычислительную ***ОС***-модель, соответствующие классические ***ОС***-модели могут рассматриваться как алгоритмы, определяемые клеточными процессорами. Учитывая достаточно высокие требования по уровню распараллеливания, для эффективного практического использования вычислительных систем на базе ***ОС***-моделей необходимо, прежде всего, систематизировать уже имеющиеся, в основном, эвристические методы распараллеливания в ***d-ОС***. Существующие на сегодня методы возможно разбить на *три* больших класса, а именно: волновой, фильтрации и метод частиц [11,15]. Все эти прикладные методы имеют одну общую черту, отражающую формализм алгоритмов класса ***ПА***, определяемых ***ОС***-моделями, а именно: на каждом цикле работы преобразованию подвергается *вся глобальная* конфигурация ***ОС***-модели и концом обработки (*вычисления*) полагается появление *пассивной конфигурации* ***(ПКФ)***. Для практической задачи идентификации перехода в ***глобальное*** *состояние* ***ПКФ*** предложен целый ряд довольно интересных подходов [3]. Таким образом, раздел ***ТОС***-проблематики, занимающийся ***ПА***, имеет непосредственный *практический* выход, который не ограничивается только ***ВС***, базирующимися на вычислительных ***ОС***-моделях.

Результаты по формальным *параллельным* τ_n-грамматикам (глава ***5***), определяемым структурами ***1-ОС***, показывают, что традиционный подход к разработке *языков* программирования для среды высокопараллельных ***ВС*** не позволяет нам создавать действительно эффективное параллельное программное обеспечение, максимально использующее высокую степень распараллеливания, допускаемую вычислительными ***ОС***-моделями. В этой связи *параллельные* грамматики, которые определяются ***ОС***-моделями, смогут оказаться весьма удобной математической основой как для семантического представления языков микропрограммирования параллельных *ЭВМ*, так и для описания многих видов клеточных систем. В частности, уже имеется ряд интересных примеров самого непосредственного применения теоретических результатов исследования параллельных формальных грамматик к синтезу параллельных *микропрограммных* структур [173]. Примерами таких структур являются матричные, клеточные, ассоциативные и конвейерные процессоры, и ряд других вычислительных структур, представляющих несомненный интерес для разработки архитектур перспективных *параллельных* ***ВС*** и их программного обеспечения [9,354-358,536,573].

Результаты исследования по проблеме декомпозиции ***ГФП*** в классических ***ОС***-моделях (глава ***7***) представляют непосредственный прикладной интерес, связанный с реализацией *перспективных* архитектур ***ПВС*** на основе как классических, так и недетерминированных вычислительных ***ОС***-моделей. С моделированием (глава ***6***) тесно связана проблема надежности, играющая довольно важную роль в практических реализациях параллельных вычислительных устройств на основе ***ОС***-моделей. В данной связи предлагается ряд принципов и алгоритмов самовосстановления в ***ОС***-моделях, которые могут быть полезны для практического конструирования в ***ОВС***. Наряду с этим, на основе ***Т***-моделирования изучается довольно широкий класс вопросов, среди которых можно выделить следующие: универсальная вычислимость и параллельные алгоритмы, классы параллелизма, выбор наиболее эффективных для реализации в ***ОС***-моделях алгоритмов и ряд других. Например, устанавливается важный класс далеких от оптимальных последовательных алгоритмов, которые оказываются наиболее эффективными при погружении их в ***ОС***-модели. Подобные проработки позволяют *по-новому* взглянуть на *традиционные* вычислительные методы в условиях использования *параллельного* принципа вычислений. Например, целый ряд довольно простых вычислительных алгоритмов, которые *неэффективны* для реализации на традиционных вычислительных моделях последовательного действия, оказался весьма высокоэффективным во временном отношении для реализации их в среде вычислительных ***ОС***-моделей, требуя особого акцента на данном прикладном вопросе [536].

Наконец, *отдельные* более прикладные задачи в рамках ***ТОС***-проблематики также представляют определенный интерес для практических реализаций систем *управления* в вычислительных ***ОС***-моделях. К ним можно в полной мере отнести, например, такие задачи, как синхронизация сети автоматов [196], Французского флага (пункт ***8.2.4)*** и ограниченного роста (пункт ***8.2.3)***, которые отражают специфические черты проблемы *синхронизации параллельных* управляющих процессов и позволяют разрабатывать *быстрые* параллельные алгоритмы синхронизации для тех или иных приложений в управляющих структурах высокопараллельных ***ВС***, базирующихся на общей ***ОС***-концепции. Так, из сугубо утилитарных приложений можно отметить возможности успешного использования ***ОС***-подхода и в качестве аппарата решения задач температурного мониторинга при проработке вопросов расчета и проектирования программных и аппаратных средств [536].

В настоящее время даже специалисты не могут предсказать с *достаточной* степенью уверенности возможности ***ПВС*** новых поколений и результаты их влияния на нашу жизнь. Так, в частности, достаточно интенсивно обсуждаются новые возможности на стыке кибернетики и биологии, с помощью которых будут созданы компьютеры последующих поколений. Сегодня все активнее проводятся многоаспектные работы по фундаментальным и прикладным проблемам создания молекулярных *ЭВМ*, искусственных органических систем, которые смогут обладать некоторой способностью к самовоспроизведению. Еще в процессе исследования [1,3-5,46,88,90] прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики в теоретической и математической биологиях в ряде случаев нами была установлена достаточно тесная аналогия между механизмами, лежащими в основе целого ряда биологических процессов развития, и процессами обработки и управления в *параллельных* ***ВС***, базирующихся на ***ОС***-модели. При этом, подобно аналогии механизмов *самовоспроизведения* абстрактного автомата и реальных биологических клеток, установленной ***Дж. фон Нейманом***, была обнаружена очень интересная аналогия между функционированием формальной модели ***ОВС*** в режиме *информационного* распараллеливания, реализованной на основе ***ОС***-концепции, и *реальными* биологическими клеточными системами переработки информации. Был рассмотрен целый ряд и других весьма интересных аналогий [3,11-12,15,88,90,536].

Наряду с этим большой интерес представляет исследование принципов управления в подобных вычислительных ***ОС***-моделях с точки зрения *общей* теории систем. Эти предпосылки позволяют навести своего рода *мосты* между биологическими и вычислительными науками, что открывает широкие возможности для взаимного обогащения и развития в обоих приоритетных на сегодня науках. На наш взгляд данная связь будет и далее неуклонно расширяться и с течением времени может принести даже большую пользу вычислительным наукам, чем наоборот. И последующее развитие перспективной параллельной вычислительной техники будет, по-видимому, идти под знаком все более тесных аналогий с биологическими клеточными системами, вплоть до прямого использования отдельных *биологических* элементов (*биочипов*) и принципов функционирования, и организации, весьма разумно спроектированных самой природой. Таким образом, концепция ***ОС***-модели имеет все предпосылки для того, чтобы сыграть довольно существенную роль в деле объединения столь различных на сегодня научных областей.

В заключении раздела кратко коснемся сегодняшнего соотношения между фундаментальными результатами по ***ТОС***-проблематике и их прикладными аспектами в вычислительных науках. Складывающееся на сегодня мнение о *слабой применимости* многих теоретических результатов, полученных в ***ТОС***-проблематике, в приложениях базируется на следующем весьма ошибочном предположении. Сложность структурной *реализации* современной технологией вычислительных ***ОС***-моделей с очень большим числом единичных автоматов приводит к тому, что практические реализации ограничены относительно небольшим числом единичных автоматов, т.е. мы имеем дело с конечным клеточным автоматом, который принципиально отличен от классической ***ОС***-модели. Такого типа организация позволяет значительно упростить как реализацию средствами современной технологии, так и сам процесс управления параллельными вычислениями. Более того, естественно, что степени распараллеливания вычислений и управления в таких конечных ***ОС***-моделях достаточно далеки от максимально возможных и для них пока не имеют серьезного смысла основные фундаментальные результаты математической теории однородных структур.

Между тем, при дальнейшем развитии технологии и расширении ненеймановского подхода к вычислениям вполне естественным является переход к вычислительным ***ОС***-моделям, которые будут содержать огромное количество относительно простых единичных автоматов. Упрощение единичных автоматов позволяет использовать и более *низкий* уровень описания алгоритмов, что, в свою очередь, повышает допустимый уровень распараллеливания задач, решаемых на основе вычислительных ***ОС***-моделей; тогда как большое число единичных автоматов допускает весьма эффективную реализацию в таких моделях и более сложных задач распараллеливания. Вместе с тем, рост количества единичных автоматов ***ОС***-моделей существенно расширяет и возможность использования и удовлетворительной интерпретации даже достаточно абстрактных результатов из математической теории ***ОС***. Между тем, далеко не все задачи целесообразно решать на ***ПВС***, базирующихся на вычислительных ***ОС***-*подобных* моделях. По нашему мнению, задачи, которые эффективно решаемы на такого типа ***ПВС***, составят достаточно узкий класс из всего множества задач, охваченных компьютерной обработкой, ибо имеет место весьма широкий спектр уровней распараллеливания, допускаемых всем многообразием решаемых на *ЭВМ* задач. Между тем, для более детального обсуждения этого вопроса заинтересованного читателя отсылаем, например, к работам [5,11,12,15,53-56,88,90,160,263,308,354-358,365,372,374,383,394,536,571].

В качестве еще одного аспекта, который очень важен со многих точек зрения, но не так очевиден на первый взгляд, является то ***влияние***, которое оказывают как теоретические исследования, так прикладные разработки в области ***ОС***-концепции, на формирование параллельного подхода к обработке информации и вычислениям, а в самом общем виде также на процесс формирования параллельного образа мышления. Интересен данный довольно важный аспект и с философски-гносеологической точки зрения. Наряду с отмеченными существует и целый ряд других весьма актуальных прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики в вычислительных науках. Однако ввиду их обилия и разноплановости в рамках данной монографии нам не представляется возможным даже краткое их рассмотрение. Между тем, заинтересованный читатель сможет ознакомиться с ними в приводимой ниже достаточно обширной библиографии и содержащихся в ней весьма многочисленных ссылках на соответствующие этой проблематике оригинальные работы [537].

8.4. Некоторые другие области приложений однородных структур различных типов

Возрастающее доминирование компьютеров привело к новому взгляду на мир. Данный взгляд позволяет рассматривать природу как одну из форм вычислений, т.е. мы можем обрабатывать объекты как очень простые компьютеры, каждый подчиняющийся своему собственному набору законов. ***Однородные структуры* (*ОС*)** существенно расширяют данную аналогию, обеспечивая методы исследования целых совокупностей *взаимодействующих элементарных* автоматов (*клеток*), каждая из которых является самостоятельным компьютером (*конечным автоматом*). Погружая в такой компьютер соответствующие правила, мы сможем моделировать множество видов весьма сложного поведения – от движения жидкостей, описываемого физическими уравнениями *Навье-Стокса*, до ландшафтной архитектуры. В настоящем разделе дается краткий обзор прикладных *аспектов* ***ТОС***-проблематики, не нашедших отражения в предыдущих разделах главы. При этом, здесь не будет делаться особого различия между *классическими*, *недетерминированными* и другими классами ***ОС***-моделей, а внимание будет акцентироваться исключительно на самих прикладных аспектах. Более того, вполне естественно, что обширность такой тематики не позволяет дать всю исчерпывающую картину, поэтому мы ограничимся лишь *наиболее* интересными, на наш взгляд, приложениями, отсылая более *требовательного* читателя к библиографии [536], содержащей как немало примеров приложений, так и ссылки на соответствующие оригинальные работы. Здесь же вполне уместно сделать и следующее замечание. Для большего удобства восприятия данного материала нами проведена некоторая его рубрикация, но воспринимать эту рубрикацию нужно с определенной степенью условности потому, что в настоящее время в *прикладных* аспектах ***ТОС***-проблематики все четче проявляется *междисциплинарный характер*, что очень серьезно осложняет попытки четкого дифференцирования приложений ***ОС***-концепции к той либо другой области. Так, ***ОС***-модели для решения задач распознавания образов успешно применяются и для работ, связанных с робототехникой, которая, в свою очередь, непосредственно примыкает к проблеме искусственного интеллекта и др. Это вполне естественно и находится в русле нынешних реалий современного научного прогресса, когда на лидирующие позиции выходят исследования не по отдельным направлениям, а по комплексным проблемам, требующим участия весьма больших коллективов специалистов из различных областей знаний. Именно такая *междисциплинарность* и обусловила то обстоятельство, что ряд нижеприведенных ***ОС***-приложений можно с одинаковым успехом относить к той либо другой рубрике. Надеемся, что данное обстоятельство не скажется отрицательно на представленном материале и не затенит всего многообразия ***ТОС***-приложений в различных областях современной человеческой активности.

<u>ОС-модели в физике</u>. Использование *дискретных* решетчатых систем имеет длинную и довольно продуктивную историю в физике. Примеры этому лежат в достаточно широком диапазоне – от точных *теоретических* моделей, рассматриваемых в статистической механике, до приближенных численных исследований непрерывных моделей. Между тем, при этом, уделялось относительно небольшое внимание точным решетчатым моделям, подчиняющимся ***обратимой динамике*** – из *любого* состояния динамической системы можно вывести ее предыдущее состояние. Данный вид ***микроскопической обратимости*** – важное свойство всей *микроскопической* физической *динамики*. Обратимые решетчатые системы становятся даже и более физически реалистическими, если мы дополнительно потребуем от них выполнения принципа *локальности* взаимодействия и строгих законов сохранения. И действительно, некоторая обратимая и сохраняющая импульс динамика решетки, в которой дискретный перелет частиц между соседними узлами решетки происходит в дискретные моменты, очень точно воспроизводит гидродинамику в *макроскопическом* пределе. Указанные решетчатые динамические системы эффективно погружаемы в ***ОС***-модели. Сегодня ***ОС***-модели различных типов достаточно эффективно используются и при решении различных проблем нелинейной физики, а также и в экспериментальных исследованиях в области физики высоких энергий [536].

Данные типы дискретных динамических систем не только обеспечивают весьма интригующий информационно-динамический подход к моделированию *макроскопической* физики, они могут также быть в высшей степени и практически полезными моделями. Точно те же самые свойства, которые обеспечивают моделям физическую реалистичность, делают их также и эффективно реализуемыми. Алгоритмы, которые включают ограничения типа локальности взаимодействия и обратимости, могут быть выполнены на *микроскопических* физических аппаратных средствах, которые одновременно удовлетворяют данным ограничениям. Данные аппаратные средства, в принципе, могут достигнуть более высокой интенсивности и скорости вычислений, чем любой другой тип традиционного компьютера. Таким образом, достаточно интересно создать модели дискретных решетчатых динамических систем, являющихся, по-возможности, несколько более физико-подобными как для того, чтобы отразить как можно более свойств богатой физической *динамики* в информационных моделях, так и чтобы повысить наши *возможности* по применению физики для вычислений. В данном отношении довольно перспективен ***ОС***-модельный подход, базирующийся на различных модификациях классических однородных структур.

Хорошо известно, что существенный недостаток традиционной квантовой теории – отсутствие в ней понятия «*траектории*». Теория дает только рецепт для вычисления амплитуды вероятности перехода частицы из одного состояния в другое; и кроме этого, волновая функция определяется локальными уравнениями, не являясь реальным физическим полем. Теория не рассматривает и процессов перехода в пространстве-времени, процедура измерения и редукции в явном виде не входит в аппарат теории, т.е. в модель частицы. В данной связи ***P.V. Kurakin*** и ***G.G. Malinetskyii*** [536] предложили ***ОС***-модель упрощенного мира, в котором существует искусственная частица с псевдо-квантовым поведением; под *псевдо-квантовым* поведением частицы понимается лишь ее способность быть как в локализованном, так и в нелокализованном состоянии. В данной модели присутствует *реальное* (*относительно предложенного искусственного мира*) физическое поле, которое соответствует частице; более того, *редукция* явно включена в ***ОС***-модель, представляющую собой новый класс однородных структур – клеточные автоматы *с псевдо-квантовой* эволюцией, которые демонстрируют эволюцию с требуемыми физическими свойствами.

Так, автоматы решетчатых газов (***L****attice* ***G****as* ***A****utomata* – ***LGA***) являются специальным классом ***ОС***-моделей, широко используемых, в частности, для симулирования движения вязкой жидкости и волновых уравнений. И в настоящее время исследования по ***LGA***-тематике представляют собой весьма хорошо разработанную область общего исследования ***ОС***-моделей. При этом, некоторые исследователи по ***ОС***-тематике полностью посвятили себя именно данному направлению, тогда как другие только слышали о нем. Квантовые ***ОС***-модели становятся все более и более важными для задач симулирования физических систем таких как квантовые решетчатые газы. И данному направлению посвящено немало достаточно интересных работ [536].

В настоящее время все интенсивнее ведется разработка *новых* математических методов и средств моделирования физических процессов в физике элементарных частиц, ядерной физике, а также и в физике конденсированных сред с использованием методов искусственных нейронных сетей и *однородных структур* (***ОС***) различных типов и классов, а также современных методов и средств анализа различных экспериментальных данных (*однородные структуры*, *генетические алгоритмы*, *нейронные сети*, *фракталы*, *нечеткая логика и т.д.*). В экспериментальных исследованиях в физике высоких энергий в ***ОИЯИ*** (*Дубна*) наряду с нейронными сетями довольно широко используются и ***ОС***-модели различных типов [536].

В последнее время достаточно большое развитие получило *клеточно-автоматное* моделирование потоков жидкости. Хорошо известен целый ряд двумерных моделей совместно с четырехмерной моделью, симулирующей *трехмерные* потоки. Так, ***Ю. Медведевым*** была предложена *трехмерная* ***ОС***-модель (*называемая* ***RD-I***), имеющая и существенно меньшую сложность, чем четырехмерная модель. ***RD-I*** моделирует потоки жидкости следующим образом. В клетках находятся некоторые гипотетические частицы. Их масса и скорость *единичны*, количество всевозможных направлений *вектора скорости* совпадает с числом *соседних* клеток, а правила движения выбираются так, чтобы выполнялись законы сохранения массы и импульса. Каждый такт работы ***RD-I*** разбит на **2** фазы:

столкновение и *сдвиг***.** На фазе *столкновения* происходит изменение *направления* движения частиц в соответствии с некоторыми законами столкновения. Но на фазе *сдвига* каждая частица должна перемещаться в соответствующую ее вектору скорости соседнюю клетку. Полученные при этом результаты экспериментальных исследований подтверждают**,** что определенная таким образом модель ***RD-I*** действительно вполне удовлетворительно моделирует потоки вязкой жидкости**.** В этой же связи следует отдельно отметить ряд достаточно интересных примеров симулирования гидродинамических течений с помощью ***ОС-***моделей [536].

В последние годы к ***ОС-***концепции существенно возрос интерес со стороны как теоретической, так и математической физики, да и физических наук в целом. Более того, у ряда исследователей сложилось даже мнение **(***на наш взгляд***,** *не отвечающее действительности***)**, что ***ОС-***проблематика, несмотря на всю широту и многогранность ее приложений, будет оставаться на уровне хорошей интеллектуальной игры **(***пусть даже очень сложной***)** до тех пор, пока для нее не найдут серьезных приложений в физическом моделировании**.** Предполагается, что ***ОС-***аппарат для физического моделирования может сыграть роль**,** до определенной степени аналогичную современной роли дифференциальных уравнений [54,150-152,274,378,386]. При этом, современный прогресс в этом направлении обусловливается следующими двумя основными факторами ***– технологическим*** и ***концептуальным.***

Технологический фактор обусловлен появлением вычислительной техники**,** которая базируется непосредственно на вычислительных ***ОС-***моделях **(***клеточные* ***ML-****сопроцессоры Легенди***,** *машины* ***САМ*** *Тоффоли и др***.)**. Тогда как *концептуальный* фактор состоит в возможности конструирования дискретных распределенных моделей, которые отражают наиболее фундаментальные аспекты физической закономерности, такие как *однородность***,** *локальность***,** а также *обратимость* основных физических процессов и законов на *микроскопическом* уровне [5,8,94-96,121,150,169,175,176,178,308, 354,361,366,371].

Существенный вклад в исследование проблемы ***обратимости*** динамики функционирования в классических ***ОС-***моделях внесли ***Э.Ф. Мур*** [274]**,** ***Дж. Майхилл*** [275]**,** ***А.Р. Смит*** [131]**,** ***С. Аморозо*** [270,293]**,** ***В.З. Аладьев*** [1,3,5,8,19,43,53-56,90]**,** ***Т. Тоффоли, Н. Марголус*** [150-152,187,268,273,318,376, 378] и целый ряд других исследователей [536]**,** что предопределило возможность использования ***ОС-***концепции в теоретической и математической физике**,** а также в других более прикладных разделах современной физики**.** На основе предварительного анализа, который основывается на современных физических *концепциях***,** с достаточной степенью уверенности мы можем полагать**,** что сама ***ОС-***концепция и вычислительные ***ОС-***модели могут представить достаточно полезное средство для описания и познания окружающего нас физического мира во всей его сложности и многообразии.

Несложно убедиться, ***ОС-***модели непосредственно обладают рядом основных черт физической модели мира ***– однородностью*** и ***локальностью.*** Тогда как их свойство ***обратимости*** в общем случае не имеет места априори **(***число обратимых* ***ОС-****моделей весьма мало; см. главу* **2)** и ее следует заранее запрограммировать в той либо другой ***ОС-***модели. Более того, в общем случае проблема определения *обратимости* динамики классических ***ОС-***моделей в общем случае алгоритмически неразрешима. С другой стороны, имеется возможность [152,268,274,318] заранее конструировать *обратимые* ***ОС-***модели**,** возможно, ценою потери ряда существенных их черт **–** универсальность, размерность и др., а также путем введения тех либо других предположений и допущений (глава **2).** Таким образом**,** можно использовать ***ОС-***модели, возможно, упрощенные в смысле отдельных их характеристик**,** но больше адекватные фундаментальным аспектам физических процессов и явлений в современном их понимании**.** На основе ряда обратимых ***ОС-***моделей был построен и исследован целый ряд интересных *физических* моделей диффузии**,** турбулентности, равновесия, гидродинамики, газодинамики, волновой оптики и др. [90,147,150,151,152,157,160,166,187,204,218, 273,318,376,378]. В настоящее время одними из наиболее распространенных физических моделей на основе ***ОС***-концепции являются модели ***Айзинга*** спиновых стекол [384,387], решетчатого газа [386,388] и диффузии [263], а также целый ряд других [360,418,536].

При моделировании процессов и феноменов из перечисленных разделов *физики* использовалось одно фундаментальное свойство ***ОС***-модели – несложное поведение большого числа *единичных* достаточно простых автоматов ***ОС***-модели определяет сколько угодно сложное поведение всей модели в целом (*история конечных* ***КФ*** *с течением времени*). Именно это свойство лежит в основе многих физических процессов и явлений. Например, молекулы газа, подчиняясь очень простым законам, порождают весьма сложное коллективное поведение, включая звуковые волны, вихри и турбулентность. Следует отметить, что перечисленные выше физические модели были успешно реализованы и исследовались на практически реализованных *вычислительных* ***ОС***-моделях [536].

Использование того либо иного *параллельного* подхода для решения численных задач динамики жидкостей и газов на основе ***ОС***-моделей из раньше сугубо теоретической области переходит в сферу практических реализаций, чему свидетельствует и появление специальной секции на ***7***-й Международной конференции по математическому и компьютерному моделированию [383], а также ряд последующих за ним крупных научных форумов. В данном же направлении большое внимание уделяется и вопросам нечислового моделирования динамики жидкостей и газов. Так, в частности, ***ОС***-подобные клеточные динамические системы используются для моделирования определенных типов хаоса в атмосферных потоках и аэродинамических трубах. *Вычислительные* ***ОС***-модели используются для исследования сложных задач гидродинамики, социологических и экономических задач, динамики молекулярных систем, задач полимеризации, вопросов роста и динамики *доменов*, экологических задач, химических реакционно-диффузионных систем, роста дендритов, проблемы разработки самовосстанавливаемых электронных цепей, задачи описания движения толпы и целый ряд других [166,355,536].

Элементная база современной вычислительной техники широко использует целый ряд блоков и схем, функционирование которых носит *необратимый* характер. В качестве подобных примеров могут служить элементы, реализующие логические операции ***AND***, ***OR***, ***EQV*** и другие, тогда как микроскопические *физические* процессы, лежащие в их основе (*насколько нам известно*), являются строго обратимыми. В этой связи возникает принципиальный вопрос существования некоторой формальной вычислительной модели, базирующейся только на ***обратимых*** вычислительных элементах. И такая ***ОС***-модель была предложена для описания физики идеального газа, которая существенно отражает физическую модель, составляющую основу современной кинетической теории газов [150-152,268,273,388,393,394,536]. Уже в рамках создания этой модели было показано:

♦ ***формальные ОС-модели могут симулировать определенные обратимые физические объекты, процессы, феномены и явления;***

♦ ***даже при условии необходимости микроскопической обратимости такие модели способны по сути отражать произвольно сложное поведение, а именно обладают свойством универсальной вычислимости.***

Таким образом, исследование вопроса о том, могут ли ***ОС***-модели симулировать не только лишь феноменологические аспекты нашего реального мира, но также и основные физические законы и процессы, и привело к созданию вычислительных физических ***ОС***-моделей, обеспечивающих одну из наиболее фундаментальных черт современной физики – *микроскопическую обратимость* процессов. Появление первых вычислительных ***ОС***-подобных *ЭВМ* и сопутствующего им цикла работ ***Т. Тоффоли, Н. Марголуса, Г. Вишняк*** и целого ряда других [150,2632,273,394] дало толчок к быстрому развитию новых перспективных подходов к физическому моделированию на основе ***ОС***-концепции. На наш взгляд, работа в таком направлении окажется весьма перспективной не только для вычислительной физики, но и для теории вычислений вообще. Весьма интересными представляются новые подходы к моделированию задач статистической механики, и механики жидкости и твердого тела, базирующиеся на ***ОС***-концепции, а также и целый ряд формальных ***ОС***-моделей в других разделах современной физики. Между тем, использование ***ОС***-моделей в физике предполагает их мотивированно-адекватные интерпретации, а не спекуляции разного рода. В частности, на основе свойства *необратимости* динамики, которое присуще большинству классических ***ОС***-моделей, некоторые авторы выдвигают предположения о многовариантности будущего и даже прошлого. И если в *первом* случае у нас не возникает особых эмоций, то *второй* не вполне поддается здравому осмыслению, если только не иметь ввиду обстоятельство, что для многих *динамических* систем их траектории могут определяться теми или иными воздействиями и в этом смысле текущая траектория есть обусловленный выбор из множества всех допустимых для данной системы траекторий. И в качестве иллюстрации для многовариантности прошлого приводится, в частности, ***ОС***-модель, для которой ***текущая*** конфигурация имеет множество ей предшествующих конфигураций ***(предшественников).*** В данном случае достаточно скептически воспринимается серьезность обоснования аппеляцией к ***ОС***-моделям, в целом, общеизвестных фактов [88,90,263,366,376,383,384,386,387,391-393,536].

Между тем, вышеуказанного типа ***ОС****-модели* используются не только для симулирования чисто физических процессов и явлений. Так, модели, базирующиеся на ***LGA***-конструкции, достаточно успешно используются и для симулирования целого ряда социальных явлений, в частности, для симулирования движения неорганизованной толпы, включая элементы ситуационного анализа участниками движения. ***ОС****-модели* оказываются достаточно интересными и при компьютерном моделировании психических процессов индивида и динамики общественных процессов, наряду с индивидуальной и групповой творческой, исследовательской и инновационной активностью.

ОС-модели и дифференциальные уравнения. Прежде всего, хорошо известно, что значительный раздел вычислительной математики составляют методы решения различного класса и типа как дифференциальных, так и разностных уравнений, которые описывают разнообразные *процессы* в той либо иной прикладной области. В частности, большой раздел составляют методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, которыми описываются весьма многие *процессы* в аэродинамике, гидродинамике, газодинамике, термодинамике, сейсмологии, физике твердого тела и плазмы и в целом ряде других приложений.

Итак, ***ОС***-модели являются дискретными динамическими системами, которые довольно часто рассматриваются в качестве аналогов дифференциальных уравнений в частных производных, которые позволяют описывать те либо другие непрерывные динамические системы. Более того, термин «*дискретные*» определяется тем, что и пространство, и время дискретны, а состояния для единичного автомата модели могут принимать лишь конечные значения. Основная идея в этом смысле состоит в том, чтобы не описывать *динамическую* систему сложными (*в большинстве своем не поддающимися аналитическому решению*) дифференциальными уравнениями, а моделировать эту систему множеством *локально взаимодействующих* единичных автоматов, функционирующих по простым правилам, т.е. перейти от *исследования* сложной системы со сложными уравнениями к исследованию феномена зарождения этой сложности в результате динамики соответствующей ***ОС***-модели, чьи единичные автоматы функционируют по достаточно простым правилам.

В частности, ***ОС***-модели весьма успешно используются для симулирования гидродинамических и газодинамических течений. Уравнения гидродинамики соответствуют математической *модели*, описывающей поведение решетчатого газа, одного из видов ***ОС***-моделей, на макроуровне. При этом, структуры, возникающие в таких моделях, похожи на возмущение поведения поверхности потока жидкости механическим препятствием. На основе ***ОС***-моделей очень успешно решались и задачи моделирования течений со свободной границей, распространения тепловых потоков и целый ряд других [536].

Одним из основных для численного решения данных уравнений является разностный метод, в случае решения краевых задач обычно называемый ***сеточным.*** Как правило, решение краевых задач сеточным методом производится на *ЭВМ*. Однако, учитывая последовательный принцип вычислений большинства современных *ЭВМ*, данный подход требует значительных временных затрат. Поэтому, для решения данного типа задач пытаются использовать супер-*ЭВМ* либо *ЭВМ* специальной архитектуры [96]. Между тем, идея сеточного метода наилучшим образом отвечает концепции вычислительных ***ОС***-моделей, в которых *глобальное поведение* объекта, описываемого дифференциальными уравнениями, полностью определяется локальными взаимодействиями единичных автоматов. Поэтому использование ***ОС***-моделей позволяет применять новые методы решения уравнений в частных производных, разностных, а также интегро-дифференциальных уравнений. Например, такие подходы интенсивно используются для решения уравнений *Навье-Стокса*, хотя этим типом уравнений дело, естественно, не ограничивается. В *определенном* смысле можно говорить об ***ОС***, как о модельном аналоге дифференциальных уравнений. Имеется ряд достаточно интересных работ, посвященных *сравнительному анализу* результатов как численного моделирования уравнений физических процессов (*теплообмена*, *теплопроводности*, *деформации и разрушения хрупких материалов и сред со сложной структурой*, *гидродинамики*, *кинетики и др.*), так и весьма эффективным методам на основе ***ОС***-моделирования этих физических процессов [536].

Весьма интересно применение ***ОС***-моделей в металлургии не в прямом виде, а в совокупности с методом конечных элементов. В этом направлении можно отметить интересную систему ***CAFE*** (***C****ellular* ***A****utomata* – ***F****inite* ***E****lement*), основанную на комбинированном использовании метода ***ОС*** и конечных элементов. ***CAFE***-подход основан на модели стохастического образования зародышей новой фазы в расплаве и их роста. Расчеты на основе ***CAFE***-подхода производятся методами ***ОС***, тогда как по модели теплопереноса – *методом конечных элементов* (***МКЭ***). При этом, в целом ряде задач исследования структурообразования при моделировании литейных процессов возникает целесообразность совместного использования ***МКЭ*** и ***ОС*** [536].

Общий принцип, лежащий в основе таких подходов, состоит в построении вычислительной ***ОС***-модели, чья динамика отражает поведение решения искомого дифференциального уравнения. Показано [263], что подобные подходы являются весьма перспективными для решения краевых задач со сложной геометрией границ или с граничными условиями, зависящими и от времени, т.к. используемый в ***ОС***-модели локальный принцип взаимодействия является достаточно легко настраиваемым на указанные *граничные условия*. В этой же связи для качественного исследования дифференциальных уравнений весьма перспективными представляются и упоминаемые выше специальные ***САМ***-машины [150-152,165], допускающие их достаточно эффективную эмуляцию. В рамках данного подхода были построены простые модели классических дифференциальных уравнений физики, таких как уравнение теплопроводности, волновое уравнение [378], а также и уравнение *Навье-Стокса* [88,379], рассматриваемые как предельные случаи чрезвычайно простых процессов комбинаторной динамики. Например, ***ОС***-модели позволяют создавать очень точные модели динамики жидкостей, которые конкурентноспособны даже в вычислительных аспектах с традиционными методами. При этом, более прямой подход к использованию вычислительных ***ОС***-моделей для решения краевых задач и разностных уравнений базируется на *прямом* аналоге разностных операторов и локальных функций перехода структуры [1,3,5]. Именно такой подход очень тесно связан с довольно продуктивной *идеей* ***Э. Бэнкса*** относительно использования *общей* ***ОС***-концепции для моделирования непрерывных физических пространств [132].

Между тем, достаточно непросто проводить удовлетворительный количественный анализ с ***ОС***-моделями, не теряя простоты и наглядности правила функционирования единичного автомата модели (*которое представляется важным преимуществом данного метода*). При этом, установление таких *правил* является часто достаточно интуитивным, а иногда и довольно трудным. Но всякий раз мы должны иметь в виду то, что хотя количество дифференциальных уравнений *бесконечно*, множество уравнений, которые мы сможем написать, перечислимо, а множество тех уравнений, которые мы можем точно решить, весьма мало. Именно поэтому ***ОС***-модели могут сыграть здесь достаточно немаловажную роль. Между тем, в ряде работ дебатируются вопросы приемлемости и эффективности моделирования дифференциальных уравнений этого типа структурами [536]. На наш взгляд, как и в любом другом вопросе здесь нам следует опираться только на результаты последующей проверки на соответствие полученной модели и отражаемого ею явления, объекта или процесса, описываемого дифференциальным уравнением либо их системой.

Классические ***ОС***-модели, по определению, являются дискретными динамическими системами и часто оказываются весьма полезными моделями, в которых изменение состояния единичного автомата может иметь место в любой произвольный момент *времени* на непрерывной временной оси. По данной причине пуассоновские процессы являются одним из наиболее ярких примеров применимости данных ***ОС***-моделей. В пуассоновской ***ОС***-модели изменение состояния каждого единичного автомата управляется независимым пуассоновским процессом. В монографии [150] приводится достаточно простая методика компьютерной эмуляции пуассоновской ***ОС***-модели с помощью классическими ***2-ОС*** с произвольной степенью достоверности. Такая методика может быть использована для организации в ***ОС***-моделях *асинхронных детерминированных* вычислений.

<u>ОС-модели, искусственный интеллект, робототехника, распознавание образов и ряд смежных направлений</u>. Высокая степень параллелизма обработки информации совместно с рядом других фундаментальных свойств, обеспечиваемых ***ОС***-моделями, создают достаточно перспективные предпосылки для применения их в различного рода адаптивных системах. Например, *нейронно-сетевые* системы, описываемые одной из ***ОС****-моделей, вполне могут стать отправной точкой для создания развитых адаптивных роботов [381]. Последующее развитие робототехники приводит к постановке задач, решение которых связано с достаточно существенными математическими и техническими трудностями. Например, в качестве конкретного примера можно привести *задачу* оперативного управления адаптивными автономными транспортными роботами в *динамически изменяющейся* внешней среде. Для решения данной задачи предложен один интересный способ адаптивного управления, основанный на использовании однородных управляющих структур, являющихся достаточно типичной вычислительной ***ОС****-моделью[88,381]. И хотя для описания иерархических систем наиболее естественным представляется использование нейроноподобных моделей, вместе с тем, для формализованного описания целого ряда *отдельных* процессов можно достаточно эффективно использовать методы *нелинейной* динамики, включая подходы на основе ***ОС***-моделирования [536].

Проблема изучения интеллектуальных алгоритмов в настоящее время базируется на активных семантических сетях. Показано [3,5,54], что целям моделирования таких сетей хорошо отвечают структуры из ***ОС****-класса, которые допускают относительно несложную реализацию средствами современной микроэлектроники и могут быть с успехом использованы для организации поиска и обработки информации в *реальное* время при создании *управляющих* блоков интеллектуальных роботов. Вычислительные ***ОС****-модели позволяют организовывать и эффективное управление в распределенных непрерывных объектах. Эта задача чрезвычайно актуальна при *проектировании* и разработке *гибких* автоматизированных производств, ряда других производственных объектов, работающих в условиях безлюдной технологии [54-56,88,302,360,364,368]. Исследуются вопросы и анализа сложных структур на основе системы мониторинга данных в свете задачи дальнейшего использования методов ***ОС***-моделирования для прогнозирования жизнестойкости конструкций, выявления скрытых тенденций, построения стратегий развития и поиска новых решений. Уже имеются весьма интересные практические примеры стохастических ***ОС***-моделей разнообразных технологических процессов [536].

Практическая необходимость оптимального (*или близкого к нему*) решения целого ряда задач ***NP***-сложности, возникающих при проектировании и исследовании сложных систем, вынудила ряд системотехников обратить свое внимание и на нетрадиционные методы поиска оптимальных решений. В данном контексте для получения эффективных алгоритмов все шире используются подходы на основе генетических алгоритмов, эволюционного программирования, нейросетевые вычисления, на основе ***ОС***-концепции и др. [536].

Весьма перспективным представляется использование ***ОС***-моделей для распознавания образов и решения связанных с этим задач. В первую очередь стоит вопрос получения решений подобных задач в *реальное* время, быстрой обработке сигналов и образов. В этом направлении разработаны и исследованы структурные ***ОС***-модели предварительной обработки изображений и выделения информативных признаков. На базе данных моделей в Белоруссии разработан эскизный проект клеточного сопроцессора *обработки изображений*. В качестве примеров прикладного применения полученных результатов предложен целый ряд *структурно-алгоритмических* моделей обработки полутоновых изобраражений снимков земной поверхности. Как известно, *динамика* ***ОС***-моделей обладает инвариантными конфигурациями (*аналогичными в математике фиксированным точкам*), а результаты их исследования имеют самое *прямое* отношение к использованию ***ОС***-моделей для распознавания образов, а также симулирования однородно-ассоциативной памяти, требующей обеспечения отображений специфических S_k-конфигураций в другие Θ_k-конфигурации. И на базе ***ОС***-подобной модели предложена довольно интересная высокопараллельная архитектура нейронной *ЭВМ* для решения задач как накопления и хранения знаний, обработки образов, так и приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных [237]. Более того, используется ***ОС***-концепция, например, для создания информационных систем обработки и интерпретации аэрокосмических *изображений* в эколого-гидрологических исследованиях. Так, была показана возможность определения геометрических характеристик *изображений* на основе специализированных ***ОС***-моделей [536].

В настоящее время имеется ряд предпосылок для понимания и использования вычислительных возможностей нейроноподобных сетей, которые имитируют архитектуру нейронных ансамблей в мозговых тканях. Так как мозг обрабатывает информацию максимально *параллельным* образом и с весьма высокой степенью надежности, то понимание того, как использовать его архитектуру, представляет огромный интерес и для разработчиков надежных и эффективных параллельных процессоров и нейронных компьютеров [159,333,354,364,368,369,374]. На пути исследования этих нейроноподобных моделей используется ряд подходов, начиная с формального моделирования и заканчивая построением конкретных реализаций на основе сетей современных параллельных процессоров. В данном контексте значительный интерес представляют однородные структуры, определенные типы которых допускают моделирование весьма сложных самоорганизующихся динамических систем, ряда феноменов теории хаоса, самоорганизующихся нейроноподобных систем, а также целого ряда других интересных кооперативных феноменов и процессов [9,54-56, 90,149,153,201,333,354,371,374,382,383,407]. В частности, из наших результатов следует, что подход на базе ***ОС***-моделей может быть весьма полезен для симулирования и исследования целого ряда интересных феноменов и явлений в теории антихаоса, а также целого ряда других хаотических явлений и процессов [88,90,536].

Важным свойством целого ряда ***ОС***-моделей является их способность в той либо другой мере к самоорганизации, что позволяет использовать их в качестве вполне удовлетворительной среды моделирования *развивающихся* систем, например, в теоретической физике и биологии развития. В данном случае потребуются эффективные методы анализа статистических свойств локальных функций перехода в ***ОС***-моделях. Одним из подобных методов является локальная структурная теория [153], которая, в частности, представляет один из методов вычисления *инвариантных* мер определенного класса дискретных динамических хаотических систем, исследования по которым в настоящее время расширяются [536].

Имеются интересные попытки использования ***ОС***-моделей для изучения рефлексивных систем [3]; в данном случае предлагается реализовывать ***ОС***-модели на односторонних математических поверхностях, в частности, листе *Мебиуса* либо бутылке *Клейна*. Предполагается также, что такие подходы могут оказаться весьма интересными для описания некоторых моделей гипотетических Вселенных. И хотя в этом случае мы имеем дело с конечными структурами, идея использования ***ОС***-концепции для построения математической теории конфликтов заслуживает пристального внимания [3,5,55,90]. Достаточно интересными в данной связи представляются исследования на основе ***ОС***-концепции и задач распределенного интеллекта [189,536].

ОС-модели в криптография. Криптология – наука о безопасности связи. Она достаточно четко подразделяется на две части – криптографию (*науку о шифрах*) и криптоанализ (*науку о вскрытии шифров*). Криптографы стремятся найти наиболее надежные методы обеспечения секретности и подлинности сообщений, а криптоаналитики пытаются выполнить обратную задачу, отыскивая слабости в шифрах либо подделывая сообщения так, чтобы они были приняты за достоверные. Совершенно новая идея, выдвинутая ***П. Гувмом***, сводится к использованию в криптосистемах с открытыми ключами *порождающих* возможностей ***ОС***-моделей [536]. При этом, следует отметить, что в свое время напоминание о перспективных возможностях ***ОС***-моделей при решения задач сжатия информации и криптографии было дано нами еще в монографиях [1,3,9]. Несмотря на отсутствие тщательного тестирования и возможности наличия криптографически узких мест, это направление представляет вполне определенный интерес и в настоящее время развивается достаточно интенсивно. Одним из важных свойств ***ОС***-модели является то, что даже в случае ее обратимости в общем случае невозможно вычислять предшественников для произвольных ***КФ***, инвертировав правило порождения потомков. Большой практический интерес представляют и исследования по созданию криптосистем на основе ряда трехмерных ***ОС***-моделей на *разбиении*, предложенных ***Т. Тоффоли*** и ***Н. Марголус***. Данные модели характеризуются достаточно важным свойством *обратимости* динамики, которое программируется достаточно просто и естественно.

Теория *кодирования* является сугубо прикладной наукой и ее практические достижения хорошо известны. Однако, наиболее широкое распространение получили только самые примитивные способы кодирования: проверка на четность, коды Хемминга, циклические проверки и др. Это имеет место как из-за сложности используемого математического аппарата, так и по причинам недостаточной разработки вопросов взаимосвязи *кодирования* и *модуляции*. Заданная надежность кодирования достигается за счет избыточности информации [380]. Однако проблема состоит не в том, чтобы просто повышать надежность за счет использования все большей избыточности, а в том, как с помощью, по возможности, меньшей, специальным образом вводимой избыточности, достичь *нужного* уровня надежности. Именно а этом контексте для кодирования/декодирования информации и был нами предложен подход на основе ***ОС***-концепции [1,3,53-56]. В основу этого подхода положена возможность генерации посредством полигенных ***ОС***-моделей произвольной наперед заданной конечной ***КФ*** из некоторой начальной $\boldsymbol{КФ_o}$. В таком случае кодер и декодер, находящиеся на пути передачи информации от источника к приемнику, выполняются на *основе* некоторой полигенной ***ОС***-модели и позволяют вести кодирование/декодирование совершенно *параллельным* образом с большой скоростью. Предложенный нами подход представляется весьма естественным и перспективным, ибо именно он (*по нашим сегодняшним представлениям*) лежит в основе кодирования генетической информации. Данный подход позволяет весьма существенно сокращать объем избыточной информации, заменяя передачу самой информации *порождающим* ее алгоритмом [3-5]. В принципе, вышеуказанный подход может быть использован и для сжатия информации (*в первую очередь картинного типа*), хранящейся во внешней памяти ЭВМ. Наконец, данный подход используется и в различного рода задачах криптования информации. Имеется немало примеров довольно интересных алгоритмов шифрования и кодирования информации, организации протоколов аутентификации с использованием ряда свойств ***ОС***-моделей. Наряду с этим, предприняты довольно интересные попытки создания принципов защиты информации на базе параллельных процессов, отвечающих формальным ***ОС***-моделям [53-56,88,166,219,536].

<u>ОС-модели и физико-химические процессы</u>. В рамках уже даже классических ***ОС***-моделей могут быть исследованы некоторые интересные свойства роста и морфогенеза разных *кристаллических* структур. Простейшие структуры, наблюдаемые в кристаллах, являются явно периодическими и с помощью соответствующих ***ОС***-моделей свойства подобных кристаллических образований и можно исследовать в точных математических формулировках [1,3,5,55,85,211,225,332]. Например, был продемонстриророван целый ряд интересных ***ОС***-моделей, симулирующих определенные типы химических реакций, неорганический раствор которых отражает некую *биоритмоподобную* периодичность. В данных ***ОС***-моделях локальная функция перехода специфицирует изменения *локальных* концентраций химических компонентов по времени как функцию от реакции между локальными компонентами и диффузией между *ближайшими* окрестностями вещества, которые подвергаются химической реакции [5,166,263,332,333,536]. Достаточно важный класс ***ОС***-моделей представляют собой так называемые *возбудимые среды* и *ткани*, исследования которых проводятся по многим направлениям в биологии, медицине, химии и целом ряде других естественных наук [2,54,134,147,160,166,167,172,198,203,205,214,346,536,567].

На основе стохастических ***ОС***-моделей проводятся исследования физико-химических процессов, протекающих на поверхности твердого тела. Такой подход позволяет рассматривать всю данную совокупность элементарных процессов таких, как адсорбция и десорбция, а также большинство химических стадий, фазовые переходы, поверхностная диффузия и т.д., с единой точки зрения в *методологическом* отношении, что дает возможность исследовать кооперативное поведение всех частиц (*атомов, молекул, ионов и т.п.*), входящих в сложную химическую систему. В этих моделях реализация элементарных физико-химических процессов, приводящих к переходам частицы из одних состояний в другие, происходит согласно вероятностям ***ЛФП*** $\sigma^{(n)}$. Значения вероятностей могут определяться на базе рассмотрения *термодинамических* аспектов элементарных процессов с применением и статистических методов анализа. Программная реализация подобных моделей позволяет производить эффективный анализ элементарных физико-химических процессов.

В частности, некоторыми исследователями (***Варфоломеева В.В., Коныгин С.Б., Саноян А.Г.*** *и др.*) предложен подход на основе *вероятностной* ***ОС***-модели для симулирования физико-химических процессов, протекающих на поверхности твердого тела. Изменение структуры и перестройки на поверхности катализатора во время *прохождения* реакции происходит под влиянием целого ряда протекающих элементарных физико-химических процессов в *поверхностном* слое. В *гетерогенном* катализе такие поверхностные процессы играют достаточно существенную роль. Показано, что на основе данного ***ОС***-подхода можно рассматривать всю совокупность *элементарных* процессов, таких как адсорбция и десорбция, большинство химических стадий, фазовые переходы, а также поверхностная диффузия и др. с единой методологической точки зрения, что позволяет изучать кооперативное поведение всех частиц (*атомов, молекул, ионов и т.п.*), которые входят в сложную химическую систему. Разработанная на основе вероятностной ***ОС***-модели методика и позволяет получать необходимые сведения об изменениях в пористой структуре катализатора в наглядной форме, очень удобной для дальнейшего применения. При этом, такая методика моделирования хорошо приспособлена к многокомпонентным катализаторам, которые, как правило, являются многофазными системами. Для программной реализации данной методики создана программа, обеспечивающая ***ОС***-моделирование элементарных физико-химических процессов [536].

Пространственно распределенные динамические системы охватывают довольно широкий круг приложений (*например, сложные химические, технологические, геохимические и социальные процессы, популяции животных и насекомых и т.п.*). Для задач исследования и моделирования сложнейшей динамики такого типа нелинейных динамических систем некоторыми авторами и предлагается использовать стохастические ***ОС***-модели (*клеточные автоматы*). Интересный обзор применения стохастических ***ОС***-моделей как аппарата исследования и моделирования вышеуказанного типа нелинейных динамических систем представлен в статье [422] с акцентом на описании и анализе возможностей различных классов стохастических ***ОС***-моделей, таких как ***LGCA*** (*реакционный **КА** типа решетчатого газа*) и ***DSMC*** (*прямое симулирование методом Монте-Карло*). В этой работе было проиллюстрировано использование этого аппарата для решению таких задач, как: образование структуры Тьюринга, описание химических систем в микроэмульсиях, влияние флуктуаций на динамические режимы нелинейных систем, бифуркационное изменение *динамического* режима сложных систем в условиях ограниченной подвижности, а также при низкой пространственной размерности, влияние гидродинамических мод на поведение химических нелинейных систем (*эффекты перемешивания*). Наряду со стохастическими ***ОС*** представлен и целый ряд интересных примеров применения классических ***ОС:*** моделирование реакции на нерегулярных решетках, имеющих фрактальную размерность, задачи типа «*реакция–диффузия*», и некоторые др. В статье [422] представлена сводная таблица применимости различных типов ***ОС***-моделей для решения того или иного класса задач. В модифицированном виде ее представляет следующая таблица.

Таблица 7

Тип ОС-модели	*Решаемые средствами моделирования задачи*
Классические	*самовоспроизведение* организмов, коллективное поведение реальных живых организмов, кристаллообразование, кластерообразование, переходы типа «*свободное движение–затор*» в городе, эффект перемешивания в реакциях *Белоусова-Жаботинского* и *Бриггса-Раушера*, волновые процессы в средах из осциллирующих ячеек. Между тем, следует иметь в виду, что имитация некторого случайного каталитического процесса на *ЭВМ* в рамках метода вероятностных ***ОС***-моделей состоит в непосредственном моделировании. Однако данный подход не позволяет определять области существования качественно различных состояний систем как химико-технологических, так и каталитических
LGA	гидродинамика
LGCA	реакционно-диффузионные уравнения с учетом флуктуаций (*химические волны*, *структуры Тьюринга*, *хаос*, *зародышеобразование и др.*)
DSMC	газодинамика, *управляющее* уравнение в общем виде, химические реакции с учетом флуктуаций
ВКА	реакционно-диффузионные уравнения с учетом как флуктуаций, так и турбулентного перемешивания, протекающих как в гомогенной среде, так и в структурированной среде
где: ***LGA*** – Lattice Gas Automata, ***LGCA*** – Lattice Gas Cellular Automata, ***DSMC*** – Direct Simulation *Monte-Carlo*, ***ВКА*** – стохастический клеточный автомат с использованием процедуры *Монте-Карло*	

При этом следует иметь в виду, что представленная табл. ***7*** не обеспечивает всю полноту охвата задач, решаемых указанными типами ***ОС***-моделей и, прежде всего, классическими ***ОС***. Однако, даже из нее видна обширность областей использования аппарата ***ОС***-моделей для исследования сложных пространственно распределенных *динамических* систем. При этом, по нашему мнению, вполне справедливо отмечено обстоятельство, что математики предпочитают развивать теорию классических ***ОС***-моделей (*как параллельной системы обработки слов в конечных алфавитах*, *которая аналогична машине Тьюринга для последовательной обработки*), тогда как физики и некоторые *другие* естественники больше имеют дело с моделями типов ***LGA***, ***LGCA***, ***DSMC***, ***ВКА*** и др., ибо данные модели позволяют на микро- и мезоскопическом уровнях описывать тонкие детали поведения в реальных системах, в частности, влияние внутренних флуктуаций на поведение динамических систем. Между тем, наряду с классическими математики достаточно активно исследуют и такие важные классы ***ОС***-моделей, как полигенные, недетерминированные и стохастические. Однако, к сожалению, в целом превосходная статья [422] содержит не совсем корректный краткий *экскурс* в историю как конечных, так и клеточных автоматов. Обширная библиография в значительной степени дополняет представленный в работе материал. Несколько с другой точки зрения были рассмотрены некоторые вопросы исследования динамических систем посредством ***ОС***-аппарата и в работе [421]. Правда, круг рассматриваемых вопросов достаточно ограничен и не может дать представления о всей обширности этой проблематики в целом. В работе [576] рассматриваются простейшие ***ОС*** для некоторой *базовой* модели математической физики – уравнения диффузии; обсуждается также и класс проблем, при исследовании которых применение ***ОС***-моделей имеет целый ряд существенных преимуществ.

Книга [566] является первой, обобщающей и суммирующей итоги моделирования химических систем на основе ***ОС***-концепции. Книга является практическим введением в ***ОС***-проблематику с акцентом на ее прикладных аспектах, представляя собой одновременно оригинальный учебник и практическое руководство по применению ***ОС***-моделей в химии. Даются детальные описания с примерами и упражнениями того, как ***ОС-модели*** могут быть использованы при исследованиях очень широкого разнообразия химических, физических и биохимических явлений и процессов. Охваченные рассмотрением темы включают кинетические феномены *первого* и *второго* порядка, ферментативную кинетику, равновесие между паром и жидкостью, и целый ряд др. Материал книги не сводится только к тексту, а снабжен и ***CD***, содержащим программные реализации всех рассмотренных ***ОС***-моделей, позволяя их непосредственно использовать в экспериментальном освоении материала. В книге представлены *компактные* описания очень большого разнообразия физических и химических явлений и процессов, которые и иллюстрируются компьютерными ***ОС***-моделями. В целях популяризации практической направленности ***ОС***-концепции эта книга, по нашему мнению, сыграет существенную роль как для начальных курсов по химии, биологии, физике, прикладной математике и биоинформатике, так и в качестве хорошего *дополнительного* материала для лабораторных курсов по общей химии, органической химии, физической химии, лекарственной химии, химическому машиностроению и другим курсам, которые имеют дело со статистическими и динамическими системами. Это позволяет изучать очень широкий диапазон динамических явлений, многие из которых, как правило, недоступны в лабораторных условиях из-за ограничений по времени, стоимости и экспериментального оборудования. Одновременно книга представляет собой вполне приличный учебник и по прикладным аспектам ***ОС***-моделей. Рекомендации и модели данной книги играют роль *дидактического* руководства по организации подобных ***ОС***-ориентированных курсов для целого ряда университетских циклов.

Имеются также интересные примеры компьютерного симулирования термической обработки металлических изделий токами высокой частоты на основе методов классических ***ОС***-моделей с применением метода гибридных ***ОС***-моделей для исследования влияния газовой атмосферы на процессы разрушения. Интересны результаты по симулированию нестационарных хаотических процессов в магнитосфере на основе специализированных ***ОС***-моделей.

<u>ОС-модели в био-медицине</u>. Сегодня ***ОС***-модели находят все более широкое применение в био-медицине в самом широком смысле этого понятия в качестве весьма привлекательного средства *симулирования* различных процессов, явлений и объектов живой природы. Прежде всего, одним из важных приложений ***ОС***-концепции является моделирование взаимодействующих *клеточных* систем в биологии и медицине. Примеры разнообразных взаимодействующих *клеточных* систем мы можем в изобилии обнаружить в таких направлениях, как жизненные циклы бактерий либо социальных амеб, эмбриональное формирование тканей, заживление ран или роста опухолей и метастазов. Математические модели пространственно-временного формирования структур этих явлений и процессов, возможно, могут помочь в понимании принципов *кооперативного* эффекта *межклеточного* взаимодействия в такого рода системах, которое нельзя объяснить лишь на *уровне* отдельной клетки. Для исследования межклеточных взаимодействий ***A. Deutsch*** и другими были определены и исследованы достаточно интересные типы стохастических клеточных автоматов в качестве микроскопических моделей клеточного взаимодействия [536]. Упомянутые феномены, исходя из сложных клеточных взаимодействий, не могут быть получены исключительно только из экспериментального анализа, однако могут быть существенно легче исследованы, используя математические модели, в частности, на основе ***ОС***-подхода. При этом, такие ***ОС***-модели могут быть распространены и на ряд других весьма интересных приложений в биологии, медицине и иммунологии.

Весьма перспективным представляется использование ***ОС***-моделей также и в нейрофизиологии. Нейрофизиологи уже давно задумывались над возможными квантовыми механизмами, которые связаны с работой мозга. В *пионерской* работе ***С. Хамерофа*** идет речь о своего рода вычислениях, происходящих в так называемых микротрубочках цитоскелета. Микротрубочки – важная часть скелета клетки. Это полые цилиндрические трубочки, состоящие из субъединиц – ***тубулинов***, представляющих собой молекулы-димеры, которые могут существовать по крайней мере в двух пространственных *конфигурациях*. Для «*переключения*» из одной конфигурации в другую вполне достаточно, чтобы *единственный* электрон переместился с места на место. При этом, поверхность микротрубочки составлена из тубулинов, которые располагаются в узлах правильной решетки. Конфигурация любого тубулина зависит от конфигурации его прямых соседей. Таким образом, формируется образ естественной ***ОС***-модели, функционирование которой влияет на передачу сигналов между нейронами мозга и применение которой может составить весьма эффективный аппарат исследований в экспериментально-теоретической нейрофизиологии [536].

Весьма интересным представляется проект по созданию информационно-программной среды для получения новых фундаментальных знаний в биологии живой клетки, разрабатываемый в институте математических проблем *биологии РАН*. Предполагается, что его реализация поможет формированию новых представлений о *клетке*, как открытой самосогласованной динамической системе. Такая информационно-программная среда должна будет базироваться на современных информационных технологиях наряду с применением уже имеющегося опыта математического моделирования сложных динамических систем, включая методику на основе ***ОС***-концепции. А важность ***ОС***-концепции для био-медицинских наук, в частности, отражает и тот немаловажный факт, что Президиумом научно-методического совета по биологии Министерства образования РФ в программу такой дисциплины как «*Концепции современного естествознания*» была включена отдельным разделом и тематика, посвященная ***ОС***-моделям.

<u>ОС-модели и нанотехнологии</u>. Современные технологии производства наноустройств еще очень далеки от практической реализации самовоспроизводства в том виде, как его описал ***Джон фон Нейман***, однако идея синтеза вычислительной среды в виде двухмерного массива элементарных транзисторных ячеек начинает сегодня четливо прослеживаться в экспериментальных работах, ведущихся в некоторых крупных исследовательских центрах (*IBM*, *Bell Lab и др.*). Успеху данного направления во многом способствует также и стремление нанокластеров некоторых химических элементов к *самоорганизации* с образованием регулярных структур. Специалисты *Communications Research Laboratory* (*Япония*), проводящие исследования в данном направлении, прямо заявляют, целью их разработок является создание ***ОС***-модели – большой матрицы из простых идентичных компонентов нанометрового масштаба, или ***клеток***. Данные клетки могут сообщаться на основе сигналов, передаваемых по цепочкам от клетки к клетке. Изготовить эту конструкцию в Японии надеются путем химического синтеза. На завершение всей работы с использованием отдельных *молекул* в качестве рабочего элемента японские исследователи отпускают себе двадцать лет. При этом, намечаются подобные работы и в ряде других стран [536].

На основе ***ОС***-концепции предлагаются подходы и к исследованию задач *нанотехнологии*. В этом направлении перспективными представляются дискретные системы, среди которых одними из наиболее эффективных для симулирования объектов наномира на языке *дискретных* сред могут оказаться ***ОС***-модели [536]. При этом, перед нанотехнологией стоит несколько задач, связанных со сборкой методом «*снизу вверх*», а именно: задачи создания алгоритмов самовоспроизведения, алгоритмов сборки необходимых конструкций из однородной среды, задачи по формированию поверхности требуемых конфигураций, задачи по тестированию и восстановлению целостности наноконструкций и др. Подобные задачи можно вполне успешно решать в рамках ***ОС***-подхода. Весьма перспективным представляется использование и компьютерных моделей, базирующихся на моделях ***2-ОС*** (*в частности*, *типа* ***У. Ооно – М. Кохомото***), для исследования перспективных наноматериалов.

На протяжении последних почти двадцати лет ведутся довольно активные работы по созданию механизмов, способных к *самовоспроизводству*. Одним из наиболее перспективных направлений создания физических самовоспроизводящихся автоматов представляет область нанотехнологии: микроскопические самовоспроизводящиеся системы, способные к производству макрообъемов из организованного вещества – направление, которое может оказать радикальное воздействие на организацию промышленности в будущем, и в котором одну из ведущих ролей смогут сыграть именно ***ОС***-модели, в которых процессы самовоспроизведения исследуются уже весьма давно и где получено немало интересных результатов различного характера, немалая часть которых уже пригодна к практической реализации.

Моделирование самосборки наноконструкций методом «*снизу вверх*» на самом высоком уровне базируется на следующем важном предположении: существует множество дискретных агентов, между которыми происходят локальные взаимодействия, определяющие *глобальную* структуру. Исходя из данного предположения, вполне естественно обратиться при таком симулировании нанообъектов к потенциалу ***ОС***-моделей. Непосредственно к *задачам* нанотехнологии относятся исследования по симулированию *сложного* поведения посредством ***ОС***-моделей, симулированию отдельных аспектов эволюции и посредством систем взаимодействующих дискретных агентов в моделях теории искусственной жизни, симулированию биологических систем ***ОС***-моделями, в частности, симулированию аспектов самовоспроизведения, дифференциации и регенерации.

ОС-модели, синергетика, хаос и теория катастроф. В течение ряда последних десятилетий во многих естественнонаучных областях произошел существенный *качественный* скачок – осознана стохастичность многих сложных процессов и начато исследование больших нелинейных систем. Теории катастроф, хаоса, сложности и синергетика являются разными языками, описывающими поведение нелинейных динамических систем, включая их свойства достаточно резким скачком переходить в *другое* состояние, и используют понятия критических переходов, самоорганизации, иерархичности, фрактальности и т.д. Например, геофизика и метеорология, обладая длинными рядами наблюдательных данных, не только довольно существенно влияли на развитие данной точки зрения [536], но также активно разрабатывали и применяли на практике научные идеи и принципы прогноза катастроф, определения риска и возможных ущербов, стратегий принятия решений. В общем случае ***ОС***-модели проявляют ярко выраженное хаотическое поведение, что обусловливает интерес к ним со стороны теории катастроф. При этом, если проблема сводится к *качественному* пониманию сложной пространственно-временной динамики больших *нелинейных* систем, то во многих случаях предпочтительнее иметь дело не с *непрерывной* средой, а именно с ***ОС***-подобными моделями. Последовательности конечных конфигураций, генерируемые этими ***ОС***-моделями различных типов и классов, аналогичны траекториям динамических систем и их исследование представляет такой же первостепенный интерес с точки зрения исследования для данного типа систем определяющих поведенческих характеристик (*периодичность*, *обратимость*, *самовоспроизведение*, *формообразование*, *самоорганизация*, *неконструируемость*, *хаос и т.д.*) [88,90,536].

С ***80-90 г.г.*** прошлого века довольно существенно возрастает активность исследований в области *динамического* хаоса и проблемы сложности. С появлением новых поколений мощных *ЭВМ* и *ПК* развиваются фрактальная геометрия и геометрия, описывающая структуры *динамического* хаоса и позволяющая эффективно сжимать информацию при распознавании и хранении образов. В то же время моделируется поведение однородных структур различных классов и типов, а также нейрокомпьютеров, описывающих активные среды и социальные явления, процессы обучения, распознавание образов и проблемы искусственного интеллекта и медицины, генерации ценной информации и управление хаосом. ***ОС***-модели все активнее ассоциируются с синергетической проблематикой в ее самом широком понимании [536].

Синергетика – достаточно новое *междисциплинарное* научное направление, которое использует нетрадиционные методы для выявления *общих* закономерностей самоорганизации, становления структур, которые образуются в сложных системах в процессе *перманентного* потокового обмена веществом, энергией и информацией с окружающей средой в *неравновесных* условиях. Объектом исследований выступают *сложные* системы, состоящие из множества связанных элементов самой различной природы (*атомов*, *молекул*, *клеток*, *нейронов*, *механизмов и др.*). Следует отметить, что в отличие от кибернетики синергетика рассматривает не процессы управления и сами принципы организации, а сам акцент делается на пространственно-временной структуре организации, на условиях ее возникновения, развития и самоусложнения. Итак, *синергетика* исследует проблемы междисциплинарного диалога, выявляет особенности современных социальных, когнитивных и коммуникативных феноменов. В широком смысле под ***синергетикой*** понимается совокупность знаний, исходящих из самых различных образов, метафор, идей, фактов, представлений о хаосе и порядке, переходных, нестабильных, кооперативных, когерентных процессах, нелинейностях, о таких математических моделях как диссипативные структуры, ***ОС***-модели, нейроно-подобные сети, фракталы, катастрофы и других. При этом, процесс формирования устойчивых *регулярных* пространственно-временных структур (*причем без каких-либо внешних организующих воздействий*), называемый самоорганизацией, является одной из характерных черт динамики определенных типов ***ОС***-моделей. Именно в данном контексте аппарат ***ОС***-моделей применяется достаточно широко в синергетике для исследования различных проблем самоорганизации [536].

Собственно синергетика занимается поиском и изучением моделей сложных систем, вопросами возникновения порядка из хаоса и перехода от упорядоченных структур к хаотическим. Данное направление возникло из объединения *трех* направлений исследований: ***(1)*** разработки методов описания существенно *неравновесных* структур, ***(2)*** разработки термодинамики открытых систем, ***(3)*** определения качественных изменений решений *нелинейных* дифференциальных уравнений [536]. При изучении этих систем, их часто описывают системой дифференциальных уравнений. Представление решения данных уравнений в форме движения некоторой точки в пространстве с размерностью, равной числу переменных, называют фазовыми траекториями данной системы. Поведение фазовой траектории в смысле ее устойчивости показывает, что существует несколько основных его типов, когда *все решения* системы в конечном счете сосредоточиваются на каком-то подмножестве. Это подмножество называется аттрактором. ***Аттрактор –*** область притяжения – множество начальных точек, для которых с течением времени все фазовые траектории, которые начинаются в них, стремятся именно к данному аттрактору. В качестве *трех* основных типов для аттракторов выступают *устойчивые предельные точки*, *устойчивые циклы* и *торы*. Движение точки в таких случаях имеет периодический или квазипериодический характер. Существуют также и характерные только для диссипативных систем так называемые *странные аттракторы*, которые (*в отличие от обычных*) не являются подмногообразиями *фазового* пространства, движение точки на них является *неустойчивым*, любые две траектории на нем всегда расходятся, незначительное изменение начальных данных приводит к *различным* путям развития. А именно, *динамика* систем со странными аттракторами является хаотической.

Во многих исследуемых системах предполагается ограниченность числа фазовых переменных. Однако более близкими к реальности являются распределенные системы с бесконечномерным фазовым пространством, типичным примером которых являются, в частности, активные среды. Исследования показывают, что в таких системах могут существовать *конечномерные* аттракторы.

Существование бесконечномерных аттракторов пока еще не исследовано в достаточной степени [536]. В ряде случаев в среде можно обнаружить либо инициировать возникновение спиральных волн. Все эти *спиральные* волны обладают одинаковой частотой; при этом, центр спирали может перемещаться. Эксперименты на ***ОС***-моделях показали, причиной появления *спиральной* волны может быть разрыв сложного фронта волны возбуждения, т.е. в основе их существования лежит исключительно свойство *самоорганизации* самой среды, не обусловленное *внешним* воздействием. Перемещение центра спиральной волны также является весьма примечательным свойством, так как является резонансом волны с некоторым внешним периодическим воздействием.

Вышеописанные структуры в рамках глобальных конфигураций ***ОС***-моделей также способны к взаимодействиям между собой. Итак, в результате проведенных экспериментов на ***ОС***-моделях были отмечены эффекты *подавления* одного ведущего центра более высокочастотным. При этом, неподвижные спиральные волны способны к сосуществованию; тогда как, с другой стороны, мы можем определить две перемещающиеся спиральные волны, которые при столкновениях будут аннигилировать. Такого характера взаимодействия позволяют говорить о возможности создания в ***ОС***-моделях на основе подобных структур логических элементов, из которых строятся разные вычислительные устройства. Достаточно интересными представляются и вопросы исследования различного типа аттракторов в ***ОС***-моделях.

Хаос **–** составляющая сложного поведения нелинейных систем. Между тем, имеет место также не поддающееся интуитивному осознанию явление, называемое *антихаосом*. Оно выражается в том, что некоторые достаточно беспорядочные системы в процессе своего развития могут спонтанно «*кристаллизоваться*», приобретая весьма высокую степень упорядоченности. Ряд исследователей предполагает, что ***антихаос*** играет важную роль в биологическом развитии, эволюции и в ряде других феноменов [526]. Более того, имеется ряд аргументов в пользу того, что наряду с хорошо изученными тремя типами *поведения* динамических систем: ***(1)*** стационарными состояниями, ***(2)*** периодическими и квази-периодическими колебаниями, и ***(3)*** хаосом, существует и ***четвертый***, специфический тип поведения на границе между регулярным движением и хаосом. Было также замечено, что на данной границе могут иметь место процессы, подобные процессам обработки информации и эволюции. В противоположность *динамическому* хаосу, рассматриваемое явление, именуемое иногда ***сложностью***, возникает в системах, состоящих из очень большого количества взаимодействующих элементов. Такие системы часто не только демонстрируют *четвертый* тип поведения, но в определенной мере обладают и адаптивными свойствами. В качестве одного из типичных примеров, наглядно демонстрирующих ряд общих свойств динамических систем на кромке хаоса, можно в полной мере рассматривать и целый ряд типов ***ОС***-моделей.

В частности, в качестве простого примера можно привести игру «*Жизнь (Life)*», представляющую собой классическую ***2-ОС***. Совокупность правил такой модели (*т.е. параметров системы*) такова, что ее динамика находится в узком диапазоне между областями устойчивости и хаоса. В данной ***ОС***-модели наблюдается поведение, похожее на «*естественные*» жизненные процессы. При этом, на базе анализа генерируемых моделью объектов была доказана эквивалентность игры «*Жизнь*» универсальной машине Тьюринга, тем самым, доказано наличие в ней процессов, *эквивалентных* универсальным вычислениям. Наряду с данной моделью имеется немало и других ***ОС***-моделей, чья динамика находится в узком диапазоне между областями устойчивости и хаоса. И в данном отношении ***ОС***-модели могут представить самый непосредственный интерес для исследования.

По аналогии, явлению хаотического движения в нелинейных системах и был присвоен термин *детерминированный хаос*. Наблюдаемое *хаотическое* поведение возникает не по причине внешних источников, не из-за большого числа степеней свободы и не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой. Оно порождается *собственной* динамикой *нелинейной детерминированной* системы. Предсказывать поведения траекторий *хаотических* систем на длительное время просто невозможно, ибо чувствительность к начальным условиям высока, тогда как начальные условия как в физических экспериментах, так и при компьютерном моделировании можно задать лишь с определенной точностью. В то же самое время такие хаотические системы могут одновременно демонстрировать хорошую управляемость и удивительную пластичность – система будет весьма чутко реагировать на *внешние* воздействия, сохраняя при этом тип своего движения. По мнению многих исследователей сочетание управляемости и пластичности обусловливает сам механизм надежного и гибкого реагирования на возмущения и управляющие воздействия *сложных* систем, вполне успешно функционирующим в изменчивой среде [536,546,547].

В общем случае динамические траектории ***ОС***-моделей довольно хаотичны, они не могут быть предсказаны на больших промежутках времени. Прогноз движения вдоль данных траекторий становится все более и более неопределенным по мере удаления от начальных условий ***(КФ).*** С точки зрения теории информации это означает, что ***ОС***-модель сама порождает информацию и скорость создания информации тем выше, чем больше хаотичность модели. А так как сама ***ОС***-модель создает информацию, то ее содержат и динамические траектории модели. На этом пути возникла интересная идея по использованию таких траекторий для записи, хранения и поиска информации. Показано, таким образом организованная информация запоминается и хранится в виде траекторий динамической системы и обладает свойствами ассоциативности [536,546,547]. Таким образом, и сами ***ОС***-модели могут оказаться достаточно эффективными для приложений указанных технологий по хранению и ассоциативному поиску информации, передаче и защите информации и др. Все это стимулирует активные исследования хаотических систем, к которым в определенной мере относятся и ***ОС***-модели. Конкретные же примеры применения феномена ***хаоса*** в информационных и коммуникационных технологиях как на основе ***ОС***-моделей, так и иных типов динамических систем дают представление о том, как с помощью такого явления как *хаос* можно решать и вполне созидательные задачи [536,546,547].

В последние пару десятилетий уделяется особое внимание исследованию *системных* механизмов возникновения катастроф. На платформе нелинейной динамики в решении данной проблемы был достигнут весьма существенный прогресс, связываемый, прежде всего, с разработкой *теории* самоорганизованной критичности. Модели в данной теории проще всего описывать не на языке дифференциальных уравнений, а на языке одного специального класса однородных структур с *внешним* шумом. В контексте выявления механизма возникновения катастроф на ряде примеров рассматриваются перспективы применения ***ОС***-моделей и в горной промышленности [536].

<u>ОС-модели логистики и урбанистики.</u> Проблемы логистики являются достаточно важными во многих прикладных областях, включая вопросы урбанистики и транспорта. В то же самое время данные проблемы в целом достаточно непростые, и для их исследования широко используется компьютерное моделирование. Однако, такое моделирование задач *логистики* требует большого количества процессорного времени и объема памяти. С другой стороны, сама *динамика* трафика описывается параллельными алгоритмами, реализуемыми на параллельных компьютерах очень высокой эффективности. В этом отношении именно ***ОС***-модели (*как одни из моделей параллельных вычислений*) представляют собой особый интерес, что и привлекло к ним большое внимание при исследованиях ряда трафиков. В этой связи цель данного пункта состоит в том, чтобы обратить внимание на ряд наиболее перспективных и интересных подходов к симулированию проблем в области трафика на основе ***ОС***-моделей, представляющих значительный прикладной интерес в логистике и урбанистике, учитывая немаловажное обстоятельство, что эти ***ОС***-подходы лежат в русле *основных* математических методов моделирования различных транспортных потоков [536]. В частности, известная ***ОС***-модель «*Жизнь*» получила новый сугубо прикладной аспект в задачах симулирования транспортных потоков, т.е. в таком направлении как логистика. В данной связи с полным основанием можно отметить *пионерскую* работу ***Нагегеля К.*** и ***Шрекенберга М.*** «*Модель клеточного автомата для скоростной автострады*» [574].

Так, ***Ю. Хунт*** на основе ***ОС***-моделей предложил весьма интересный подход, который позволяет определять некоторые новые методы вычисления пропускной способности железных дорог для Балтийского региона бывшего *СССР* (*Россия*, *Литва*, *Латвия*, *Эстония*) [497]. При этом, встраивая соответствующие правила в ***ОС***-модель, можно симулировать много видов сложного поведения *основных* режимов железных дорог Балтийского региона. Например, уже даже предварительные результаты показывают, что данный подход в сочетании с компьютерным моделированием дает возможность успешно анализировать заданные исходные данные (*количественные*, *динамические*, *аналитические*, *статистические*) для принятия *оптимальных* решений по дальнейшему развитию *пропускной* способности железных дорог Балтийского региона. При этом, некоторые полученные рекомендации уже находятся на стадии внедрения.

Моделированию дорожного трафика в настоящее время уделяется большое внимание. С одной стороны, управление трафиком в городских условиях является критическим для транспортной политики и дорожного планирования. А, с другой стороны, коллективное поведение большого количества транспортных средств, взаимно взаимодействующих, очень интересно с физической точки зрения. С этой точки зрения ***ОС***-модели, в которых автомобильная динамика упрощена, сохраняя лишь основные особенности, представляются нам довольно убедительными моделями для описания систем трафика. В данной связи целый ряд авторов использовали ***ОС***-подход для моделирования городского трафика. Например, ***Б. Чопард*** с коллегами из университета города *Женевы* предложили достаточно простую ***ОС***-модель для городского трафика в условиях города *Женевы*. В этой модели пересечения дорог реализованы в виде кольцевых транспортных *развязок*. Авторы исследовали *универсальные* свойства полученной модели и сделали сравнение числовых результатов моделирования с аналитическими. Показано, что динамика хорошо описывается в терминах очередей, формируемых на перекрестках. Модель была применена к городу *Женева* и на ней изучено время, необходимое для поездки испытуемого автомобиля из одной точки сети в другую. Показано, транспортный поток обнаруживает четкий гистерезис. Числовые результаты на данной модели были получены для *ЭВМ* Connection Machine *CM-200* (*для г. Манхэттэн*) и для *IBM-SP2* с *14* процессорами (*г. Женева*). На сегодня уже создан ряд компьютерных симуляторов, демонстрирующих моделирование потоков движения на базе ***ОС***-моделей, которые допускают настройку на тот либо иной режим движения городского транспорта [536].

А. Дупис и другие предложили новую двумерную ***ОС***-модель для описания городского трафика [498]. Их подход дает недорогое и простое описание городского трафика наряду с поддержкой и сложной глобальной динамики. На параллельном компьютере авторы исследуют параллельную работу и эффективность своего ***ОС***-имитатора. На этом пути получен ряд достаточно полезных практических рекомендаций по трафику *г. Женева*. В частности, предложена одна динамическая схема, описывающая поведение дорожной сети. В [499] предложена ***ОС***-модель транспортного трафика в городах, комбинируя (*соответственно модифицируя*) *идеи*, заимствованные из моделей ***BML*** городского и ***NS***-модели магистрального трафиков. К настоящему времени имеется целый ряд интересных работ по применению ***ОС***-моделей к симулированию дорожного трафика. Был достигнут значительный прогресс в ряде прикладных областей, связанных с задачами трафика, сформулированы *новые* темы для дальнейших исследований в данном направлении. Например, книга [500] имеет дело с современными аспектами теории *трафика* и ее приложением к *реальным* мировым проблемам. Охват тем данной книги достаточно широк – от микроскопического и ***ОС***-моделирования потоков трафика до загрязнения воздуха на городских улицах, обусловленного, в том числе, также интенсивным транспортным движением.

Потоки трафика демонстрируют разнообразие коллективного поведения, типичного для систем децентрализованного типа. В данных системах упорядоченные конфигурации могут возникать без централизованного управления. На базе известного языка *Logo* была создана версия *StarLogo* с *массовым* параллелизмом, которая представляет собой программную среду моделирования для исследования функционирования *децентрализованных* систем. На ее основе можно эффективно симулировать многие явления реальной жизни, включая ***ОС***-модели потоков трафика и пробок. Сайт **http://cuiwww.unige.ch/~chopard/Traffic/traffic.html** рекомендуется для ознакомления с этой проблематикой**.** Немало интересных вопросов исследования трафика и транспортных проблем на основе ***ОС***-моделей обсуждалось на конференции [360] и на ряде других форумов [536].

Достаточно интересный компьютерный имитатор трафика был разработан в Японии на основе ***ОС***-концепции и стохастической *скоростной* модели ***(Hikaru S.*** *и др.)****.*** Более того, так как для него вычислительные затраты весьма существенны, то для имитатора был реализован параллельный режим выполнения на кластерной компьютерной системе. С этой целью вся предметная область подразделяется на подобласти, затем обработку этих подобластей производят *ПК***.** Полученные на ней числовые результаты показывают**,** что предложенная ***ОС***-модель обладает относительно неплохой эффективностью в режиме распараллеливания [536].

Методика на основе ***ОС***-моделей используется для исследования и симулирования целого ряда задач как в городском планировании, урбанистике, так и в ряде других более экзотических для ***ОС***-моделей областях**:** география**,** планирование ландшафта**,** история и др. [213,216,217,385,502-504]**.** Достаточно интересным представляется предложенный ***Г.Г. Малинецким*** и ***А.Я. Темкиной*** подход к симулированию роста и взаимодействия городов с использованием необратимых ***ОС***-моделей**.** С целым рядом других очень интересных приложений подхода на основе ***ОС***-моделей в городском планировании можно ознакомиться в [360,536].

<u>ОС-модели в экологии.</u> Ряд исследователей использовали методику на основе ***ОС***-моделей и для симулирования в экологии**.** Наметился существенный рост числа публикаций, имеющих дело с ***ОС***-моделями и симулированием в экологии [505-514]. Между тем, имеются и вопросы о том**,** как различные аспекты ***ОС***-подхода затрагивают его *полезность* для экологических моделей. Данные вопросы достаточно детально обсуждаются в интересных работах [505,506,510-514]. Главный тут вопрос, к которому нужно обратиться **–** вопрос о синхронности ***ОС***-моделей. В работе [505] и др. отмечается, что *одновременное* обновление всех элементарных автоматов приводит к разногласию с локальностью взаимодействия, составляющего одну из сильных сторон ***ОС***-моделей. Показано, изменение определения ***ОС***-модели с учетом *асинхронного* обновления элементарных автоматов может драматично изменить поведение модели в целом. Например, часто довольно интересная структура, обнаруженная в динамике ***ОС***-модели, фактически, является артефактом *синхронного* обновления конфигурации модели [512].

Однако, несмотря на все вопросы, связанные с применимостью подхода на основе ***ОС***-моделей к экологическому симулированию, на сегодня мы имеем ряд довольно интересных экологических ***ОС***-моделей. В частности, в работах [425,502] рассматриваются ландшафтные проблемы, а также связанные с ними интересные экологические вопросы в контексте ***ОС***-моделирования, имеются интересные попытки построения математических моделей землепользования на общей основе ***ОС***-концепции [536]. ***ОС*** ряда типов и, прежде всего, стохастические как дискретные (*по времени***,** *пространству и состояниям элементарных автоматов)* динамические системы, довольно успешно используются и для моделирования динамики растительного покрова. В частности, ***H. Balzter*** и коллеги применили ***ОС***-подход для моделирования *динамики* трех типов растительного *покрова***,** в то время как ***D. Logofet*** и ***T. Lesnaya*** на основе подобного же подхода исследовали ряд вопросов моделирования сукцессии лесов [536]. Имеются другие интересные работы в этом направлении. В частности, модельный подход широко используется для решения агроэкологических задач и оптимизации природопользования. Был проведен довольно детальный анализ количественных методов описания динамики экологических систем, показаны возможности агроэкологических моделей при составлении агроэкологических прогнозов. Между тем, *балансовые* модели, которые являются основным инструментом исследования динамики гетерогенных систем, не способны отразить смену их состояний и изменение их кинетических характеристик. Именно поэтому как альтернатива и были предложены автоматные модели с дискретно-переменными скоростными коэффициентами, в качестве одного класса из которых и выступили ***ОС***-модели [536].

Для исследования целого ряда практически важных проблем, относящихся к *динамике* развития экосистем, довольно широко применяется модельный подход на основе использования интегро-дифференциальных и дифференциальных уравнений, например, для моделирования разных *биологических* сообществ. В целом, имеющиеся модели развития экосистем можно подразделить на два больших класса, а именно:

непрерывные (*создаваемые на основе обыкновенных дифференциальных уравнений для сосредоточенных и дифференциальных уравнений в частных производных для пространственно-распределенных систем*);

дискретные (*на основе систем алгебраических уравнений, которые в своем большинстве случаев можно получить дискретизацией дифференциальных уравнений; а в пространственно-распрделенном случае в качестве таковых выступают именно* ***ОС***-*модели*).

Между тем, в любом случае перед применением моделей каждого из вышеуказанных типов нам необходимо доказать их адекватность моделируемой системе, для чего используются достаточно хорошо известные методики, в частности, ретроспективный анализ [536].

Как уже отмечалось, ***ОС***-концепция может применяться для моделирования и пространственно распределенных физических систем в качестве своего рода альтернативы к подходу на основе диффуравнений в частных производных. Например, в работе [376] для симулирования *процесса биовосстановления* загрязненных почв используется одна интересная разновидность ***ОС***-модели – макроскопические клеточные автоматы. Предложенная ***ОС***-модель программно реализована с выполнением на *ЭВМ* параллельной архитектуры *MIMD*-типа. Детально рассмотрено различие моделирования на базе ***ОС***-концепции и диффуравнений в частных производных. Между тем, моделирование данной общезначимой проблемы является и важной социально-экономической задачей, где прогресс в моделировании может существенно улучшить эффективность методики дезактивации загрязненных почв. В ряде экспериментов на основе ***ОС***-моделей симулировался такой важный с экологической точки зрения процесс как прогрессивное обезлесение дренажа в результате расширения сельскохозяйственных угодий. Интересные ***ОС***-модели для симуляции лесных пожаров позволяют решать важные задачи предсказания их поведения. Ряд элементов ***ОС***-методики используется для формирования прогнозных нечетких значений урожайности и предпрогнозного анализа объемов стока горных рек. В целом же, использование ***ОС***- методики представляется нам достаточно перспективным при исследовании целого ряда экологических и эколого-экономических проблем, что обусловлено длительностью экологических процессов во времени, делающей их экспериментальное исследование практически невозможным. В данном случае можно ограничиться моделированием динамики экологических систем. Созданы также и ***ОС***-модели эволюционного картографирования ландшафтов Восточной *Сибири*. Недавно были предложены интересные подходы и к симулированию процессов структурообразования в лесах Пермского края на основе уравнений реакции-диффузии в сочетании с ***ОС***-моделями. Имеется ряд климатологических проектов по определению зависимостей между *аномальными* явлениями планетарной климатической системы на базе ***ОС***-моделей. В рамках международного проекта ***LUCC*** (*международной геосферно-биосферной программы*) проводились систематическое обобщение и анализ результатов исследований причин глобальных изменений в использовании земельных угодий в сопоставлении с данными по динамике глобальных изменений растительного покрова. В рамках данного проекта были реализованы *серьезные* инициативы по применению некоторых новых технологий, в частности, моделирования на основе ***ОС***-методики. Предложены довольно интересные подходы к системному анализу и созданию математического обеспечения для задач прогнозирования экологической безопасности на базе специализированных ***ОС***-моделей. Более того, ***ОС***-подход может применяться и в задачах исследования структуры, функционирования, эволюции природных и природно-антропогенных ландшафтов [536].

Из отечественных разработок в данном направлении *(даже в более широком их контексте)* можно отметить компьютерную систему для моделирования и трехмерной визуализации *динамических* процессов в реальном масштабе времени *(**СПИИ**, Санкт-Петербург)*. Главной особенностью этой системы является использование *быстрых* математических алгоритмов, разработанных на основе ***ОС***-концепции, биологического подхода совместно с оригинальной технологией визуализации в реальном масштабе времени. Данная система может достаточно успешно использоваться для экологического моделирования, создания ***3***-мерных карт местности в реальной шкале времени, распознавания образов и т.д. Довольно интересные результаты можно отметить по применению ***ОС***-моделей и для создания географических информационных систем, в частности, городской географии, как примера практического применения методов пространственного подразделения и анализа [536]. В интересной работе [575] авторы наглядно иллюстрируют проникновение *идеи нелинейной* динамики, к которой непосредственно относится проблематика ***ОС***-моделей, в такие области, как экология, экономика и социальные науки.

<u>ОС-модели в вулканологии.</u> Уделяется внимание использованию ***ОС***-концепции даже и в такой, на первый взгляд, далекой от ***ТОС***-проблематики области, как вулканология [397-399]. Известно, что ***ОС***-модели, обладающие высокой степенью параллелизма, являются достаточно серьезной *альтернативой* дифференциальным уравнениям в задачах симулирования целого ряда сложных систем, которые могут быть описаны в терминах локальных взаимодействий составляющих их компонент. При этом, ***ОС***-модель легко и естественно *реализуема* на параллельных компьютерах и использует возможности параллелизма без существенных ограничений. Прогноз потоков лавы был преобладающе ограниченным качественными аспектами вплоть до использования методов, связанных с компьютерным моделированием. На самом деле, в *реальных* условиях, исследующих поток лавы аналитически, использование дифференциальных уравнений было, практически, невозможным, кроме очень простых случаев. Для устранения связанных с этим сложностей был использован подход, базирующийся на *концепции* ***ОС***-моделирования. В частности, разработаны *трехмерные* ***ОС***-модели, но временные издержки вычислений по данным моделям не позволили использовать их для больших потоков лавы, потребовав упростить их снижением размерности к двум. Таким образом, подход на базе ***ОС***-моделирования, когда пространство и время считаются дискретными, преодолевает многие из тех затруднений, которые были связаны с применением дифференциальных уравнений. Весьма серьезные успехи в этом направлении были достигнуты итальянскими специалистами. Так, в работе [397] представлена ***ОС***-модель симуляции потоков *лавы* с применением ее к моделированию извержений вулкана *Этна* в ***1986-87, 1991-92 гг.*** Важная задача *вулканологии* состоит в способности моделировать вулканические явления для получения наиболее достоверного предсказания их потенциальной угрозы. И в данном отношении именно модельный подход имеет первостепенное значение, позволяя получать достаточно приемлемые результаты, позволяющие делать довольно достоверные заключения прогнозного характера.

При данном подходе поток лавы рассматривается как динамическая система, базирующаяся на локальных взаимодействиях с дискретными временем и пространством, где само пространство представлено квадратными ячейками. Каждая ячейка описывается определенными величинами *(состояниями)* следующих выбранных физических параметров – высота и толщина лавы, оттоки лавы к соседним ячейкам и температура лавы. Реология лавы изучается также косвенно через ее воздействие на толщину лавы. Граничные значения, определяющие моделирование, описывают *основную* топографию, скорость вытекания лавы, температуру извержения, а также температуру перехода лавы в твердое состояние и реологию. При этом, ***ОС***-модель, выбранная для изучения потоков лавы, была реализована программой *SCIARA* на языке *Pascal* для *ПК Macintosh* с выводом результатов на экран в картографической форме. Данная модель была апробирована на данных роста поля потока Этны за ***1986-87*** и ***1991-93 гг.*** И даже при условии, что набор данных являлся однородным, *модельный* и *реальный* поля потока показывают поразительно подобные совпадения форм роста. Дальнейшее развитие ***ОС*-**модели для исследования поведения обширных потоков лавы было представлено в [399] применительно и к вулканической активности вулкана *Этна*. В настоящее время существует ряд и других подходов к моделированию описанных явлений [536]. В частности, ***Ишихара*** и др. [398], используя несколько подобный подход на базе ***ОС*-**концепции, базирующийся на уравнениях *Навье-Стокса*, получили ряд важных числовых характеристик. Но их подход неприменим к многочисленным потокам или к тем потокам, которые выталкиваются периодически. Достаточно интересным представляется и применение ***ОС*-**моделей в сочетании с их компьютерной реализацией для симулирования оползней в горных местностях [401].

С процессами, связанными с *вулканической* активностью, очень тесно связаны и *сейсмологические* процессы. В процессе развития естествознания была осознана стохастичность многих сложных процессов и начато изучение больших нелинейных систем. Теории катастроф, хаоса, сложности и синергетика представляют собой разные методологические платформы, посредством методов которых описывается и исследуется поведение нелинейных динамических систем. Более того, и геофизика, обладая длинными рядами наблюдательных данных, не только существенно влияла на развитие этого мировоззрения, но и активно разрабатывала и практически применяла идеи и методики прогноза катастроф, определения рисков и возможных ущербов, стратегий принятия решений [536]. Так, для исследования *сейсмических* процессов достаточно широко используются пружинно-блочные модели разломов и модели типа «*кучи песка*» на базе однородных структур. Указанные модели обладают рядом общих свойств, включая самоорганизованно критическими свойствами. При этом, существующая гипотеза о невозможности прогноза в самоорганизованно критических системах была перенесена на сейсмические процессы и породила ряд сомнений в возможности сколько-нибудь достоверного прогноза сильных землетрясений. На сегодня такая пессимистичная гипотеза не подтверждена, но и не опровергнута.

В данной связи ***И.В. Кузнецовым*** и другими проводятся исследования обратной задачи для ***ОС*-**моделей, симулирующих динамику указанных сейсмических процессов [536]. Точнее, изучается возможность *восстановления* управляющих параметров ***ОС*-**модели на базе зарегистрированного множества событий, сгенерированного данной моделью. После чего восстановленные значения используются для дальнейшего *прогноза* событий. Полученные на сегодня подобные алгоритмы восстановления пока не позволяют решать обратную задачу прогнозирования в широком классе ***ОС*-**моделей, тем более для прогноза реальной сейсмичности. Между тем, они, пожалуй, на базе более детального исследования таких ***ОС*-**моделей позволят по динамике системы определять ее класс и специфичность, а также развить новый подход к проблеме прогнозирования в подобных нелинейных диссипативных системах, сочетающий достаточно грубую, статистическую оценку управляющих параметров с функционалами, которые характерны для подготовки *критического* перехода в системах данного класса [536]. При этом, необходимо иметь в виду, подобного типа исследования, ориентированные на сейсмологические приложения, смогут иметь существенно более широкую применимость в задачах, рассматриваемых с точки зрения синергетики.

Успешное применение синергетики в современной геомеханике в определенной мере связано с использованием методологии, базирующейся на ***ОС*-**моделях. Это обусловливается тем важным обстоятельством, что ***ОС*-**модели обеспечивают удовлетворительное симулирование феноменов, исследуемых в геомеханике, для которых механизм не совсем известен. В этой ситуации строгий математический аппарат непригоден и здесь именно ***ОС*-**модели представляют собой наиболее эффективный аппарат исследования в данной области [536].

ОС-модели в экономике. К решению современных проблем *нелинейной экономической* динамики (*экономической синергетики*), таких как анализ процессов, происходящих на рынках капитала под влиянием объективных экономических условий и субъективных решений участников рынка, теории эффективного, переходного и когерентного рынков, задач прогнозирования рыночной конъюнктуры, изменчивости рынков, теории экономических циклов, экономических кризисов, экономического хаоса и т.д., совместно с систематическим применением фрактального анализа привлекаются также прикладная нелинейная динамика, теория ***ОС***-моделей, нечеткая логика, нейронные сети и другие *новейшие* математические теории. Известны работы по использованию ***ОС***-моделей в банковских технологиях, например, в качестве модели диффузии инноваций для симулирования распространения интернет-банкинга. Результаты анализа современных методов искусственного интеллекта применительно к задачам календарного планирования единичного производства показали, в этом направлении применима ***ОС***-концепция. ***ОС***-модельный подход все шире используются в качестве инструмента эволюционного симулирования экономической динамики. В настоящее время для разработки математических моделей целого ряда социально-экономических систем все шире наряду с *классическими* методами используются и *неклассические*, например, ***ОС***-модели, позволяющие учитывать *пространственную* структуру систем. В качестве одного из современных концептуальных подходов к описанию ряда *нелинейных* экономических процессов на основе ***ОС***-концепции исследуются законы эволюции экономических структур на макро- и микроуровне, жизненные циклы экономических структур, товара, а также технологий с позиций эволюционной экономики. Так, в число современных методов анализа финансовых и экономических процессов все прочнее входят методы на базе ***ОС***-концепции [536]. В частности, ***С. Беляков*** предложил интересные математическую модель и метод для анализа рынка ценных бумаг, включая прогнозирование котировки акций ряда ведущих российских компаний. Такая модель базируется на концепции линейных ***ОС***, которые имеют целый ряд преимуществ перед традиционными классическими моделями. В исследованиях проблем *нелинейной* экономической динамики (*экономической синергетики*) среди современных математических средств все серьезнее используются и ***ОС***-модели. В частности, нелинейный подход к анализу рынков на основе ***ОС***-моделей является одним из наиболее перспективных направлений в области экономического и финансового моделирования. На базе ***ОС***-концепции рассматриваются и различные проблемы самовоспроизводства социально-экономических систем. При этом, оказывается, что ***ОС***-модели прогнозирования экономических временных рядов имеют определенные преимущества перед классическими методами прогнозирования [536].

<u>ОС-модели в социологии</u>. Весьма широко ***ОС***-концепция используется также для исследования различного типа автоматных моделей коллективного поведения [177,196,201]. Во многих задачах моделирования социальных явлений на сегодня достаточно широко применяются классические математические методы, например, описание *динамики* некоего процесса дифференциальными уравнениями, однако появились и первые достаточно интересные модели социальных явлений, базирующиеся на основе ***ОС***-концепции. Подобная концепция используется и для построения моделей *формирования общественного* мнения, включая моделирование *электоральных* процессов. По мнению целого ряда исследователей ***ОС***-методика дает возможность создавать существенно более реалистичные модели рынка, чем в случае *традиционных* подходов к изучению диффузии инноваций. Основное достоинство данного подхода заключается в возможности эмпирической оценки фактора вероятности принятия новинки. Для чего вполне можно использовать данные социологических опросов и материалы фокус-групп. При этом, другое преимущество данного подхода заключается в возможности получения оценок необходимого количества сторонников и их пространственного распределения в начальный момент маркетинговой кампании. На основе ***ОС***-моделей предпринимаются попытки создания концептуального подхода к моделированию процессов социальной глобализации, в частности, определения общих черт систем, основанных на ***ОС***-концепции, и общества, оценки возможности моделирования общественных процессов в рамках таких моделей, а также определения в их терминологии такого широко дебатируемого социального явления как *глобализация*. Имеются интересные попытки применения ***ОС***-подхода к моделированию распространения слухов и эпидемий. Более того, предлагается в отличие от традиционных подходов дать и математическое описание даже таким трудно формализуемым процессам как самоорганизация населения, образование и рост городов или даже государств на базе ***ОС***-моделирования. Исходя из ***ОС***-концепции, предпринимаются попытки моделирования общества как самоорганизующейся системы. На основе ***ОС***-моделей рассматриваются вопросы о возможности проведения численных экспериментов, моделирующих движение *неорганизованной* группы людей. На основе ***ОС***-методики строятся модели получения *предпрогнозной* информации в торговле и т.д. В настоящее время ***ОС***-методика все активнее применяется для моделирования различного типа социальных процессов. Имеется целый ряд попыток применения ***ОС***-подхода к социальным феноменам и даже антропологии. Так, принятие гипотезы о *фрактальной природе* общества сразу же накладывает определенные ограничения на методы его исследования. В этом случае, если мы хотим учитывать пространственную составляющую социальных процессов, то и метод их математического анализа должен *коренным* образом измениться. Придется прибегнуть к такому аппарату исследований, как ***ОС***-модели и технике программирования на реакционных решетках, когда *эволюция* состояния ячейки полностью определяется состоянием ее ближайших соседей. Целый ряд подходов подтверждает довольно широкие возможности использования ***ОС***-концепции в математическом моделировании социально-этнических процессов. Представлена достаточно интересная ***ОС***-модель, имитирующая поведение некоторой социальной системы на индивидуальном уровне. Имеются достаточно интересные соображения по использованию ***ОС***-подхода для математического моделирования исторических макропроцессов [582]. Можно также констатировать, что на сегодня ***ОС***-метод играет все *более* возрастающую роль в математическом моделировании социальных процессов, явлений и феноменов [536].

На основе ***ОС***-концепции предлагаются достаточно интересные модели *диффузии* информации. В частности, была описана интересная система клеточных автоматов, которая отражает процесс распространения и публикации новостей среди отдельных информационных источников. При этом, полученные на ней результаты относительно диффузии новостей на веб-сайтах довольно хорошо согласуются с реальным поведением тематических информационных потоков, тогда как на локальных временных промежутках с известными моделями, например, экспоненциальной и логистической [536].

Определенный интерес представляют попытки применения ***ОС***-концепции и к моделированию электорального процесса. В цикле работ ***Т. Брауна*** рассматривается целый ряд контекстуальных моделей электорального процесса. Он считает, что уже *классические* ***ОС***-модели приемлемы для данных целей, когда избирательные предпочтения индивидуума определяются установками его ближайшего окружения. Так, одна из таких ***ОС***-моделей предполагает, что индивид принимает решение голосовать в момент ***t+1*** за демократов или республиканцев согласно правилу простого большинства. Учитываются лишь *взгляды* индивида и четырех его ближайших соседей в момент ***t*** (*окрестность соседства* ***Неймана***). При этом, если из пяти человек трое или более поддерживают демократов, индивид также голосует за демократов. Если же большинство из его соседей отдают предпочтение республиканцам, индивид и в этом случае разделяет точку зрения большинства. В данном случае ***ОС***-модель имеет два состояния, а именно: ***1*** – голосование за республиканцев и ***0*** – голосование за демократов. ***Т. Браун*** и его коллеги провели вычислительные эксперименты на конечной модели ***2-ОС*** размером ***128х128*** при случайной начальной конфигурации голосов. Динамика ***ОС***-модели исследовалась на большом временном интервале – до ***20000*** итераций. И оказалось, что партийная борьба приводит к весьма сложным конфигурациям в распределении голосов, существенно зависящим от их начального распределения [536].

Одной из проблем, возникающей при движении группы людей, является образование «заторов» либо «пробок» при наличии некоторых препятствий на пути движения данной группы. Если по каким-то причинам такие препятствия должны обязательно находиться на пути людей, кажется целесообразным заранее предсказать, насколько сильную помеху они создадут. Так как *реальный* эксперимент требует значительных затрат, а иногда в качестве *экспериментальных* данных могут выступать только результаты уже произошедших происшествий, подчас с трагическим исходом, то продуктивной может оказаться идея проведения численных экспериментов, моделирующих подобные ситуации. Для таких целей, в частности, могут быть использованы подходы на основе ***ОС***-моделей, относящихся к классу решеточных газов. Были построены имитационные модели распространения паники, в рамках концепции мультиагентных систем на основе ***ОС***-моделей созданы их новые виды, которые позволяют симулировать динамику дифференцированного по экономическим, социально-психологическим и ролевым характеристикам субъектов социума для различных сценариев заражения, оздоровления и профилактики. В этой связи необходимо упомянуть, что серьезно созданием моделей динамики толпы занимался ***М.Е. Степанцов*** (*МГУ*) еще в ***1997 г.***, придя к выводу о целесообразности использования для данных целей некоторого класса математических ***ОС***-моделей [536].

В настоящее время на стадии становления находится компьютерная социология, базирующаяся на использовании возможностей компьютеров для решения *социологических* как теоретических, так и эмпирических, и практических задач. Это направление возникло как средство разработки и проверки социологических теорий, измерения социальных явлений, определения принципов и закономерностей строения и функционирования социальных процессов, социальных систем и их прогнозирования [536]. Оно используется и для разработки рекомендаций по управлению различными социальными явлениями, процессами, социальными системами с использованием компьютерных моделей, предназначенных и для проведения имитационного компьютерного моделирования. По мнению ряда исследователей компьютерная социология представляет собой специфический метод исследования. *Компьютерные* модели в ней подразделяются на ***3*** основных класса, а именно: ***(1)*** основанные на классической либо компьютерной социологической теории, ***(2)*** основанные на предварительном эмпирическом анализе собранных данных без какой-либо связи с теорией, ***(3)*** из других областей знания, например, ***ОС***-модели, нейронные сети, модели детерминированного хаоса, сложности и т.д. При этом необходимо отметить, в качестве *главного* теоретического понятия компьютерной *социологии* является понятие «*искусственного общества*» – реально функционирующей компьютерной системы, которая состоит из одной или нескольких компьютерных моделей для проведения имитационного компьютерного моделирования. Таким образом, в отличие от традиционных социологических теорий, существующих в форме текстов, или математических социологических теорий, которые существуют в виде аксиоматики, теорем, математических формул, в компьютерной социологии *теория* – это реально функционирующая компьютерная система, в частности, базирующаяся на ***ОС***-концепции. Составной частью такой *концепции* являются алгоритмы для математического моделирования *социальных* систем разного уровня иерархии, базирующиеся на правилах функционирования ***ОС***-моделей.

Растет интерес к ***ОС***-моделям, используемым для исследования распространения идей, эмоций, для изучения вопроса влиянии на динамику группы таких формальных признаков, как размер популяции, возможности установления контактов и степень *разнообразия* элементов популяции. При этом, следует иметь в виду, ***ОС***-среда с некоторыми свойствами, подлежащими изучению, и изменением правил локального перехода единичных автоматов не всегда предсказуема, вопрос же о правильности ее поведения или результатов и вовсе некорректен, что требует тщательной верификации моделей.

Широкий круг социально-экономических явлений обладает весьма характерной чертой такой, как *лавинообразность*, объединяющей их в один класс. Процессы вышеуказанного типа довольно серьезно влияют на социально-экономическую и политическую безопасность как государства, так и общества, особенно в условиях значительной нестабильности, широкого распространения инфотехнологий и влияния фактора *глобализации*. Сегодня не существует достаточно надежных способов предсказания и управления *лавинообразными* социально-экономическими процессами

(ЛСЭП) и причин тому множество. В данном контексте достаточно интересным представляется возможный подход к созданию математической теории ***ЛСЭП,*** повышение на ее основе качества прогнозирования возникновения и развития данного типа процессов, предложенный ***В. Данич.*** В частности, им созданы имитационные модели распространения паники, в рамках концепции мультиагентных систем на базе ***ОС-***моделей созданы их *новые* виды, позволяющие симулировать динамику дифференцированного по важнейшим социально-экономическим характеристикам субъектов социума для различных сценариев заражения, оздоровления и профилактики [536].

В настоящее время в связи с бурным развитием сетевой инфотехнологии и формирующихся на ее основе *социальных* сетей наметилась тенденция их формального исследования. Под *социальной* сетью понимается множество персон, которые могут вступать во взаимодействие друг с другом. Понятие классических социальных сетей используется в социологии при различных изучениях организационного поведения и *межорганизационных* отношений, распространения информации и организации информационных войн, распространения инфекционных заболеваний, а также горизонтальных связей и взаимной поддержки индивидов, изучении политических, культурных и научных связей. Такое использование можно определить как классические социальные сети в отличие от появившихся в последнее время виртуальных или онлайновых социальных сетей. В отличие от классической сети и социальной группы социальное сообщество, сформировавшееся в среде *Internet (социальная сеть)* допускает более активное и оперативное *исследование*, измерение и классификацию. Для анализа таких социальных сетей можно вполне успешно использовать и развитые математические модели, включая ***ОС-***моделирование [536].

По мнению целого ряда известных специалистов психология предоставляет множество проблем, которые могут решаться на основе использования *синергетических* моделей. И среди такого типа проблем можно, в частности, отметить также возникновение тех или иных типов социальльного поведения, возникновение архетипов. Так, синергетическое моделирование позволяет выявлять наиболее важные параметры порядка и управляющие параметры. Например, симулирование поведения определенных классов ***ОС-***моделей дает возможность исследовать некоторые общие закономерности поведения коллектива индивидуумов в определенных условиях, что, позволяет, в свою очередь, вырабатывать некоторые полезные рекомендации по управлению коллективом в различных сложных ситуациях.

Между тем, недавно в результате взаимного интереса ученых-естественников и гуманитариев и появилась концепция анализа политики как нелинейной системы. В значительной степени она представляет собой некую «*технократическую*» точку зрения из-за прямого переноса в область изучения политики понятий, чуждых методологии гуманитарных наук. Так, *нелинейный* анализ имеет особую направленность: показать на имитационных моделях, когда и при каких условиях международная система находится на грани хаоса, чреватого потрясениями либо глобальными конфликтами. Для построения таких моделей, представляющих собой максимально детальный аналог реальности, используется достаточно сложный математический аппарат (*теория сложных систем, теория хаоса, **ОС-**концепция и др.*) и суперкомпьютеры. Предложены математические ***ОС-***модели в качестве примеров, иллюстрирующих некоторые вопросы философии [536].

<u>Искусственная жизнь и ОС-модели</u>. «Искусственная жизнь ***(Artificial Life – AL)*** » **–** исследования *искусственных* систем, демонстрирующих элементы *характерного* поведения *естественных* живых систем. Они хорошо дополняют традиционные *биологические* науки, заинтересованные в *анализе* живых организмов, пытаясь симулировать жизнеподобное поведение в компьютерах и других искусственных средах. ***AL*** рассматривает *жизнь* как свойство организации материи, а не свойство материи, которая организована таким образом. При этом, если классическая *биология* в большей степени интересуется материальной стороной жизни, ***AL*** интересуется формальными основами жизни. Модели ***AL*** рассматривают живой организм как большую совокупность простых машин, по определенным правилам *нелинейно* взаимодействующих друг с другом, обеспечивая при этом жизнеподобную *глобальную* динамику. Так, многие концептуальные и философские проблемы, имеющие отношение к ***AL***, имеют непосредственные параллели и с проблематикой сложных и эволюционных систем, кибернетикой и искусственным интеллектом.

Одной из важнейших составляющих естественной жизни является феномен ***«самоорганизации»***, который должен быть присущ и моделям ***AL***. Вообще говоря, под самоорганизацией понимается процесс, в результате которого многокомпонентные системы имеют тенденцию к достижению специфического состояния, множества циклических состояний либо их пространства состояний маленького объема без *внешнего* воздействия. Все механизмы, которые определяют ее поведение, являются *внутренними* по отношению к системе – самоорганизация в противоположность *внешне определенной* организации. Таким образом, разумно потребовать, чтобы для системы, изучаемой на предмет наличия *феномена самоорганизации*, ее порядок не может определяться специальными начальными состояниями, которые могли бы влиять на процесс развития системы. Поэтому, для обеспечения гарантии того, что система является самоорганизующейся, следует инициировать ее со случайных начальных состояний и наблюдать достигает ли она требуемого порядка либо поведения *аттрактора*. Под *аттрактором* динамической системы понимается притягивающее, *замкнутое инвариантное* множество в ее *фазовом* пространстве. Актуальными проблемами теории аттракторов *динамических* систем являются изучение эффектов чувствительности по отношению к начальным условиям и *оценивание* размерностных характеристик *инвариантных* множеств. Как правило, чувствительность по отношению к начальным условиям на аттракторах сравнивается с классическими определениями неустойчивости по ***Ляпунову***, ***Пуанкаре*** или ***Жуковскому***. А так как ***ОС***-модели представляют собой специальный тип параллельных дискретных динамических систем, то и вопрос их *аттракторов* исследуется достаточно интенсивно [536].

В качестве двух различных типов систем, обладающих свойством самоорганизации в указанном смысле, можно рассматривать ***NK***-булевы сети ***Кофмана*** и дискретное *логистическое* уравнение. ***ОС***-модели вполне можно отнести к той же самой категории детерминированной и *необратимой* самоорганизации. Подобно ***NK***-сетям, ***ОС***-модель самоорганизуется исключительно согласно ее *локальной* функции перехода. В булевых сетях это обычно интерпретируется как моделирование некоторой закрытой абстрактной динамики (*например*, *геномные эпистатические сети*, *химические реакции и т.д.*), тогда как в ***ОС***-моделях локальные правила перехода часто рассматриваются как моделирование некоей искусственной физики в искусственном топологическом пространстве, в то время как конфигурации клеточной активизации (*циклы состояний*) рассматриваются уже как *эмергентные* феномены. В частности, когда наблюдаемые последовательности конфигураций (*их истории*) ведут себя подобно некоторым жизненным феноменам (*движение*, *самовоспроизведение*, *рост*, *регенерация и т.д.*), то часто утверждается, что это представляет проявление искусственной жизни из искусственной материи [536].

Для искусственной физики с микропричинной связью установлены простые *локальные* правила перехода (*состояние клетки полностью зависит от нее самой и ее соседей согласно индекса соседства и их предыдущих состояний*), тогда как наблюдаемые последовательности конфигураций в качестве искусственной жизни. Между тем, здесь имеет место одна очевидная проблема с *интерпретацией* данной аналогии – в реальном мире локальные правила, приводящие к некоторым физическим причинным связям, генерирует все, что нас окружает, и живое, и неживое. Тогда как в мире ***ОС***-моделей аргументы часто приводятся для обоснования искусственной жизни, но не для строгих критериев отличий искусственной жизни от искусственного неживого, также генерируемого такой искусственной физикой. Именно в данном направлении весьма желательна активизация исследований при использовании ***ОС***-моделей как среды изучения феноменов, относящихся к искусственной жизни.

Здесь следует упомянуть еще одну современую теорию определения жизни – теорию *аутопоэза*, представляющую собой одну из современных попыток выразить критерий «жизни». Важными понятиями данной теории являются «*паттерн*» (*конфигурация*) и «*организация*». Более того, под *паттерном* понимается некоторый тип структуры, который характерен для множества частных *реализаций* этой структуры, тогда как под *организацией* понимается частная реализация паттерна. *Аутопоэтическая* система находится в состоянии постоянной необратимой эволюции, поскольку обратимость связана с воспроизведением тех же следствий при одних и тех же воздействиях со стороны внешней среды, что отрицает автономность системы. Получая постоянную активацию со стороны внешней среды, аутопоэтическая система каждый раз уникальным образом отвечает на нее, образуя *уникальную* траекторию своего развития. Кроме *естественного* отбора, в *эволюции аутопоэтических* систем действует принцип естественного порядка, выражающийся законами сетевой и нелинейной организации систем, например, в форме дифференциальных уравнений либо ***ОС***-моделей [536].

ОС-подобные игры. Особое место среди прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики занимают так называемые ***ОС***-подобные игры, среди которых наиболее известной является игра «*Жизнь* (*Life*)» американского математика ***Дж. Конуэя.*** Игра представляет собой бинарную классическую ***2-ОС*** и была предложена в качестве формальной модели изучения ряда общих принципов развития некоторых абстрактных биологических сообществ. В настоящее время интерес к игре настолько велик, что ею увлекаются многие тысячи любителей и профессионалов во всем мире, тогда как в *США* существует даже клуб любителей игры и издается специальный журнал, не считая многих публикаций в различного рода изданиях, в том числе и электронных [150,166,168,172]. При этом, для энтузиастов игры «*Жизнь*» предназначен ежеквартальный бюллетень (*автор и издатель* ***R.T. Wainwright***), первый номер которого вышел в марте ***1971 г.*** Данная игра легко обобщается и на ***3***-мерный случай и более общий, чем бинарный, алфавит состояний [536].

В процессе своего развития игра «*Жизнь*» превратилась в своего рода самостоятельный объект исследования (*чему во многом способствовало массовое распространение* ***ПК*** *и множество программ, симулирующих игру*), привлекший к себе внимание целого ряда математиков-профессионалов, и в данном направлении было получено и множество интересных и разноплановых результатов [3,54,131,146], оказавших вполне определенное влияние на развитие самой ***ТОС***-проблематики. Подавляющее число результатов по этой игре и ее модификациям было получено посредством специальных компьютерных симулирующих программ, позволяющих представлять сам процесс исследования динамики игры в виде захватывающих цветных компьютерных фильмов. Данная возможность привлекает к данной и ей подобным ***ОС***-играм многих пользователей ***ПК***, что не может не отразиться как на их дальнейшем развитии, так и на развитии собственно самой ***ТОС***-проблематики в целом. Достаточно интересное обсуждение такого сложнейшего феномена как «*биологическая жизнь*», проблемы искусственной жизни, а также и вопросов самоорганизации в контексте ***ОС***-моделей наряду с целым рядом других интересных *биологически* мотивированных вопросов, можно найти в курсе лекций [419] для университета *Индиана* (*США*) по биологически-мотивированным вычислениям.

Между тем, сугубо теоретических результатов по отмеченному типу ***ОС***-моделей относительно немного. На сегодня они ограничиваются, насколько нам известно, лишь нашими результатами по неконструируемости в данного типа ***ОС***-моделях и по реализации в них базовых логических функций [3,54,409]. Между тем, было показано, что игра «***Жизнь***» эквивалентна универсальной машине Тьюринга, что обусловлено наличием в ней процессов, эквивалентных универсальным вычислениям. Тогда как компьютерный анализ такой ***ОС***-модели и целого ряда ее *модификаций* размерностей $d=\{1,2,3\}$ представлен достаточно широко. Естественно, простота формулировки данной ***ОС***-модели позволяет очень просто реализовывать ее и вручную, не прибегая к помощи компьютера, на клеточной бумаге, однако отслеживать ее *динамику* на значительное количество шагов весьма трудоемко и чрезвычайно невыразительно в визуальном отношении. Так, именно использование достаточно быстрых *ЭВМ* и позволило получить целый ряд весьма интересных динамических свойств данного типа ***ОС***-моделей. Здесь же уместно отметить, что большинство полученных результатов теоретического характера был получен именно на базе компьютерного моделирования. Так, ***П. Ренделу*** [429] во многом именно таким подходом удалось погрузить ***МТ*** в среду игры «*Жизнь*». С результатами по этим простым ***ОС***-моделям и использованным для них программным симуляторам можно ознакомиться, например, в [5,8,88,90,146,168,172,409,429,536] и цитируемой в них литературе. В частности, интересная программа ***3D-Life*** для моделирования ***3D***-мерной игры «*Жизнь*» была создана ***Ф. Мэтью*** и распространяется бесплатно. Из некоторых других программных симуляторов игры «*Жизнь*» можно отметить такие, как ***Life***, ***LifeLab***, ***CASim*** и ***Plife***. Одним из *лучших* отечественных симуляторов игры «*Жизнь*» можно отметить программу ***FAM Life***, обладающую богатыми возможностями для настройки. Особенностью реализуемого ею алгоритма является использование способа побитового хранения клеток. Программа может обрабатывать более полумиллиона клеток, причем с достаточно высокой скоростью. При этом, для ускорения работы применяется *DirectX*. Достаточно много интересного в этом направлении можно получить и в *Internet* по ключевой фразе «***Game Life***».

На основе *Matlab Web* сервера в Астраханском университете под руководством ***Ю.Ю. Тарасевича*** создана виртуальная лаборатория «*Математическое и компьютерное моделирование*» – комплекс программ, работа с которым не требует наличия пакета *Matlab*. Достаточно лишь иметь доступ к компьютеру, подключенного к *Internet*. Данная лаборатория поддерживает работу целого ряда важных направлений, среди которых и тема «*Клеточные автоматы*», в котором рассматриваются классические ***ОС***-модели такие, как модель *Винера-Розенблюта*, игра «*Жизнь*», автомат *Гриффита* и акватор [577].

Определенный интерес представляет также программа *KukuLife* ***С. Абрамова*** – одно расширение классической игры «*Жизнь*», допускающее до ***8*** типов клеток и до ***8*** типов веществ. При этом, ряд исследователей *ОИЯИ* (*г. Дубна*) рассматривали интересный класс ***ОС***-моделей с перестановочно инвариантными локальными правилами перехода, действующими на симметричных решетках. Было показано, что в бинарном случае такие локальные правила перехода представляют собой обобщение правил игры «*Жизнь*». Учитывая же инвариантность относительно переименований состояний можно дополнительно существенно уменьшать число возможных локальных правил. Рассматривались и алгоритмические подходы к исследованию динамики ***ОС***-моделей с высокой симметрией [536].

Между тем, игра «*Жизнь*» интересна не только с точки зрения захватывающих игровых качеств, но и в качестве довольно интересной необратимой ***ОС***-модели, обладающей универсальностью, точнее на основе ее специфических конфигураций можно построить все логические элементы, обусловливающие *универсальную* вычислимость. Более того, конфигурации, возникающие в игре «*Жизнь*», достаточно точно воспроизводят возмущения течения поверхности потока жидкостей, образованные механическим препятствием. Однако и другие элементы динамики игры «*Жизнь*» имеют целый ряд достаточно интересных интерпретаций.

В данном контексте можно отметить и предложенный ***В. Задорожным*** автомат *Инь-Ян*, который представляет собой структуру ***2-ОС*** с индексом соседства *Мура* и алфавитом ***A***={***0***,***1***,***2***}, локальная функция перехода которого (*как полагает автор*) приближенно имитирует *диалектический* закон единства и борьбы противоположностей. При этом, сама *локальная* функция определяется таким образом, чтобы популяции единичных автоматов в состояниях «***1***» и «***2***» конкурировали между собой, но не смогли развиваться друг без друга [570-572]. Читателю в качестве весьма полезного упражнения предлагается оценить для данного типа ***ОС***-модели размер минимального блока, содержащего ***НКФ***, как это было сделано для игры «*Жизнь*» [2]. В данном контексте интересно и компьютерное исследование указанной ***ОС***-модели.

Довольно интересны попытки применения ***ОС***-подхода к компьютерным играм намного более сложного типа. В частности, ***К. Доннингер*** – известный специалист в области создания программ для компьютерных шахмат, опираясь на потенциал уже имеющегося программно-аппаратного комплекса, уделяет все большее внимание компьютерной игре ***GO***, разрабатывая новые методы ее программной реализации с использованием ***OC***-концепции и средств распознавания образов.

К этой тематике в определенной мере примыкает также целый ряд интересных работ ***Тоффоли***, ***Фредкина***, ***Беннетта***, ***Фейнмана*** и др., рассматривающих *Вселенную* как некоторую ***OC***-модель. Особенно следует отметить интересную работу ***М. Минского*** «*Клеточный вакуум*», в которой он показывает, что идея *относительности* имеет место и для ***OC***-моделей, когда часы (*осцилляторы*) приближаются к скорости света – они замедляются, но не тем же самым образом, каким они это делают в *непрерывном* пространстве. В целом, данные работы ориентированы на исследователей, интересующихся вычислительными аспектами физической *Вселенной* или физикой вычислений [536]. И действительно, теоретические модели клеточной *Вселенной* – удобный математический формализм, но, с другой стороны, крайне неустойчивая философская концепция. Единственно разумной философской интерпретацией такой клеточной *Вселенной* представляется нам некий квантовый компьютер, базирующийся на концепции недетерминированной ***OC***-модели. Такая модель будет функционировать в дискретном поле событий, т.е. в дискретном времени. И даже при бесконечном количестве клеток ее поведение будет весьма тривиальным, порождая, между тем, весьма сложное поведение.

Между тем, ***OC***-модели использовались профессиональными математиками и любителями не только для изобретения многочисленных игр, не менее пристально их изучали как приемлемый математический аппарат для научных целей. Благодаря их сетевой организации и способности работать с большими количествами дискретных переменных такие математические структуры были признаны в качестве весьма эффективной альтернативы дифференциальным уравнениям при симуляции различного рода сложных динамических систем.

<u>OC-модели в образовании</u>. К сказанному непосредственно примыкает и вопрос по применению ***OC***-концепции в образовательных целях. ***OC***-модели успешно могут быть использованы также в образовании, стимулируя развитие навыков моделирования и освоения новых технологий. Ряд компьютерных игр *базируются* именно на понятии ***OC***-моделей и студенты находят их довольно привлекательными. Концепции, применяемые при создании *подобных* игр, могут использоваться для моделирования математических, научных и социальных объектов и явлений. Надлежащее использование привлекательности подобных игр поможет способствовать мотивации интересов студентов в изучении важных проблем. Исследование подходов к обучению – важный аспект в преподавании любой темы. Важным подходом является визуализация, которая для целого ряда студентов является основным способом усвоения, тогда как для других является очень хорошим подспорьем закрепления изучаемого материала. И в этом контексте ***OC***-модели – естественный способ визуализировать процессы и явления в их динамике и вручную на бумаге, и средствами компьютера. Студенты должны получить навыки моделирования, ибо все современные науки и технологии используют компьютерные модели для экспериментирования.

Применение компьютерных моделей для проведения различного рода научных экспериментов должно стимулироваться с первых шагов студенческой практики как один из наиболее важных и эффективных способов научного исследования. И в данном отношении ***OC***-модели – вполне естественный подход к преподаванию *навыков* моделирования, т.к. они включают в себя и время, и пространство. Преподавание ***OC***-*концепции* хорошо прививает студентам практический смысл компьютеров и уверенность в решении проблем с их использованием. В частности, обусловлено это весьма тесными связями между ***OC***-моделями и компьютером. Многие модели компьютеров в той либо иной степени базируются на ***OC***-моделях, а одна из самых быстрых вычислительных систем с массовым параллелизмом – *Connection Machine* – непосредственно базируется на модели из ***OC***-концепции. ***OC***-модели побуждают студентов думать творчески и в том отношении, что огромные возможности компьютера совсем не освобождают их от собственного творчества при решении проблем**.** В то же самое время использование ***ОС***-моделей как *метафоры* с пониманием их возможностей наряду с ограничениями может послужить хорошим *эвристическим* средством, стимулирующим логическое и творческое мышление, направленное на процесс познания очень сложных объектов. Как показывает опыт использования в обучении подобных моделей сложных взаимодействий, студенты довольно легко воспринимают принципы их функционирования и с немалым интересом обсуждают связи между моделями, возможными метафорами и реальными ситуациями познания, обучения и образования, *включающими* помощь и противодействие. При этом, имеются обнадеживающие результаты по разработке математической модели глобальной системы образования, базирующейся именно на ***ОС***-модели. Имеется и ряд успешных попыток симулирования возрастной динамики в высшей школе ***РФ*** на основе ***ОС***-подобных моделей**,** в частности**,** применение данного типа моделей для решения вопросов симулирования динамики профессорско-преподавательского состава высшей школы ***РФ*** [536].

Знакомство с указанными идеями в процессе компьютерного обучения позволит даже на уровне школьников прикоснуться к «*краевым*» проблемам компьютерного моделирования **–** если любой физический процесс можно представить в форме вычислительного процесса, то и в ***ОС***-моделях соответствие между «*физикой*» и «*вычислениями*» максимально велико. Поэтому даже школьный учитель получает блестящую возможность использовать *компьютерное* моделирование не просто в качестве иллюстрации действия естественнонаучных законов, но в качестве инструментария**,** позволяющего по-настоящему понять уже на школьных уроках фундаментальные идеи теории алгоритмов и служить хорошим введением в элементы компьютерного моделирования на базе достаточно прозрачных ***ОС***-моделей**.** На сегодня имеется уже немалый отечественный опыт по ознакомлению школьников с машинами Тьюринга и Поста, правда, в основном это относится к школам с углубленным изучением математики и информатики. В действительности, материал, который знакомит учащихся с фундаментальными основами информатики и вычислительной техники, должен присутствовать в школьном курсе информатики, имеющим фундаментальную направленность и предназначенным для *более* осознанного овладения данными дисциплинами. В этот же материал следует включать и базовые сведения по ***ОС*****,** как новой перспективной среде математического и физического моделирования, а также формальным моделям параллельных вычислений и перспективных параллельных архитектур вычислительной техники. Доступность для школьников **(***пусть даже и специализированных школ***)** данного материала вполне сопоставима с доступностью вышеупомянутых формальных моделей *универсальных* вычислителей**,** лежащих в основе современной теории алгоритмов и вычислений.

Открытие в университетах ряда новых специальностей, в частности, «*Химия***,** *физика и механика материалов*» ***(РФ)*** делает довольно актуальным вопрос о подготовке учеников средней школы к продолжению учебы на *принципиально* новом образовательном направлении фундаментального материаловедения**.** В связи с открытием данных специальностей становится важной разработка программных модулей, которые давали бы возможность школьникам найти пути к осознанию междисциплинарных проблем на стыках химии, физики, математики, биологии. Для решения поставленной задачи в школьном курсе весьма целесообразно было бы использовать и теорию ***ОС***-моделей, просто реализуемых на компьютере. С помощью такого аппарата можно наглядно совмещать в пространстве и во времени законы физики, химии, биологии, геометрии [536]. Курс математического и компьютерного моделирования представляет прекрасное поле активности для применения и закрепления теоретических дисциплин и ***ОС***-модели здесь все интенсивнее используются в этом курсе. С психологической точки зрения простота ***ОС***-среды, сочетающаяся с мощными средствами представления сложных алгоритмов**,** позволяет предположить**,** активное взаимодействие школьников с такой средой будет только способствовать развитию новых типов *алгоритмического* мышления**,** *реально* отражающего мир современных алгоритмов**,** который резко отличен от старых представлений об универсальном характере последовательной обработки и выполнения команд. К сожалению, сегодня в школьной практике (*да и не только*), господствуют именно традиционные представления. Между тем, *впервые* в отечественной учебной литературе для университетов в курс информатики, рекомендованный министерством образования ***РФ***, в качестве формальных моделей вычислителей наряду с машинами *Тьюринга* (*как основной моделью последовательных вычислений*) нами были представлены классические ***ОС*** как *формальные* модели параллельных вычислений [94-96,536]. В целом ряде российских университетов для соискателей степеней магистра и доктора уже читаются специальные курсы по эволюционной кибернетике, программированию, синергетике и ряду другим с включением *базовых* сведений по однородным структурам и их прикладным аспектам.

Разработанная еще в ***1994 г.*** рабочей группой ***IFIP*** под эгидой ***ЮНЕСКО*** межправительственная *модульная* программа обучения по информатике и компьютерным наукам включила в перечень рекомендуемых дисциплин для уровня *высшего* образования изучение проблематики клеточных автоматов (***ОС****-моделей*). Начиная с ***2006 г.***, в программу физического факультета университета Санкт-Петербурга по дисциплине «*Магнитосфера*» была включена тематика по использованию ***ОС***-моделей для задач симулирования сложных геофизических процессов. Более того, учитывая *современные* тенденции в области математического и компьютерного моделирования целый ряд специалистов полагает вполне целесообразным включить в учебные программы магистрантов и аспирантов по специальности *логистика* и *менеджмент* такую специальную тему как «*Клеточные автоматы* (*Однородные структуры*)». В целом же, все большее число университетов ***РФ*** включают данную тему в учебные программы дисциплин, связанных с математическим моделированием, программированием и динамическими системами. При этом, в средней школе для знакомства школьников с физико-химико-геометрическими *основами перколяции* также в целом ряде случаев используются «*Клеточные автоматы*». При этом, имеется немало довольно интересных докладов школьников на различных школьных конференциях по тематике клеточных автоматов [536].

ОС-модели и музыка. Достаточно интересными представляются нам попытки применения ***ОС***-моделей для создания различного рода музыкальных композиций. Для этих приложений такой тип моделей привлекает интерес именно из-за принципов их организации. Действительно, так как ***ОС***-модели генерируют огромное количество самых разнообразных конфигураций и при предположении, что музыкальную композицию можно представить себе как базирующуюся на истории конфигурации и формальной манипуляции ее параметрами, не вызывает удивления тот факт, что исследователи начали осознавать, что ***ОС***-модели могут быть использованы и для генерации различного рода музыкальных эффектов.

При этом, наибольший интерес представляют ***ОС***-модели, динамика которых характеризуется циклическим поведением, самоорганизацией или свойствами распространения конфигураций. Интересное обсуждение важности данных свойств для музыкальных приложений можно найти в [537]. Например, ***Э. Миранда*** для исследования синтеза звуков на *основе* ***ОС***-моделей применил методику т.н. «*гранулированного синтеза*» [538]. Сущность ее сводится к очень быстрой генерации последовательности достаточно коротких звуковых импульсов, названных «*гранулами*», которые совокупно формируют большие звуковые эффекты. Такая методика несколько напоминает нам методику анимации, используемую, например, в кино либо мильтипликации. На основе одной ***ОС***-модели был создан специальный генератор гранул (*Chaosynth*), посредством которого любая гранула представляется некоторой h конфигурацией ***ОС***-модели. В данном случае глобальная функция S перехода модели определяет историю звуковых гранул, точнее динамику генерации конфигураций $h^{t+1}=S(h^t)$. Фирма *NyrSound* выпустила также *программный* синтезатор *Chaosynth*, предназначенный для создания и воспроизведения отдельных звуков, его можно использовать и в качестве управляемого по *MIDI* монофонического синтезатора. В программе применяется ***ОС***-

технология и *гранулярный* синтез. При этом, использование в программе ***ОС***-моделей в качестве управляющего элемента позволяет добиться более точного и разнообразного звучания, чем при традиционном гранулярном синтезе [536].

После целого ряда экспериментов с генератором *Chaosynth* была выбрана *специальная* модель ***ОС***, названная *ChaOs* (*сокращение от* ***Ch****emical* ***Os****cillator*) и используемая для *симулирования* поведения типа каталитической реакции, известной как реакция *Белоусова-Жаботинского*. В этом случае ***ОС*** позволяет симулировать метод *порождения* наиболее естественных звуков, которые производятся акустическими приборами: она иллюстрирует тенденцию сходиться от *широкого* распределения их частичных тонов к формированию колебательных структур. *ChaOs* можно представить себе в виде матрицы ячеек, содержащих идентичные простые электронные схемы, поведение которых можно сравнивать с поведением искусственного нейрона или перцептрона.

Для выявления ***ОС***-моделей, генерирующих *последовательности* конфигураций, которые могли бы быть использованы для симулирования распространения различных *музыкальных* эффектов, были проведены многочисленные эксперименты. В результате эти эксперименты завершились созданием системы, названной *CAMUS* (*сокращение от* ***C****ellular* ***A****utomata* ***MUS****ic*). Система *CAMUS* использует два типа ***ОС***-моделей, а именно: классическую игру «*Life*» и *Demon Cyclic Space* [539]. В общих словах, ***CAMUS*** – система композиции, использующая *динамические* свойства ***ОС***-моделей для генерации разнообразных музыкальных форм.

На наш взгляд, *Chaosynth* и *CAMUS* можно рассматривать в качестве успешных социологических исследований, и хороших отправных точек для дальнейшего экспериментирования. Возможно, на следующем шаге можно попытаться интегрировать оба типа этих систем, чтобы исследовать имеющиеся соотношения между абстрактными музыкальными формами и микроорганизацией их содержания (*в данном случае синтезированных звуков*) в рамках контекста классических моделей ***ОС***. В настоящее время *Chaosynth* поддерживает платформы *Windows* и *Macintosh*, и поставляется фирмой *NyrSound*, тогда как *CAMUS* – *свободно* распространяемая система, располагающая *двумя* версиями, одна из которых базируется на ***3***-мерной ***ОС***-модели. Обе версии системы возможно найти на ***CD*** к [537]. Так, для более детального ознакомления с исследованиями и конкретными разработками по использованию ***ОС***-моделей для музыкального творчества можно обратиться к [536]. Среди конкретных реализаций в этом направлении следует отметить также автомат *Монка* (*Automatous Monk*) ***П. Рейнерса***, представляющий собой программную реализацию одной модели ***1-ОС*** для генерации музыкальных композиций, правда, довольно далеких от совершенства. При этом, результирующая музыка может выполняться и сохраняться в *MIDI*-файлах.

Алгоритмическая музыкальная композиция – применение четкого алгоритма к процессу создания музыки. ***ОС***-модели представляют именно тот тип математических структур, сложная динамика которых представляет особый интерес с точки зрения *алгоритмической музыкальной* композиции. С другой стороны, компьютеры идеальны для вычисления динамики ***ОС***-моделей и ее удобного графического отображения. Такая динамика может быть также отображена в *звуковые* эффекты. Однако, методы обнаружения отображений динамики ***ОС***-моделей в приятную и интересную музыку – весьма и весьма *непростая* проблема. В ряде работ представлено несколько интересных методов для реализации музыкальной композиции на основе некоторых ***ОС***-моделей на языке *Java* и исследуются конкретные ***ОС***-отображения, приводящие к наиболее хорошим результатам [536]. Имеются достаточно интересные примеры, иллюстрирующие как потенции ***ОС***-моделей для генерации нетривиальных музыкальных композиций, так и для более лучшего понимания структурной динамики ***ОС***-моделей, используя *акустическую* модальность. Развиваемая сегодня *алгоритмическая* музыка использует не только ***ОС***-модели, но также фракталы. Например, такие известные программы для генерации музыкальных композиций, как ***FractMus*** и ***MusicGenerator*** используют для целей генерации алгоритмической музыки именно фракталы [536].

Однако не только в таком виде искусства, как музыка ***ОС***-модели оказались весьма интересным инструментом для создания музыкальных композиций (*правда, пока еще не столь совершенных*), но исследования их динамики наряду со свойствами фракталов неожиданно привело к появлению нового направления в изобразительном искусстве – сложность и естественность генерируемых ***ОС***-моделями конфигураций состояний их элементарных автоматов оказались необыкновенно эстетически привлекательными, что позволяет надеяться на их вполне успешном применении и в изобразительном искусстве [536].

<u>Некоторые другие приложения ОС-моделей</u>. Ниже кратко отмечены вопросы приложений ***ОС***-моделей, которые не нашли отражения выше либо на них не делалось специального акцента. В частности, хороший анализ приложений ***ОС***-моделей (*как конечных, так и бесконечных*) к задачам распределенного интеллекта, криптографии, а также *взаимодействующих* биопопуляций можно обнаружить в монографии [161]. Здесь рассматриваются как вопросы погружения упомянутых задач в ***ОС***-модели, так и достаточно интересные концептуальные соображения и обсуждения. Одни из первых работ по геометрическим фигурам восходят к ***Г. Вороному***, который определил один класс дискретных диаграмм, ныне именуемых дискретными *диаграммами* ***Вороного***. Такие диаграммы довольно неплохо отвечают концепции ***ОС***-моделей, включая группу классических однородных структур.

Интересные прикладные аспекты ***ТОС***-проблематики возникают в связи с общими вопросами и искусственного интеллекта; структурной теорией газа; теорией информации и статистической физики; задачами, возникающими в моделировании микроскопических физических процессов, и сложной макроскопической динамики (*прежде всего, в связи с теорией турбулентности*); с рядом задач фрактальной теории и теории хаоса, дискретной синергетикой и другими, а также в связи с проектированием *ЭВМ* специального назначения [5,9,117-119,123-126,128,129,131,133,149,175,182, 183,192,309,328,345,348,353,371-376,377-379]. В целом ряде случаев данные задачи пересекаются и с вышерассмотренными вопросами.

Ряд классов однородных структур может использоваться в качестве основы для исследования и моделирования концептуальных феноменов пространственно-распределенных динамических систем, включая гипотетические *Вселенные*. Так, например, однородные структуры на разбиении ***(ОСнР)*** уже на аксиоматическом уровне обладают такими фундаментальными свойствами, как *однородность, локальность, синхронность*, тогда как на *программном* уровне свойством *обратимости динамики* погружаемых в них различного рода моделей, из которых именно физические модели представляют наибольший гносеологический интерес. Данное обстоятельство создает не только хорошие предпосылки для использования ***ОСнР***-среды как основы *концептуальных* физических моделей (*прежде всего, на микроскопическом уровне*), но также позволяет и достаточно эффективно моделировать динамику пространственно-распределенных систем в целом, развивающихся как в пространстве, так и во времени. В рамках такой проблематики вполне определенный интерес представляют и ***ОС***-модели гипотетических *Вселенных*, а также и целого ряда экстраординарных явлений. Между тем, к большому сожалению, недостаточно профессиональная и продуманная популяризация ***ОС***-концепции имеет и довольно негативную сторону, когда, в частности, уже в художественных произведениях в ее контексте рисуют картины строения *Вселенной*. Между тем, различные спекуляции относительно аналогий процессов, феноменов и явлений, наблюдаемых во *Вселенной*, да и в других проявлениях *внешнего* мира, с *динамическими* свойствами ***ОС***-моделей могут нанести непоправимый вред самой ***ОС***-концепции, прежде всего [9,88,90,536,567].

В частности, на основе ***ОСнР***-концепции нами рассматривался ряд весьма интересных моделей как некоторых феноменов пространственно-распределенных динамических систем, так и ряда гипотетических *Вселенных* [90]. При этом, был получен целый ряд довольно интересных моделей развития, определяющие характеристики которых оказались инвариантными по отношению к направлению временной шкалы, а точнее, не меняющиеся при замене прямого хода времени на обратный, и ряд других. Ряд достаточно интересных моделей пространственно-распределенных динамических систем исследовался и на основе *асинхронных* структур значительно более общего вида [5]. Подобные модели и их интерпретации представляют вполне определенный интерес в контексте современных нетрадиционных концепций истории нашей *Вселенной*, а также и целого ряда экстраординарных феноменов и явлений.

Из более прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики можно отметить использование концепции ***ОС*** и ряда ***ОС***-моделей для решения и исследования задач сетевого планирования; в частности, имеется ряд интересных работ по созданию проблемной среды, базирующейся на ***ОС***-подходе, для решения оптимизационных задач типа коммивояжера и календарного планирования [536]. Интересные работы по использованию ***ОС***-моделей в задачах надежности и *самовосстановления* многокомпонентных сложных дискретных *динамических* систем технического назначения можно найти в [5,55,90,181,192,184,187,190,191,276,536]. Так, в частности, показано, что в классе не строго локализованных ***ОС***-моделей некоторые непрерывно самовоспроизводящиеся автоматы могут быть и самовосстанавливающимися. Недетерминированные ***ОС***-модели представляют довольно значительный интерес для исследования вопросов надежности и самовосстановления сложных динамических клеточных систем.

Автоматизация производственных процессов по созданию новых материалов достаточно часто сводится к решению обратных задач, необходимых для формирования основных параметров в технологии. По причине *нелинейности* такого типа задачи решаются, главным образом, в рамках планирования экспериментов, базирующихся на *статистических* методах. Некоторые авторы в качестве основы для проведения таких экспериментов предлагают использовать компьютерные подходы, базирующиеся на т.н. «*подвижных*» ***ОС***-моделях. В этом же самом русле лежат и работы по созданию новых *антифрикционных* материалов для подшипников скольжения, которые также базируются на специальных компьютерных ***ОС***-моделях [536].

Большинство современных моделей муравьиных сообществ и других социальных насекомых не достаточно строги. Между тем, ***ОС***-модели, начиная с правил поведения, связаны, прежде всего, с движущимися элементами, а не с их местоположением в пространстве. Однако имеется немало важных вопросов, которые одинаково хорошо применимы к указанным социальным моделям и к ***ОС***-моделям. В частности, как простые локальные правила обеспечивают сложное глобальное поведение? Из других достаточно интересных биологически-ориентированных можно отметить ***ОС***-модели морских раковин. Предложенные ***ОС***-модели вселяют определенный оптимизм и в такой прикладной области [536].

Наконец, наименее практическим в *ближайшее* время, но наиболее перспективным в отдаленном будущем, может оказаться использование ***ОС***-моделей также и в космонавтике при организации межзвездных полетов. В частности, например, в ***1984 Р. Форвард*** привнес в эту идею достижения компьютерной техники, базирующейся на вычислительных ***ОС***-моделях. В результате появился на свет проект межзвездного космического аппарата «*Старуисп*». Аппарат весьма мало похож на современные в нашем понимании космические корабли и представляет собой парус, имеющий размер по диаметру в ***1*** км. и весящий порядка ***20 г.*** Сам парус соткан из тончайшей проволоки в виде сетки из шестиугольных ячеек, в ***10*** триллионах пересечений которых расположены копии микроэлектронной схемы (*сверхмикропроцессоры*), образующие в целом сверхмощный компьютер высокопараллельного действия, т.е. типичную вычислительную ***ОС***-модель. Каждая *микросхема* чувствительна к свету и может работать как крошечная телекамера. Двигаться такой ***парус*** будет под действием *космического* ветра, порождаемого искусственным мазером, который находится на околоземной орбите. Естественно, что осуществление подобного проекта настолько грандиозно и сложно во всех отношениях, что его техническая *реализация* вряд ли представляется возможной ранее **2050 г.** Из более прозаических в этой области можно отметить исследования (*проводимые в Российской Академии Космонавтики*) по использованию стохастических ***ОС***-моделей для анализа *повреждающих* воздействий на космический аппарат факторов *внешней* среды. Проблема атомно-молекулярного взаимодействия и статистического моделирования процесса изменений физико-химических свойств материалов при длительном пребывании их в космическом пространстве становится все более актуальной в связи с перспективами создания Лунной базы, околоземных станций различного назначения, а также при проведении длительных пилотируемых полетов, в частности, к Марсу. Данные приложения ***ОС***–моделей мотивируются исследованиями в области физико-химических свойств материалов при их длительном пребывании в космосе.

Завершая на этом обсуждение прикладных аспектов ***ТОС***-проблематики, следует отметить, что вне его рамок остался еще целый ряд достаточно интересных прикладных тем (*перечень которых постоянно растет*), представляющих и самостоятельный интерес. Поэтому заинтересованному читателю рекомендуется постоянно отслеживать развитие данного направления проблематики ***ТОС*** в соответствующих публикациях как в традиционных, так и в электронных изданиях. При этом, хотелось бы подчеркнуть, что, по нашему глубокому убеждению, *классические*, *полигенные*, *недетерминированные* и *стохастические* ***ОС***-модели, наряду с их различными модификациями и обобщениями могут быть эффективно использованы и во многих других областях, но одной из наиболее интересных и перспективных областей приложений здесь представляется применение ***ОС***-подхода как *новой* перспективной *среды* моделирования различного рода явлений, объектов, процессов и феноменов, из которых физические и биологические приложения представляются нам наиболее интересными [5,90,392,536]. И поэтому прикладному аспекту ***ТОС***-проблематики следует уделять самое пристальное внимание, не упуская также из вида и сугубо теоретические исследования ***ОС***-моделей в качестве важного самостоятельного математического объекта.

Будучи прекрасной средой симулирования широкого круга процессов, явлений и феноменов в различных областях (*физика*, *биология*, *химия*, *вычислительные науки и др.*), ***ОС***-модели, между тем, обладают свойством *универсальной* вычислимости и на их основе создан и проектируется целый ряд реальных вычислительных систем *параллельной* архитектуры. Сама концепция ***ОС***-моделей (*прежде всего*, *классических*) довольно проста и доступна для восприятия даже неподготовленному в ***ОС***-проблематике человеку. Классическая ***ОС***-модель, представляя собой весьма простой для восприятия компьютер высокопараллельного образа действия, на низшем уровне располагает достаточно простым языком программирования, который базируется на системах параллельных подстановок следующего простого вида, а именно:

$$\sigma^{(n)}: x_1x_2x_3 \dots x_n \Rightarrow x_1^* \qquad (x_1^*, x_j \in A;\ j = 1 \,..\, n)$$

определяющих локальные функции перехода в ***ОС***-моделях. При этом, конкретная реализация ***ОС***-модели может быть представлена как на бумаге (*делая*, *при этом*, *использование компьютера и процесса программирования вовсе необязательным*), так и посредством погружения ее в некоторую программную среду (*Basic*, *Pascal*, *C++*, *Fortran и др.*). Во *втором* случае можно работать с довольно *сложными* ***ОС***-моделями при относительно небольших навыках программирования. Между тем, использование ***ОС***-моделей способствует развитию достаточно полезных навыков в следующих основных направлениях, а именно:

(1) ознакомление с основами перспективной среды моделирования, сама суть которой довольно прозрачна и для многих приложений достаточно наглядно интерпретируема;

(2) получение навыков программирования на высокопараллельном языке подстановок; в случае использования ОС-моделей типов, отличных от классических, можно оперировать и с другими последовательно-параллельными языками программирования;

(3) в определенной мере привитие навыков параллельного образа мышления.

Простота ***ОС***-концепции позволяет творчески использовать ее со студентами как университетов, так и колледжей, и даже средних школ и гимназий, в увлекательной игровой форме приобщая к такой достаточно перспективной во многих отношениях проблематике. С примерами данного подхода можно ознакомиться в работах [408,425,426]. В частности, статья [426] очень убедительно мотивирует целесообразность включения ознакомления с ***ОС***-концепцией (*понятием клеточных автоматов*) в учебные программы. Приводятся довольно интересные примеры и рекомендации к типовым упражнениям; более того, каждый пример соотносится с соответствующей учебной дисциплиной, дается источник или мотивация примера, а также желаемый *уровень* подготовки – средняя школа либо колледж. На наш взгляд, ознакомление с ***ОС***-концепцией представляется полезным для студентов университетов, прежде всего имеющих дело с задачами моделирования физических процессов, явлений, объектов и феноменов. ***ОС***-аппарат – *превосходный* инструмент моделирования и в этом качестве он представляет интерес и для многих других специальностей.

Следует отметить, что ***ОС***-концепция является в определенном смысле уникальным явлением – с одной стороны, она является *основой* для формального моделирования целого ряда процессов, феноменов и объектов в достаточно широком спектре областей, а с другой стороны она имеет эквивалентные технические реализации, в частности, в виде ***ML***-сопроцессоров ***Легенди***, ***САМ***-машин ***Тоффоли***, клеточных процессоров, однородных вычислительных сред, систолических структур, сетей транспьютеров и др., что делает ее весьма привлекательной как в теоретических, так и прикладных исследованиях во многих областях, с полным основанием возводя ее на новый ***междисциплинарный*** научный уровень.

При этом следует отметить, что к тематике ***ОС***-моделей различных типов и классов достаточно тесно примыкают и т.н. решеточные системы, которые возникают не только при исследованиях распределенных сред, но также и при описании процессов, происходящих в системах, имеющих *существенно* дискретную структуру как в пространстве, так и во времени. К такого типа моделям *непосредственно* приводит целый ряд задач теории синхронизации радиогенераторов, биологии, био-медицины, исследования поведения клеточных автоматов, нейронных сетей и другие [536].

На базе ***решеточных систем*** – систем с *дискретной* пространственной и временной структурой – сегодня исследуется большое число практически важных задач, а именно: цифровая обработка изображений и цифровая голография, задачи цифровых телевидения и телефонии, построение каскадных кодов, обработка метеоданных и геофизической информации, получаемой с системы датчиков либо спутников, обобщенный спектральный анализ сигналов на конечных интервалах и связанные с ними задачи синтеза дискретных устройств, и др. Понятие ***решеточной системы*** полностью включает в себя, в частности, понятие разностных схем, применяемых при решении задач математической физики методом сеток. Рассмотрение теории систем и сигналов на основе теории решеточных систем практически важно, позволяя решать задачи выбора оптимального представления сигналов и систем с учетом состава цифрового оборудования, предназначенного для обработки, хранения и передачи информации, что, в свою очередь, обеспечивает экономию объема этого оборудования и количества вычислительных операций при обработке сигналов. В частности, отказ от линейности, периодических граничных условий и ограничение состояний в каждом узле решеточной системы в результате приводит к понятию **ОС**–*модели* и соответственно к задачам самовоспроизведения автоматов, тогда как задание в каждом узле системы некоторого информационного множества и наделения его структурой алгоритмической алгебры приводит к понятию однородной вычислительной системы, также базирующейся на ***ОС***–модели [536,613].

Вполне уместно здесь вкратце упомянуть о приложениях *конечных* ***ОС***-моделей, одной из самых важных областей которых, пожалуй, является проектирование и производство ***VLSI (СБИС).*** При этом, возможно, что наиболее успешным применением ***ОС***-моделей для ***VLSI***-технологии будет генерация псевдослучайных числовых последовательностей и их использование в подсистемах встроенного самоконтроля. Из других довольно перспективных приложений конечных моделей

ОС можно отметить коды с исправлением ошибок, криптосистемы, разработка ассоциативной памяти, графика и тестирование конечных автоматов. На сегодня в ***VLSI*** наиболее применимы бинарные ***1-ОС***, имеются достаточно интересные примеры применения ***2-ОС*** и гибридных ***ОС***-моделей. При этом, как с прикладной, так и с теоретической тематикой относительно конечных ***ОС***-моделей достаточно детально можно ознакомиться в целом ряде интересных публикаций, представленных в библиографии [536].

В представленных выше прикладных аспектах ***ТОС***-проблематики в значительной степени был сделан акцент именно на отечественных работах, объем и широта охвата *проблематики* которых, к сожалению, пока достаточно существенно уступают зарубежным исследованиям. Однако, это относится, прежде всего, именно к прикладным аспектам, тогда как в теоретическом отношении рядом отечественных исследователей получено немало результатов *фундаментального* характера, внесших достаточно существенных вклад в теоретическую составляющую ***ТОС***-проблематики. Целый ряд из них отмечен в настоящей монографии, тогда как с другими можно ознакомиться в цитируемой литературе и в обширной библиографии [536].

В заключение необходимо отметить, большое разнообразие моделей на основе ***ОС***-концепции может быть найдено в библиографии [536], а их разноплановость характеризуется уже простым и неполным перечислением таких разделов как: физика, математика, теория хаоса, нейронные сети, гидродинамика, *статистическая* физика, химия, биология, экология, материаловедение, промышленная технология, иммунология, эпидемиология, логистика, сейсмология, хранение и поиск информации, порошковая металлургия, вулканология, сельское хозяйство, социология, криптография, кристалография, программирование (*с включением генетического и параллельного*), вычислительная техника и многие другие. В частности, интересная работа [515] была посвящена вопросам симулирования инновативных процессов посредством стохастических ***ОС***-моделей. В свою очередь, представленные в библиографии [536] оригинальные источники содержат целый ряд других весьма интересных *ссылок* по ***ОС***-тематике и связанным с ней прикладным аспектам. И, наконец, задачей данного достаточно поверхностного обзора по прикладным направлениям ***ТОС***-проблематики было не столько охватить все разнообразие этого прикладного направления (*с которым можно хорошо ознакомиться в англоязычном интернете, например, через поисковик Google*), *сколько* в определенной мере представить тот спектр областей, в которых все шире применяются концепция, методология и собственно сами ***ОС***-*модели* различных типов и классов. В то же самое время следует четко представлять, классические ***ОС***-модели, рассмотренные в настоящей книге, являются всего лишь неким формальным математическим объектом (*абстрактным бесконечным автоматом со специфической внутренней организацией, также параллельной дискретной динамической системой*), исследование которого (*подобно другим математическим объектам*) представляет очень существенный познавательный интерес. С другой стороны, имеющиеся попытки *интерпретации* определенных динамических свойств объекта данного класса с точки зрения проецирования их на реальные естественные процессы и явления, тем паче попытки получения на их базе далеко идущих и глубоких научных заключений, прогнозов, обобщений, в подавляющем большинстве случаев носят в той либо иной мере надуманный, тенденциозный и спекулятивный характер. Между тем, ***ОС***-модели и, прежде всего, отличные от классических структур, во многих случаях представляют собой прекрасную среду симулирования и исследования процессов и явлений во многих областях, чему на сегодня имеется масса примеров. Однако и концепция классических ***ОС***-моделей помимо их самодостаточности как математического объекта может очень успешно использоваться в качестве неких формальных прототипов реальных объектов [536].

Заключение

В предложенной монографии как на содержательном уровне, так и в форме достаточно строгих матетематических формулировок и доказательств представлен целый ряд наших результатов по основным разделам математической теории однородных структур *(ТОС)*, полученных нами как ранее, так и обобщенные, уточненные и совершенно *новые* результаты. Полностью не охватывая всей обширной проблематики этой области современной математической кибернетики, между тем, представленные результаты лежат в русле основных современных направлений, составляя существенную часть современного состояния исследований в этом направлении. При этом, для более полного ознакомления с современным состоянием ***ТОС***-проблематики приводится весьма обширная библиография, в свою очередь, содержащая ссылки на многочисленные публикации в данном направлении. При этом, *содержательный* уровень изложения, который иллюстрируется примерами и отдельными доказательствами, дает возможность использовать монографию очень широким кругом читателей из самых разнообразных сфер *потенциального* применения методов, результатов и концепции ***ТОС***-проблематики. Представит она вполне определенный интерес и для студентов, магистрантов и докторантов соответствующих специальностей университетов и вузов иного уровня (*прежде всего, естественно научных*), а также преподавателей по курсам теории автоматов, математики, кибернетики, информатики, теоретической биологии, *математическому* и *физическому* моделированию, вычислительной техники и целому ряду других.

Однородные структуры (ОС) являются наглядным примером порождения достаточно сложных объектов и их динамики на основе весьма простых исходных элементов и предпосылок. В таком смысле *однородные структуры* лучше отвечают математическим моделям, используемым в более абстрактных областях теоретической физики, математической биологии развития и дискретной синергетики, чем более практическим моделям вычислительных наук, которые базируются на современной микроэлектронной технологии. Хотя с дальнейшим развитием технологий (*прежде всего, нанотехнологий*) в данной области они, пожалуй, и смогут играть все более растущую роль и в качестве формальных моделей и прототипов высокопараллельной обработки информации. Данный вопрос рассматривался и выше в связи с проблемами создания техники, базирующейся на *обратимых* вычислениях, как одном из направлений прогресса в создании новых поколений высокоэффективной вычислительной техники. Следовательно, ***ОС*** – более чем очень полезные абстракции, ибо они обладают рядом фундаментальных свойств, которые могут привести нас к созданию на основе обратимых вычислительных ***ОС***-моделей новых перспективных архитектур высокопроизводительных компьютерных систем и управляющих блоков систем искусственного интеллекта будущих поколений, а также сыграть и роль перспективной модельной среды для самого широкого круга приложений, выводя ***ТОС***-проблематику на новый ***междисциплинарный*** уровень. Несколько слов об используемой терминологии. На сегодня проблематика клеточных автоматов (*Cellular Automata* – ***CA***) достаточно хорошо развита, являясь вполне самостоятельной областью современной математической кибернетики, которая имеет достаточно существенную сферу заявлений. Вместе с тем, необходимо подчеркнуть, в *русскоязычной* терминологии (*основы которой впервые были заложены нами*) для понятия «*клеточные автоматы*» был определен термин «*Однородные структуры*» (***ОС***; *Homogeneous structures* – ***HS***), ставший широко распространенным ныне [1,5]. Именно поэтому на протяжении настоящей монографии наряду с данным термином используется и его англоязычный эквивалент «*Клеточные автоматы*, *Cellular Automata* – ***CA***».

Прежде всего, ***ОС***-модели представляют собой однородную среду из взаимосвязанных *локальным* образом идентичных автоматов, функционирующих максимально синхронным образом. Таким образом, ***ОС***-аксиоматика обеспечивает такие три фундаментальные свойства как *однородность*, *локальность* и *параллелизм* функционирования. Если в данной модели мы будем ассоциировать с каждым единичным автоматом *отдельный микропроцессор*, то можно неограниченно увеличивать *размеры* такой вычислительной системы без сколь-нибудь существенного увеличения временных и конструктивных затрат, которые требуются для каждого нового расширения вычислительного пространства, а также без накладных расходов, связанных с координацией функционирования дополнительного количества элементарных микропроцессоров. Подобные вычислительные ***ОС***-модели допускают практические реализации из весьма большого числа довольно элементарных микропроцессоров, ограниченные не столько архитектурными, сколько сугубо экономическими и технологическими соображениями, которые и определяются современным уровнем развития микроэлектронной технологии, но также и с большими потенциями в будущем, прежде всего, в свете весьма интенсивных работ в области нанотехнологий [536].

Наконец, глобальное функционирование ***ОС***-моделей определяется сугубо *локальными* связями небольшого набора единичных автоматов. Вследствие ограничения скорости распространения информации локальность взаимосвязи простых единичных автоматов ***ОС***-модели может быть положена и в основу повышения ее быстродействия. В компьютерах *традиционной* архитектуры неймановского типа время выполнения отдельной команды ограничено длиной пути передачи сигнала, вследствие чего их быстродействие в значительной степени определяется их *размерами*. Тогда как в ***ОС***-моделях длина путей передачи сигналов существенно не зависит от их размеров, позволяя выполнять высокопараллельную обработку информации, позволяя создавать и весьма большие, и быстрые ***ОС***-подобные вычислительные системы одновременно. Однако требуемый чрезвычайно высокий уровень миниатюризации подобных вычислительных систем выдвигает и новые весьма сложные технологические проблемы, для решения которых требуется достаточно существенное продвижение и в целом ряде смежных физико-технических дисциплин. В данном направлении достаточно существенное влияние могут и должны оказать достижения в области биотехнологий и нанотехнологий. Тогда как вычислительные ***ОС***-модели, в свою очередь, с их возможностью поддерживать обратимые вычисления позволят решить проблемы, связанные и с тепловыми режимами сверх миниатюрных вычислительных систем. Этот их аспект в настоящее время исследуется достаточно интенсивно и теоретически, и практически [536].

Вышеперечисленные три черты (*высокие однородность, параллелизм и локальность взаимодействий*) обеспечиваются уже самой ***ОС***-аксиоматикой. Тогда как такое важное с *физической* точки зрения свойство, как *обратимость* динамики, задается программно. В свете перечисленных свойств уже классические ***ОС*** являются высоко абстрагированными моделями реального физического мира, функционирующими во времени и пространстве. Именно поэтому они лучше (*чем многие другие формальные архитектуры*) могут быть отображены на ряд физических реалий в их современном понимании. Более того, и сама ***ОС***-концепция весьма хорошо приспособлена для решения задач и моделирования из различных областей таких, как: математика, кибернетика, вычислительные науки, дискретная синергетика, теоретическая физика, теория динамических систем, биология развития, робототехника и др. Сказанное и имеющиеся на сегодня многочисленные примеры приводят нас к заключению о том, что ***ОС*** могут представлять довольно существенный интерес как в качестве новой перспективной среды моделирования и исследования многих дискретных процессов и феноменов, определяемых вышеуказанными свойствами (*возводя* ***ТОС***-*проблематику на новый междисциплинарный уровень*), так и в качестве достаточно интересного самостоятельного формального объекта исследований. И более того, впервые в мировой практике в учебниках по информатике, утвержденных Министерством образования РФ для университетов, представлена нами отдельная глава «*Общие формальные вычислительные модели*», в которой наряду с машинами Тьюринга как формальной моделью классических последовательных (*неймановских*) вычислений представлены и *однородные структуры* как формальная модель неклассических (***ненеймановских***) высокопараллельных вычислений и обработки информации, а также и перспективных моделей новых поколений вычислительных систем [94-96]. Более того, наряду с сугубо компьютерными мотивациями следует иметь ввиду один весьма важный модельный аспект ***TОС***-проблематики, обеспечивающий будущих исследователей перспективной и довольно легко программируемой средой моделирования в различных областях. Более того, и в процессе исследования различных, прежде всего, физических явлений и процессов, ***ОС***-модели смогут оказаться и весьма полезным средством и в учебном процессе. При этом, их простота и наглядность позволяют использовать ***ОС***-модели не только в учебном процессе университетского цикла, а и в различного рода курсах колледжей и даже специальных школ.

Следует отметить то немаловажное обстоятельство, что доступность ***ОС***-концепции позволяет ее весьма творчески использовать при работе со студентами как университетов, так и колледжей, а также с учащимися средних школ и гимназий, в увлекательной игровой форме приобщая к этой достаточно перспективной со многих точек зрения проблематике. На сегодня мы имеем немало примеров подобного характера, когда разнообразные ***ОС***–модели все чаще находят применение в учебных целях. Появляются интересные методические и методологические работы, довольно убедительно мотивирующие саму целесообразность ознакомления с ***ОС***–концепцией в учебном процессе. На наш взгляд, ознакомление с ***ОС***–концепцией представляется достаточно полезным для студентов университетов, прежде всего, имеющих дело с задачами *моделирования* различных физических процессов, явлений, объектов и феноменов. ***ОС***–среда – превосходный инструмент моделирования и в этом качестве она представляет интерес для многих других специальностей. Более того, использование ***ОС***–концепции в университетских циклах даст возможность довольно существенно расширить круг потенциальных исследователей в этой области из числа наиболее талантливых студентов, что, в свою очередь, непременно должно весьма положительно сказаться на прогрессе данного направления современной математической кибернетики в целом.

Следует отметить, что ***ОС***–концепция является в определенном смысле уникальным явлением – с одной стороны, базирующиеся на ее основе ***ОС***–модели представляют достаточно интересный для исследований самостоятельный математический ***объект***, ***ОС***–концепция является довольно эффективной ***средой*** формального симулирования целого ряда феноменов, процессов, объектов и явлений в достаточно широком спектре областей, тогда как с другой стороны она располагает эквивалентными техническими реализациями, в частности, в виде систолических структур, ***ML***–сопроцессоров Легенди, ***САМ***–машин Тоффоли, сетей транспьютеров, клеточных процессоров, итеративных и нейронных сетей, однородных вычислительных систем и сред, и т.д., что делает ее проработку весьма привлекательной как в теоретических, так и в прикладных исследованиях во многих областях, с полным основанием возводя ***ОС***–концепцию на новый *междисциплинарный* научный уровень, объединяющий подходы из различных научных и прикладных областей.

Еще на одном моменте следует остановиться отдельно. На сегодня в ***TОС***-проблематике, на наш взгляд, складывается ситуация, в определенной мере весьма схожая с положением дел и в целом ряде современных формальных теорий. Основная ее суть сводится к следующему. Зародившись на основе попыток получения формального аппарата для описания и моделирования процессов в биологии развития, ***ОС*** на ранней стадии своего становления использовались лишь для целей моделирования в довольно узком диапазоне областей. Наряду с этим, сама ***TОС***-проблематика получила существенное самостоятельное развитие в рамках теории абстрактных как конечных, так и бесконечных автоматов. И по целому ряду причин (*нами здесь не рассматриваемых*) и все ее *последующее* развитие стимулировалось, и в значительной степени продолжает стимулироваться, в основном, собственными интересами и источниками. Тогда как для целей моделирования ***ОС*** длительное время применялись эпизодически. И только в последние годы к ***ОС***-моделям возрос интерес в связи с работами целого ряда исследователей из различных областей, который следует всячески стимулировать. Это обстоятельство несомненно будет хорошо стимулировать и новые интересные проблемы *сугубо* теоретического характера. Поэтому на сегодня мы имеем не только постоянно растущий фронт приложений ***ОС***-моделей, но и расширение самого объекта за счет появления целого ряда новых типов и модификаций ***ОС***-моделей наряду с их теоретическими исследованиями. Имеющийся на сегодня опыт такого рода подтверждает вышесказанное [536].

Следовательно, вопросу популяризации ***ТОС*** и ее прикладных возможностей в разных областях следует уделять самое пристальное внимание. А этому, в первую очередь, будут способствовать новые успешные примеры применения концепции, результатов и методов ***ТОС***-проблематики в других областях. Таким образом, мы приходим к необходимости существенно более активного применения ***ОС***-концепции в самых различных областях науки и техники. И это действительно весьма важная, сложная и многоаспектная проблема, способствующая и дальнейшему развитию самой ***ТОС***. Однако, при этом не следует снисходить как до *утрированной* популяризации, так и до явно *спекулятивного* представления ***ОС***-концепции в качестве всемогущего средства познания окружающего нас весьма сложного мира, который было бы весьма наивно сводить к некоим ***ОС***-моделям. В противном случае серьезное научное сообщество вполне может весьма скептически отнестись к этому (*потенциально достаточно важному*) направлению современной кибернетики, что весьма пагубно скажется как на самой ***ТОС***-проблематике, так и на многих существующих и потенциальных ее приложениях [536].

В заключении еще раз отметим *одно* немаловажное обстоятельство, при обсуждении *классических однородных структур* мы акцентировали внимание на следующем весьма существенном моменте. Параллельные дискретные динамические системы, одними из которых и являются ***ОС***-модели, рассматривались нами именно как формальные *алгебраические* системы переработки конечных слов (*конфигураций*) в конечных алфавитах, не прибегая, как правило, к их микропрограммной среде, т.е. не используя на низшем уровне присущую им клеточную организацию, что отличает наш подход к исследованию данных объектов от подходов целого ряда других исследователей.

Как уже отмечалось, рассмотренные в настоящей монографии вопросы ***ТОС-проблематики*** во многом определялись собственными интересами и вкусами автора, а также самими традициями творческой активности ***ТТГ*** в данном направлении. Однако уже на основе представленных здесь результатов (*как теоретического, так и прикладного характера*) читатель вполне сможет получить достаточно полную картину современного состояния и проблематики математической теории классических ***ОС***-моделей и ее прикладных аспектов. Завершая изложение базовых элементов в ***ТОС***, следует отметить, сегодня ***ТОС***-проблематика находится в стадии довольно интенсивного развития и дальнейшая работа в данном направлении чрезвычайно желательна со многих точек зрения и, прежде всего, учитывая ***междисциплинарный*** характер общей ***ОС***-концепции.

Summary of the General Results

In what follows, we present our main results of the work we have done in mathematical theory of the ***classical homogeneous structures* (*HS;* *synonym Cellular Automata*)** during ***1968 – 2007.*** Indeed, we have done much more, in particular, in the fields of mathematics, statistics, software, cybernetics, computer science, technology and mathematical theory of homogeneous structures. Much of our investigations have been stimulated by scientific programs of *Tallinn Research Group* ***(TRG)*** and *International Academy of Noosphere* ***(IAN).*** Now, a *Cellular Automata* ***(CA)*** problems is the well enough developed independent field of the modern mathematical cybernetics which has considerable sphere of applications. Above all, it is necessary to emphasize, that in Russian terminology *(basics of which in monographs* [1] *were presented for the first time)* for the concept «*Cellular Automata* ***(CA)***» the most widespread synonym «*Homogeneous Structures* ***(HS)***» is used. Therefore, our term «*Homogeneous Structures*» ***(HS)*** is used most widely for the space of the given monograph.

Homogeneous Structure ***(HS) –*** a parallel information processing system consisting of *intercommunicating* identical finite automata. Although homogeneous structures will be used throughout this monograph as the usual term, it is necessary to keep in mind, that *cellular automata* ***(CA),*** iterative networks etc. are essentially synonyms. We can interpret ***HS*** as a theoretical framework of artificial parallel information processing systems. From the logical point of view the ***HS*** is an infinite automaton with characteristic internal structure. The ***HS*** theory can be considered as a structural and dynamical theory of the infinite automata. ***HS*** can serve as the excellent basis for modeling of many discrete processes and they present interesting enough independent objects for investigations as well. In recent years has arisen undoubted interest to the ***HS*** theory, and in this direction many remarkable results have been obtained. Much of this work has been activated by the growing interest in computer science and mathematical modelling. At present, the ***HS*** theory forms an original part of the modern mathematical cybernetics. Furthermore, for the first time, in world practice in text-books on informatics approved by Ministry of Education of Russia for universities we presented the chapter *(headed as 'General Formal Computing Models')* in which the Turing machines as a formal model of classical sequential computations, and cellular automata as a useful formal model of nonclassical high-parallel computations and information processing have been considered enough in detail [88,90,94-96].

HS (Cellular Automata) are suitable models for study and simulation of complex dynamical behaviors of systems with a great number of interacting components. The existence of many fields of applications *(specifically, computer science, biology, physics, mathematics, social sciences, and large quantity of other fields)* proves this relevance and interest. The possibility of simulation on modern parallel computers allows us to make easy numerical experiments, and the usage of classical tools in combinatorial theory, graph theory, and theory of discrete random processes lead to a great number of theoretical results.

From the theoretical point of view, ***Cellular Automata (CA)*** were introduced in the late ***1940's*** by ***John von Neumann*** at ***Stanislav Ulam's*** advice as formal models of self-reproducing organisms. In addition, the studied structures were mostly on ***1-*** and **2-**dimensional infinite lattices, though higher dimensions were also considered. Questions of computation universality along with other computation-theoretical questions were considered also. ***Neumann's CA-***model has received the further development in works of his immediate followers whose results together with *John von* ***Neumann's*** work were completed and published by ***A.W. Burks*** [1,124,128]. The further development and popularization of the ***CA*** problems can be connected with names of such researchers as ***V.Z. Aladjev, H. Yamada, S. Amoroso, E. Banks, J. Buttler, E. Codd, S. Cole, G. Hedlund, G. Herman, J. Holland, M. Kimura, Y. Kobuchi, A. Maruoka, E.F. Moore, J. Myhill, H. Nishio, T. Ostrand, A.R. Smith, T. Yaku, A. Waksman*** and a whole series of others whose works in the ***1960's – 1970's*** have drawn attention to the given problematics from the theoretical point of view and have solved, and formulated a whole series of interesting enough problems [1,5,536]. Later, mathematicians, physicists and biologists began to study cellular automata for the purposes of a modelling in their respective domains. Personally, we have familiarized oneself with the ***CA*** problems in ***1969*** due to Russian translation of the excellent proceedings edited by ***R. Bellman*** [5,123] containing well-known articles of ***E.F. Moore, S. Ulam*** and ***J. Myhill.*** From the more practical point of view and gaming simulation, a ***CA-***model was used approximately in the late ***1960's*** when ***John H. Conway*** has developed the now well-known game «***Life***»***.*** This game was made popular through ***Gardner's*** column in the journal ***Scientific American,*** and has drawn attention to the ***CA*** problems a numerous scientists from different fields as well as amateurs [239]. Design of a simple set of rules for study of macroscopic behavior of a population was as an original motivation of this game. The criterion for choosing these rules was based on the principle that the growth or decay of the population should not be rather easily predictable. Meantime, the «***Life***» is probably the most well-known cellular automaton**;** in addition, it possesses properties to self-reproduction as well as computational universality. Thus, universality was proved by ***John Conway,*** he showed that universal Turing machine is embedded in the game of «***Life***»***,*** i.e. behavior of Turing machine is simulated by space-time dynamics of the «***Life***» cellular automaton**.** Later, was presented a quite simple way to implement any Boolean function in patterns of the game of «***Life***» [536]. Hence, such rather simple cellular automaton appeared equivalent to the universal Turing machine. To this very interesting cellular automaton the interest does not vanish till now.

At present, ***CA*** are being studied from extremely widely different angles, and the relationship of these homogeneous structures to existing problems are being constantly sought and discovered. With a view of general acquaintance with an extensive the ***CA*** problems as a whole and with its separate directions is recommended to address to interesting and versatile reviews of such researchers as ***V.Z. Aladjev, V. Cimagalli, K. II Culik, D. Hiebeler, A. Lindenmayer, A.R. Smith, P. Sarkar, M. Mitchell, T. Toffoli, R. Vollmar, S. Wolfram*** et al. [536]. A series of books of such authors as ***V.Z. Aladjev, A. Adamatzky, E.F. Codd, M. Garzon, A. Ilachinski, P. Kendall, M. Duff, V. Kudrjvcev, N. Margolus, T. Toffoli, O. Martin, K. Preston Jr., M. Sipper, R. Vollmar, B. Voorhees, S. Wolfram,*** etc. which contain numerous historical digressions on ***CA*** problems, unfortunately, the uniform point of view on the given historical question is absent [1,5,536]. At last, the bibliography presented in [163,185,187,255,336,496,516-519,536], contains many very useful links to works in the field of ***CA*** and their numerous applied aspects.

Meanwhile, considering historical aspect of ***CA,*** we should not forget the contribution which works of ***Konrad Zuse*** have brought into the given problematics**,** and with which the scientific community has familiarized oneself enough late and frequently does not mention him in this historical context. ***K. Zuse*** not only has built the first programmable computers ***(1935-1941)*** and has devised the first higher-level programming language ***(1945),*** but also was the *first* who has introduced the idea of Rechnender Raum *(Calculating Space)* [126,188,423], in other words *- Cellular Automata* in modern terminology**.** Many years later similar ideas were also republished, popularized and extended in works of other authors such as ***E. Fredkin, S. Wolfram,*** etc. [536].

In a few words we shall dwell on the ***Wolfram's*** book «*A New Kind of Science*» [407], what is expedient in view of correct identification of a place of the ***CA*** problematic in structure of other fields of modern natural sciences. The above voluminous *(owing to numerous pictures)* and pretentious the book contains many results which were received much more earlier by other authors in the ***CA*** theory, in particular, by Soviet authors *(see below)***.** Furthermore, the many fundamental results in this field pertain to other authors. The unhealthy vanity of the author of the book does not allow him to look evenly on history of the ***CA*** theory in a whole. In general, ***Wolfram*** enough frivolously addresses with authorship of the results received in the ***CA*** problematics of what there can be an impression **–** everything made in this field belongs basically to him. In ***2002 S. Wolfram*** has been unveiled own self**-**proclaimed masterpiece published by his own company. This multipage volume contains his thoughts on everything from the physics of the *Universe* to the mysteries of human behavior, all based on the results of a series of years of analyzing the graphical output of a whole series of very simple computer programs.

The book contains basically results of computer experiments with simple types of ***CA***-models, drawing the conclusions and assumptions on their basis with doubtful enough reliability and quality. At that, the book's biggest flaw, as a work of scientific literature, is precisely the astoundingly high esteem in which the author holds his own thinking. There is an irritating density of passages in which the author takes personal credit for ideas that are «common knowledge» among experts in the relevant fields. In particular, he says following: «*The discoveries in this book suggest a new and quite different mechanism that I believe is in fact responsible for most of the examples of great complexity that we see in biology.*». Furthermore, according own recognition of ***S. Wolfram*** «*New Kind of Science is based on discoveries that I've made from studying extremely simple computer programs* (*that is to say, simple binary **CA**-models*)». Indeed, that is very «*serious*» substantiation of «*A New Kind of Science*». According to ***S. Wolfram***, «*traditional*» mathematics and science are doomed: mathematics because of its emphasis on rigorous proof, and science because of its preference for models that can make accurate predictions. ***Wolfram*** says that the most interesting problems presented in the nature are likely to be formally undecidable or computationally irreducible, rendering proofs and predictions impossible. So, mathematicians and scientists have managed to keep busy only by carefully choosing to work on the relatively small set of problems that have rather simple solutions. Similar ***Wolfram*** passages and inferences similar to them cause entirely certain doubts in the scientific decency and judiciousness of their author. At last, we absolutely do not agree that ***Wolfram's*** book represents a new kind of science, nevertheless his book would be more pleasant to read if he were more modest. In our opinion, this book represents a speculative sight both on ***CA***, and on science as a whole. The book can present a certain interest for laymans in the ***CA*** field as well as for undemanding amateurs of science fiction. A large collection of critical reviews of the ***Wolfram's*** book of various level of competence can be found in ([536], *A Collection of Reviews of ANKOS*). So, our point of view upon the ***Wolfram's*** book and its not quite positive role in affair of popularization of the ***CA*** *problematics* among serious scientific community is presented in the *Preface* to this book. In the same place, the reader can find our point of view on a place of the ***CA*** problematics in system of natural sciences. In a few words, our experience on the ***CA*** problematics both on theoretical, and especially applied level speaks totally other, namely: ***(1) CA*** represent one of types of *infinite* abstract automata with *specific* internal structure admitting a rather high level of parallel information processing and computations; they form a specific class of discrete dynamic systems, functioning in especially parallel manner on the basis of principle of local interaction, and ***(2) CA*** can be considered as formal mathematical objects presenting undoubted self-dependent interest too. Our detailed enough point of view on the above question can be found in our ***Preface***. Surprisingly, so far as the people are susceptible to pseudo-scientific speculative theories. Thus, probably, because *serious* theories are beyond their power whereas it is much simple to deal with various kinds of their some artificial primitive alternatives. «*A New Kind of Science*» we see as a similar alternative at the most.

The modern standpoint on the ***HS (CA)*** theory has been formed under the influence of works of such researchers as ***Adamatzky A., Aladjev V.Z., Amoroso S., Arbib M., Bagnoli F., Bandini S., Bandman O., Banks E.R., Barca D., Barzdin J., Bays C., Binder P., Boghosian B., Burks A.W., Butler J., Cattaneo G., Chate H., Chowdhury D., Church A., Codd E.F., Cole S., Crutchfield J., Culik K.II, Das A.K.., Durand B., Durret R., Fokas A., Fredkin E., Gács P., Gardner M., Gerhardt M., Golze U., Grassberger P., Green D., Griffeath D., Gutowitz H., Hedlund G., Hemmerling A., Holland J., Honda N., Ibarra O., Ikaunieks E., Ilachinski A., Jen E., Kaneko K., Kari J., Kimura M., Kobuchi Y., Langton C., Legendi T., Li W., Lieblein E., Lindenmayer A., Maneville P., Margolus N., Martin O., Maruoka A., Mazoyer J., Mitchell M., Zuse K., Moore E.F., Morita K., Myhill J., Nasu M., von Neumann John, Nishio H., Ostrand T.J., Pedersen J., Podkolzin A., Richardson D., Sarkar P., Sato T., Shereshevsky M.A., Sipper M., Smith A.R., Sutner K., Takahashi H., Thatcher J., Toffoli T., Toom A.L., Tseitlin G.E., Ulam S., Varshavsky V.., Vichniac G.Y., Vollmar R., Voorhees B.H., Waksman A., Weimar J., Willson S.J., Wolfram S., Wuensche A.A., Yaku T.,***

Yamada H., and other numerous researchers from many countries. On initial stage the applied aspects of ***HS (CA)*** theory with respect to perspective highly-parallel computers enough intensively have been developed by scientific schools of ***T. Toffoli, E. Fredkin*** in *USA*, ***R. Vollmar*** in *Germany*, whereas with respect to modelling of biological development by ***V.Z. Aladjev*** in *Estonia*.

Along with our works in the ***HS*** theory, it is necessary to note a whole series of other Soviet researchers who have received in the given field both *fundamental* and *considerable* enough results during ***60th – 80th***. They are ***Adamatzky A.*** (*identification of **HS***), ***Bandman O.L.*** (*asynchronous **HS***), ***Blishun A.F.*** (*growth of patterns*), ***Bliumin S.L.*** (*growth of the patterns*), ***Bolotov A.A.*** (*simulation among classes of **HS***), ***Varshavsky V.*** (*synchronization of **HS**, simulation of anysotropic **HS** on the isotropic ones*), ***Georgadze A.K., Matevosian A.A. Mandzhgaladze P.V.***, (*growth of the configurations, universal stochastic and deterministic **HS**, **HS** and parallel grammars*), ***Dobrushin R.L., Vasil'ev N.B., Stavskaya O., Mitiushin L., Leontovich A., Toom A.***, (*probabilistic **HS***), ***Ikaunieks E.A.*** (*nonconstructible configurations*), ***Koganov A.V.*** (*universal **HS**, stationary configurations, simulation of **HS***), ***Kolotov A.*** (*models of excitable media*), ***Levenshtein V.*** (*synchronization in **HS***), ***Levin L.A.*** and ***Kurdiumov G.L.*** (*stochastic **HS***), ***Makarevskii A.*** (*implementation of boolean functions in **HS***), ***Petrov E.I.*** (*synchronization of a **2D HS***), ***Podkolzin A.S.*** (*simulation of **HS**, asymptotic of the global dynamic, universal **HS***), ***Pospelov D.A.*** (*homogeneous structures and distributed **AI** in **HS***), ***Prangishvili I.V.*** (***HS** architectures of high parallel processors*), ***Revin O.M.*** (*simulation of anysotropic **HS** on the isotropic **HS***), ***Reshod'ko L.*** (***HS** models of the excitable media*), ***Solntzev S.*** (*growth of the patterns*), ***Tzeitin G.E.*** (*algebras of shift registers*), ***Tzetlin M.L.*** (*collectives of automata, games of **HS***), ***Scherbakov E.S.*** (*universal algebras of parallel substitutions*). In our numerous previous works were being investigated different aspects of the ***HS*** theory and its applications in computer science and mathematical modelling. Our results obtained in these directions constituted substantially new contribution into the ***HS*** theory and its applications. The present monograph is intended for discussion of the most general directions in theory of classical ***d***-dimensional ***HS***, and our results obtained therein. Unfortunately, there is not sufficient space here to discuss in detail the wealth of problems in this field. Meanwhile, we hope that the offered monograph will acquaint the reader with the general aspects and tendencies in classical ***HS*** as certain formal model of parallel processing and perspective environment for physical and mathematical modelling.

Classical ***d***-dimensional ***HS (d-HS)*** is defined as the ordered set of four components, namely:

$$d\text{-}HS \Leftrightarrow \langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X\rangle$$

where ***A*** is a finite, non-empty set called the ***state alphabet***, and it is the set of states which each of the individual finite-state automata in the structure can assume. The state *alphabet* contains a distinguished element called the *quiescent state*, which is denoted by ***0***. Let, the state alphabet $A=\{0,1,2,...,a-1\}$ contains ***a*** elements. Z^d is the set of all ***d***-tuples of integers which is used to name the cells, where ***Z*** is the set of integers, and is called the ***array***, i.e. array in which all processing elements are identical. We think that other types of regular arrays for ***HS*** achieve nothing mathematically new for its behavioral properties – an integer lattice is entirely sufficient. Each automaton in Z^d can be thought of as the ***name*** or address of a particular finite-state machine which occupies that position in the *array*. It will frequently be rather convenient to identify an automaton located at cell ***j*** with ***j***-cell itself.

X, called the ***neighborhood index*** of ***d-HS***, is ***n**-tuple* of distinct ***d**-tuples* of integers and is used to define the neighbors of any cell, i.e., those cells from which the cell will directly receive information. Then, ***n*** neighbours of cell ***Z*** are cells $z+\alpha_1, z+\alpha_2, ..., z+\alpha_n$, where $X=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. The neighborhood index ***X*** describes the uniform interconnection pattern among the elementary automata in ***d-HS***. It represents positions relative to a given cell ***k*** of all cells whose automata are directly connected to cell ***k***. If index ***X*** contains the point $0^n=\{0,0, ..., 0\}$, every cell is contained in its own neighborhood, where neighborhood consists of all neighbours of cell. Without loss of generality, we may assume that ***X*** contains the point 0^n. The first three above-mentioned components of any ***d-HS***, namely, the *state alphabet* ***A***, the array Z^d and the neighbourhood index ***X***, form a ***homogeneous space***. The *homogeneous space* is the static part of

d-HS **(*d* ≥ *1*).** It describes the physical structure of ***d-HS*,** however it does not specify interactions which will take place among the elementary automata in $\boldsymbol{Z^d}$**,** i.e. dynamics of the structures ***d-HS*.**

In order to study the operation *(dynamics)* of a ***d-HS*,** it is necessary to have facilities for describing of a current state of the entire homogeneous space, at any given time. A state of the entire space is called a *configuration* **(*CF*)** of the space and it is simply the complete set of current states of each of an *individual* automata**.** A *configuration* is any mapping ***CF:*** $\boldsymbol{Z^d \to A}$***; C(A,d)*** denotes the set of all configurations with respect to $\boldsymbol{Z^d}$ and ***A – C(A,d)* = {*CF*|**$\boldsymbol{Z^d}$**} → *A*.** Let, *c(k)* be the current state of an automaton located at ***k***-cell. ***Support*** of a configuration ***c*** (*denoted by* [***c***]**)** is the set of all cells ***k*** such that ***c(k)≠0;*** i.e., the support is a nonquiescent part of configuration ***c*.** Configurations with *finite support* are of considerable interest**;** the set of all such configurations is denoted by ***C(A,d,ϕ); C(A,d,∞)*** denotes the set of all configurations with *infinite* support and ***C(A,d)* = *C(A,d,ϕ)*∪*C(A,d,∞);*** in addition ***C(A,d,ϕ)*∩*C(A,d,∞)* = ∅.**

A special notation is being used to represent sets of ***1****-dimensional* configurations with *finite* and *infinite support* for ***1-HS***, accordingly ***C(A,ϕ)*** and ***C(A,∞); C(A)=C(A,ϕ)*∪*C(A,∞)*.** A finite configuration ***c*∈*C(A,ϕ)*** is represented by □$x_1x_2x_3x_4$ **...** x_m□, where □ indicates the string of unbounded length from elementary automata in ***0***-state**,** i.e.**,** □$x_1x_2x_3$ **...** x_m□**≡...*000***$x_1x_2x_3$ **...** x_m***000...;*** $x_j \in A$***; j=1..m*.** Let**,** null-configuration □ belongs ***C(A,d,ϕ)*** at its absence in ***C(A,d,∞)*.** This presumption was done in view of a whole series of the important enough reasons**.** The length of a finite configuration ***c*** is defined as the distance between two extreme automata in states of ***A*\\{*0*}**, and will be also denoted by |***c***|**.**

The operation of ***d-HS*** **(*d* ≥ *1*)** is specified by a ***local transformation (function)*** $\sigma^{(n)}$ which produces the next state of an individual automaton ***k*** in terms of states of automata, which are directly connected to ***k*.** We shall deal with the *local transition functions* $\sigma^{(n)}$ which are defined by the mappings $A^n \to A$ such that $(\exists x \in A)(\sigma^{(n)}(x^n)=x)$**.** For the rest**,** ***local transition function (LTF)*** is any mapping $\sigma^{(n)}: A^n \to A$**.** The simultaneous applying of the local transformation $\sigma^{(n)}$ to neighbourhood of every automaton of entire homogeneous space defines a ***global transition function*** $\tau^{(n)}$ ***(GTF)*** of the current configuration ***c*** into the next configuration $c\tau^{(n)}$**.** The formal definition of configuration $c\tau^{(n)}$ can be presented as follows.

Let ***C(A,d)*** denotes the set of all configurations with respect to Z^d and ***A*.** The image of $z \in Z^d$ under ***CF*** ***c*∈*C(A,d)*** is written as ***c(z)*.** A neighbourhood index ***X*** and local mapping $\sigma^{(n)}: A^n \to A$ define the *global* map $\tau^{(n)}: C(A,d) \to C(A,d)$ as follows: $c\tau^{(n)}=c^*$ if and only if for each $z \in Z^d$, $c^*(z)=\sigma^{(n)}(c(z+\alpha_1), c(z+\alpha_2), c(z+\alpha_3),\ldots,c(z+\alpha_n))$**.** From this definition immediately follows, that every $\sigma^{(n)}$ defines the *unique* global function $\tau^{(n)}$, and that cannot be defined $\tau^{(n)}$ by two different ***local transformations*.** There is, in other words, biunique correspondence between set of all ***global transition functions*** $\tau^{(n)}$ and a set of all local transition functions $\sigma^{(n)}$ for the given state alphabet ***A***, ***d***-dimensionality of space $\boldsymbol{Z^d}$ and *neighbourhood* index ***X*.** It is therefore possible to speak about the $\tau^{(n)}$ defined by $\sigma^{(n)}$, and vice versa. It is proved [1,5], that any ***GTF*** in a classical ***d-HS*** is primitive recursive function**.** The given result defines not only place of the ***GTF*** in hierarchy of all recursive functions, but also together with other components determines simplicity of such mathematical objects as ***d-HS (HS-models)*.**

The ***fourth*** component of the ***d-HS*** can now be defined. For the given ***A*, *Z^d*** and ***X*,** a set of admissible transformations ***T*** is any nonempty subset of the complete set of all global transitions determinate by parameters ***A***, $\boldsymbol{Z^d}$ and ***X*.** If the set ***T*** contains single *global transition function* $\tau^{(n)}$, the object ***d-HS* = <**$\boldsymbol{Z^d}$**, *A*,** $\tau^{(n)}$**, *X*>** is said to be *monogenic* (*or classical*) ***d-HS*.** The operation of the classical ***d-HS*** is particularly simple, namely**:** if $c = c_o$ is an initial configuration of homogeneous space Z^d at time $t = 0$, configuration at time $t=m$ is $c^*=c_o\tau^{(n)m}$, the result of applying of a global transition function $\tau^{(n)}$ to the homogeneous space ***m*** times. In case of so-called *polygenic* ***d-HS*** an explicitly written-out sequence of global transition functions is required for specifying a particular computation of ***d-HS*=<Z^d,*A*,*T*,ω>**, where ω is function which describes the order of application of global transition functions of ***T*** to any initial configuration of homogeneous space Z^d. Thus, if c_o is a configuration and $\omega=\tau_{jo}\tau_{j1}\tau_{j2} \ldots \tau_{jk} \ldots$ is a sequence of global transformations of ***T***, then the sequence of configurations $c_o, c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ is called the configuration sequence generated by ω-*rule* from an initial configuration c_o, if for each $k \geq 0$, $c_k\tau_{jk} = c_{k+1}$. Let $<c_o>[\omega]$ and $<c_o>[\tau^{(n)}]$ denote the sequences of configurations generated *by* ω-rule of a ***polygenic d-HS*** and by global transition function $\tau^{(n)}$ of a ***classical d-HS***, accordingly.

In the present monograph we shall consider the classical ***d-HS***, in general. Furthermore, unless was not pointed the contrary, by denotation «***HS***» we shall mean classical ***1-HS*=<*Z*,*A*,$\tau^{(n)}$,*X*>**, where $A=\{0,1,2, \ldots, a-1\}$ and $X=\{0,1,2,3, \ldots, n-1\}$; in addition, in general, we shall deal with local transition functions $\sigma^{(n)}$ which are defined by the mappings $A^n \to A$ such that $\sigma^{(n)}(0^n)$ always equals ***0***. Thus, the concept of the ***classical d-HS*** is intuitively extremely simple. In this connexion, questions about extent of community of such concept arise, i.e. how much this concept admit broadenings which do not lead out of scope of certain possibilities of the classical concept of ***d-HS***. We have considered only the generative power of the classical ***d-HS*** and have proved that a series of widenings of classical concept of ***d-HS*** reveal, that even with respect to narrow enough concept of equivalence of two ***d-HS***, the concept of classical ***d-HS*** possesses the sufficient degree of community [1,3,5,8]. In the above works we defined and investigated the socalled *non-deterministic*, *stochastic* ***d-HS*** and ***d-HS*** with *refractority*. In the present work are mainly discussed ***HS*** with ***refractority*** and ***HS****, which are very suitable for describing many parallel discrete processes in ***HS***-models.

HS*, by definition, is a four-element tuple ***HS*=<Z,A,I,φ>***, where ***Z*** and ***A*** are defined similarly *classical* ***1-HS***, ***I*** is a set of impulses and φ is a *functional algorithm* ***(FA)*** of ***HS****. We shall associate an elementary automaton with each point ***k*** of ***Z***, and we shall identify this automaton with ***k***. ***FA*** φ is defined by the following discrete equations, namely:

$$\begin{cases} a^1(i)_{t+1} = S[i_r, a(i), i_l]_t \\ (j_r^1)_{t+1} = R[i_r, a(i), i_l]_t \\ (j_l^1)_{t+1} = L[i_r, a(i), i_l]_t \end{cases} \qquad a^1(i), a(i) \in A; \quad j_r^1, j_l^1, i_r, i_l \in I; \; t = 0,1,2,\ldots$$

where $a^1(i)$, $a(i)$ are states of ***i***-automaton; i_r, i_l are *right* and *left* ***incoming*** impulses of ***i***-automaton; $j^1{}_r$, $j^1{}_l$ are right and left ***output*** impulses of ***i***-automaton. As stated [1,5], every ***HS**** can be constructively embedded in a classical ***HS***. Furthermore, under certain conditions ***HS**** can be embedded in a classical ***HS*=<*Z*,*A**,$\tau^{(3)}$,*X*>**, where $A^*=A\cup I$ [1,3,5]. The above concept of ***HS****-structure can be generalized upon the general case of ***d***-dimensionality $(d > 1)$.

$$\begin{cases} \sigma^{(n)}(\omega_k, x_2, \ldots, x_n) = \omega_{k+1} \\ \sigma^{(n)}(\omega_r, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \sigma^{(n)}(1, x_2, \ldots, x_n) = \omega_1 \\ \sigma^{(n)}(0, x_2, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow \Big(\sum\limits_{x_j=1} x_j \geq P \Big) \end{cases}$$

$$x_j \in A, \;\; k = 1..(r-1); \;\; j = 2..n$$

The ***d-HS*** with ***refractority*** can be defined as follows. Let ***d-HS*=<Z^d,*A*,$\tau^{(n)}$,*X*>**, where $A=\{0,1\}\cup\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_r\}$, is called ***d-HS with refractority*** {***HSR(d,r,P)***}, if its global transition function $\tau^{(n)}$, is defined by the local transition function $\sigma^{(n)}$ described by the above relations.

As regards the states of an automaton in ***HSR(d,r,P)***, the most general states are being chosen, namely: ***rest (0)***, excitation ***(1)*** and ***refractority of r-depth*** $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_r\}$. According to neighbourhood index ***X***, there is the possibility of various structural interrelations between automata in such kind ***HSR***. The general object in such structure is investigation of the dynamical distribution of automata in ***excitation*** states ***(1)*** in conformity with an initial configuration, neighbourhood index ***X***, *threshold* ***(P)*** of *excitation* and the ***r****-depth of refractority*.

At present, the ***HS*** theory is an enough highly developed independent field of the modern cybernetics, which has considerable sphere of applications in different branches of science and engineering. In our monographs [3,5,8,9] the architecture of the ***HS*** theory and its applications from our point of view has been presented. The architecture takes into account our previous attempts in this direction along with the most basic recent applied and theoretical results in the ***HS*** theory. We hope, the architecture will be described in detail and will be verified in the relevant scope, since its analysis can be useful enough in choice of subsequent directions for investigations in this topic.

Material presented below is devoted to the ***HS (CA)*** theory and contains the most essential results in this direction, which were obtained by the *Tallinn Research Group* ***(TRG)*** during **1968 – 2007**, excepting the decennial recess ***(1997 – 2006)*** conditioned by work on *computer algebra systems Mathematica*, *Maple*. The present problems are being discussed mainly on the basis of ***1***-dimensional ***HS***, but practically all general results can be generalized onto the general case of ***d***–dimensionality ***(d > 1)***. With rare exception the proofs of our results submitted in the given book can be found in the cited publications.

Above all, hereinafter as the concepts «*nonconstructible configuration* ***(NCF)***» and «***nonconstructibility***» we shall understand a configuration such as «*Garden-of-Eden*», and existence in ***d-HS (d≥1)*** of such type of configurations accordingly. Moreover, the concepts «***HS***» and «***HS-models***» we shall suppose as the identical ones. Along with the concept of *nonconstructible* configurations ***(NCF)*** which defines principal «*nonconstructibility*» concept we introduced ***three*** new types of ***nonconstructible*** configurations ***(NCF–1, NCF-2*** *and* ***NCF-3)*** which allow to make clear *nonconstructibility* concept in *classical* ***HS***-models in detail.

Questions of ***nonconstructibility*** are fundamental problems in the study of dynamical properties of the ***HS***-models and their applications. A problem of central importance is the characterization of the global behaviour ***(****dynamics****)*** of ***HS*** as a function of the *local transition function* ***(LTF)***. Since the study of *histories* of configurations in ***HS*** plays a basic part in investigation of ***HS*** dynamics, it is extremely interesting to find conditions of the existence of *nonconstructible* configurations ***(NCF)***, i.e. constructive limitations of ***HS***-models. Furthermore, the nonconstructibility problem in ***HS***-models presents a rather considerable *gnosiological* interest. Thus, below, we shall present the most important results and modern state of the *nonconstructibility* problem mainly in the classical ***1***-dimensional ***HS***, however these results (*practically all*) can be generalized upon the case of ***d-dimensionality (d>1)***. Above all, for the purpose of exhaustive investigation of the problem we shall introduce *four* classes of the *nonconstructible* configurations ***(NCF)*** and shall establish general interconnections between these four concepts of nonconstructibility. In the second chapter of the present monograph the *nonconstructibility* problem is discussed in detail.

<u>Definition 1</u>. Configuration $c_b \in C(A,d,B)$ of a finite d-dimensional B-hypercube (block) of automata in d-HS is nonconstructible CF (NCF) if and only if does not exist CF $c \in C(A,d)$ such that $c_b \subset c\tau^{(n)}$ $(d \geq 1)$.

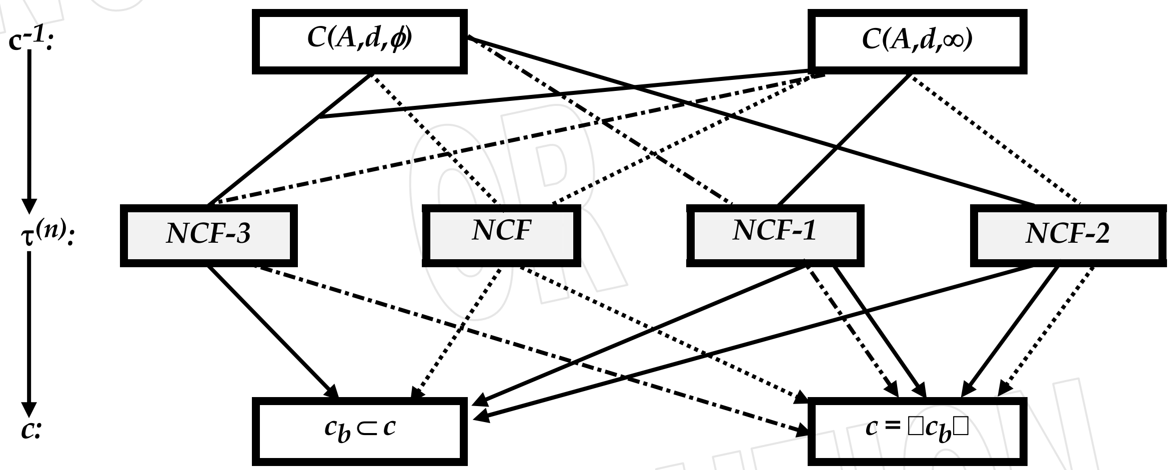
<u>Definition 2</u>. A configuration B_s of finite d-dimensional hypercube of automata in d-HS will be called nonconstructible with respect to some S-set (NCF_s) if and only if does not exist CF $c^* \in S \subseteq C(A,d)$ such that $B_s \subset c^*\tau^{(n)}$ $(d \geq 1)$.

<u>Definition 3</u>. A finite configuration $c=\square c_b \square \in C(A,d,\phi)$ is nonconstructible of the type NCF-3 if and only if the block configuration c_b of d-dimensional hypercube of automata in d-HS is constructible but CF c is nonconstructible; where □ – edging of block c_b-configuration by infinite number of 0-states.

<u>*Definition 4*</u>. ***Configuration c∈C(A,d,ϕ) is nonconstructible of the type NCF-1 for classical d-HS if and only if (∃c`∈C(A,d,∞))(c`$\tau^{(n)}$=c) and (∀c*∈C(A,d,ϕ))(c*$\tau^{(n)}$≠c). CF c∈C(A,d,ϕ) is nonconstructible of the type NCF-2 for a d-HS (d ≥ 1) if and only if (∃c` ∈ C(A,d,ϕ)) (c`$\tau^{(n)}$ = c) and (∀c* ∈ C(A,d,∞))(c*$\tau^{(n)}$ ≠ c).***

The introduced four types of nonconstructible configurations ***(NCF, NCF-1, NCF-2, NCF-3)*** allow more in detail to investigate the nonconstructibility problem in the classical homogeneous structures *(models)* ***d-HS (d ≥ 1).*** In particular, nonconsrtuctibility of type ***NCF-1*** allows more religiously to investigate the question of dynamics reversibility of finite configurations in the classical ***d–HS (d ≥ 1).*** In addition, it is necessary to have in view that the second at the importance nonconstructibility concept such as ***NCF–1*** takes place only for the classical structures, local transition functions for which satisfy the determining correlation ***(∃h∈A)($\sigma^{(n)}$(h,h, ..., h) = h),*** i.e. have the chosen condition of *«rest»*.

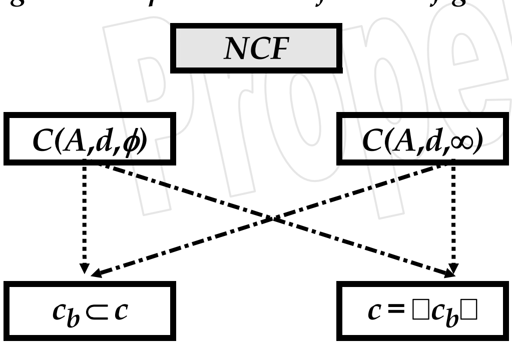
Obviously, if a structure ***d-HS (d ≥ 1)*** possesses ***NCF-1*** then relation ***(∃c∈C(A,d,∞))(c$\tau^{(n)}$= □)*** takes place. The following diagram illustrates interconnections of the above four nonconstructibility types.

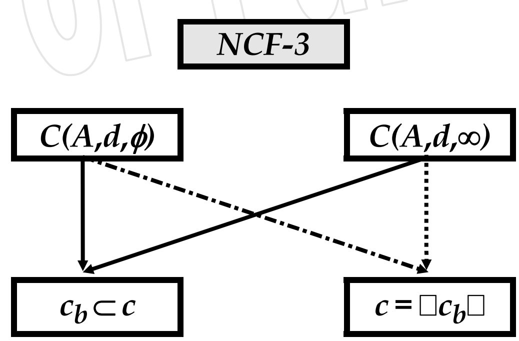


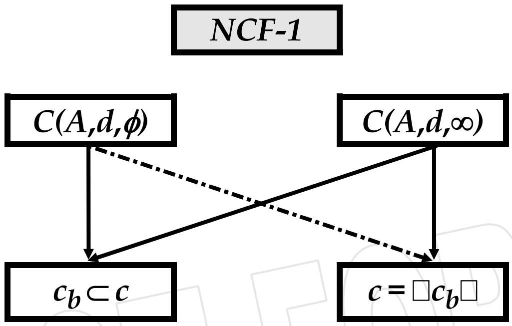
where $c^{-1}\tau^{(n)}$ = c; *c^{-1} – predecessor for a finite c-configuration*

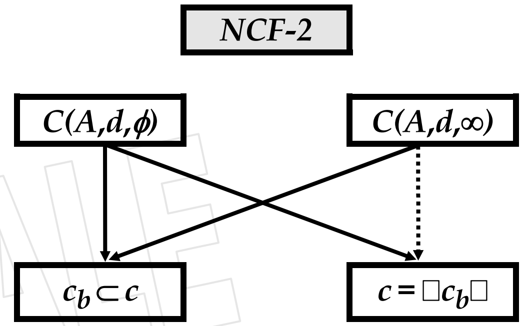
<u>*Theorem 1*</u>. ***Any classical 1-HS has at least one type of nonconstructibility NCF (and possibly, NCF-3), NCF-1 and NCF-2. Nonempty sets of NCF, NCF-1, NCF-2 and NCF-3 for the classical HS-models are infinite. Each GTF $\tau^{(n)}$ of classical 1-HS can possess the types of nonconstructability according to the table 1. If for a classical d-HS the set C(A,d,∞) is nonclosed relative to the global map induced by GTF $\tau^{(n)}$, the homogeneous structure possesses the types NCF, NCF-1, or both types of nonconstructibility simultaneously. A classical d-HS without NCF (NCF-3) and NCF-1 has NCF-2; classical d-HS without NCF-2 has NCF and/or NCF-1 (d ≥ 1).***

The diagrams representing the opportunities of existence of predecessors in sets C(A,d,ϕ) and C(A,d,∞) for configurations {c_b | c=□c_b□} concerning four types of nonconstuctability; moreover, the continuous (dotted) marking of lines designates accordingly the admissibility (inadmissibility) of the existence of configurations-predecessors for a configuration c in classical HS-models d-HS (d ≥ 1).









If ***NCF (NCF-3)*** is ***absolutely nonconstructible*** configuration with respect to the set ***C(A,d,ϕ)*** $\cup$ ***C(A,d,∞)*** then ***NCF-1*** and ***NCF-2*** are ***comparatively nonconstructible*** configurations with respect to sets ***C(A,d,ϕ)*** and ***C(A,d,∞)*** accordingly**.** In table **1** mark «**+ *(-)***» identifies the ***existence*** (*absence)* of the corresponding type of *nonconstructible* configurations in a *classical* **1-HS,** defining the allowable combinations of types.

Table 1

Admitted types of nonconstructibility for structures 1-HS				*Possibility of combinations*
NCF	*NCF-1*	*NCF-2*	*NCF-3*	
+	+	+	+	*Yes*
+	+	+	-	*Yes*
+	+	-	+	*Yes*
+	+	-	-	*Yes*
+	-	+	+	*Yes*
+	-	+	-	*Yes*
+	-	-	+	*Yes*
+	-	-	-	*Yes*
-	+	-	+	*No*
-	+	-	-	*Yes*
-	-	+	+	*No*
-	-	+	-	*Yes*
-	+	+	+	*No*
-	+	+	-	*No*
-	-	-	+	*No*
-	-	-	-	*No*

<u>Theorem 2</u>. For any GTF $\tau^{(n)}$ of a classical 1-HS take place the following correlations NCF $\subset$ C(A,d,ϕ), NCF-1 $\subset$ C(A,d,ϕ) and NCF $\cup$ NCF-1 $\cup$ NCF-2$\cup$NCF-3 $\subset$ C(A,d,ϕ). Let G = C(A,d,ϕ)\{□}; there are d-HS (d ≥ 1) for which takes place relation, namely G = NCF or G = NCF-2, but not G = NCF-1.

Relative to the problem of nonconstructibility, the question about quotas of the classical ***HS,*** possessing by nonconstructible configurations ***(NCF)*** of the different types presents undoubted interest. With the aid of the specific approaches we deduced a series of useful enough correlations.

<u>Theorem 3</u>. Let N(a,n) – quantity of all classical 1-HS; N1(a,n), N2(a,n), N3(a,n) and N4(a,n) – quantity of such structures which not possess NCF, possess NCF-1 without NCF, possess NCF-2 without NCF-3 accordingly. Then the following correlations take place, namely:

$$\frac{N1(a,n)}{N(a,n)} \approx \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{2*\pi*a^{n-1}})^{a-1}} \qquad \frac{N2(a,n)}{N(a,n)} \approx 0.6*\left(\frac{\sqrt{2*\pi*a}}{e^{a}}\right)^{a} \qquad \frac{N1(a,n)}{N(a,n)} \approx \frac{1}{\sqrt{(2*\pi)^{a-1} * a^{a(n-1)-n}}}$$

$$N3(a,n) > (a\text{-}1)^{a^{n}} \qquad N4(a,n) > (a\text{-}2)^{a^{n}}$$

A number of interesting results concerning existence of ***NCF-1*** in ***d-HS*** with alphabet ***A={0,1,2,3,...,a-1}***, whose local transition functions $\sigma^{(n)}$ are defined as follows, namely:

$$\sigma^{(n)}(x_o, x_1, ..., x_{n-1}) = x^*_o = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \ \ (mod \ \ a)$$

have been received. In particular, the following results can be mentioned in this connexion [5,54-56,88]:

- ***quota of all configurations NCF-1 for 1-HS with binary alphabet B and the simplest neighbourhood index X = {0,1} equals 1/2 relatively a set of all finite binary configurations from the set***

$$C(B,1,\phi) = \{1, 11, 1x_1x_2 \ldots x_n1 \mid x_j \in B;\ j = 1..n;\ n = 1..\infty\};$$

- ***any finite configuration containing odd number of states «1» in such structure is NCF-1;***
- ***the set C(B,1,ϕ) of all finite configurations is being generated from set of configurations NCF-1, i.e.***

$$\bigcup_j \{c_j\tau^{(n)k} \mid k = 0,1,2,...\} = C(A,1,\phi); \qquad c_j\tau^{(n)0} \equiv c_j, \quad ;$$
$$where\ \{c_j\} - the\ set\ of\ all\ finite\ configurations\ NCF\text{-}1$$

- ***any finite configuration of size less than template of d-HS of such type is NCF-1 configuration.***

In our opinion, much attention should be paid to the concept of the nonconstructibility with respect to certain sets of configurations in the classical ***HS*** in view of a whole series of interesting interpretations in both theoretical and applied aspects.

Definition 5. A configuration c ∈ C(A,d) is nonconstructible CF with respect to a set of configurations B⊂C(A,d) and GTF $\tau^{(n)}$ of a classical d-HS if and only if (∀c*∈B)(c*$\tau^{(n)}$ ≠ c).

Theorem 4. If GTF $\tau^{(n)}$ in the classical 1-HS not possesses NCF, then it not possesses and NCF-3; such GTF with respect to the set B=C(A)\C possesses NCF-1 or/and NCF-3, and can possess NCF-2 or/and NCF-3 and NCF-3, if a set C will a strong subset accordingly of sets C(A,ϕ), C(A,∞) and C∩C(A,ϕ) ≠ Ø, C∩C(A,∞)≠Ø. If GTF in a classical 1-HS not possesses NCF, then with respect to sets B=C(A)\C(A,∞) and B = C(A)\C(A,ϕ) such GTF $\tau^{(n)}$ has accordingly each configuration c∈C(A,ϕ) as NCF-2 along with nonconstructibility of types NCF-1 and/or NCF-3.

A series of similar results in this direction can be found in our monographs [5,9]. In item **2.2** a number of criteria of existence in classical structures ***d-HS (d ≥ 1)*** of the above types of nonconstructibility are presented. The first criterion is ascended to ***E.F. Moore*** and ***J. Myhill*** and is based on the concept of the *mutually erasable configurations* **(MEC).**

Definition 6. Two arbitrary configurations c_1, c_2∈C(A,ϕ) (c_1≠c_2) generate a pair of MEC for GTF $\tau^{(n)}$ in a certain classical d-HS (d ≥ 1) if and only if $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)}$.

It is simple to show, that definition of the ***MEC*** formulated by ***E. Moore*** is equivalent to the above, and can be formulated as follows.

Definition 7. Let W will be some block of m adjacent individual automata of a classical 1-HS and B be a set of all neighbouring automata for block B according to neighbourhood index X={0,1,2, ..., n-1}. Let CF(P) will be arbitrary configuration of the finite P-block of the individual automata of the structure. Two block configurations CF_1(W)∪CF(B), CF_2(W)∪ CF(B) are called a pair of MEC for GTF $\tau^{(n)}$ in the classical 1-HS if and only if the following correlations [CF_1(W)∪CF(B)]$\tau^{(n)}$ = [CF_2(W)∪CF(B)]$\tau^{(n)}$ and CF_1(W) ≠ CF_2(W) take place; block W is called the internal block (IB) of the pair MEC (IB MEC).

This definition is ascended to ***E.F. Moore,*** and is very useful for obtaining of a whole series of *numerical* characteristics of ***HS;*** on the basis of this definition ***E.F. Moore*** and ***J. Myhill*** have proved the following criterion of the existence of the nonconstructible configurations for classical structures ***d-HS*** ($d \geq 1$)**.**

Theorem 5. Existence of pairs of MEC is necessary and sufficient for existence in a classical d-HS (d≥1) nonconstructible configurations (NCF). An arbitrary classical d-HS has at least one of three types of nonconstructibility – NCF, NCF-1, NCF-2 or their allowable combinations.

In connexion with the study of the *nonconstructibility* in classical ***d-HS,*** we considered a whole series of problems of existence of ***MEC*** in classical ***d-HS*** ($d \geq 1$)**,** detailly enough**.** The obtained results have both qualitative and numerical character, as well [5,19,20,22].

Theorem 6. There is a classical binary structure 1-HS with Moore's neighbourhood index that has pairs of MEC with simple IB of size L of one of the following types only, namely:

1) $L=\{p+ \mid p \geq 1\}$;	2) $L=\{1+, 2+, 3+, p- \mid p \geq 4\}$;	3) $L=\{1-, p+ \mid p \geq 2\}$
4) $L=\{1+, 2p-, (2p+1)+ \mid p \geq 1\}$;	5) $L=\{1-, 2+, p- \mid p \geq 3\}$;	6) $L=\{1+, p- \mid p \geq 2\}$

where mark {+|-} reveals that 1-HS has {has not} pairs of MEC with simple IB of size L (in addition, a simple IB contain no others MEC).

Theorem 7. For arbitrary integers $a \geq 3$ ***and*** $n \geq 2$ ***exists a classical 1-HS with alphabet*** $A=\{0,1,2, ..., a-1\}$ ***and neighbourhood index*** $X=\{0,1,2,...,n-1\}$ ***which has pairs of MEC with simple IB of minimal size*** $L=n$**.**

The results of theorems ***6*** and ***7*** were obtained using methods of computer modelling.

Theorem 8. If a classical 1-HS has pairs of MEC with simple IB of minimal size L, then takes place the following correlation $n \leq L < a^{n-1}(a^{n-1} - 1) + n - 2$**.**

Theorem 9. Minimal size (L) of nonconstructible configurations (NCF) in a classical 1-HS is defined by the following correlation, namely: $(n+1) \leq L < 2^{a(n-1)}$**.**

Problem of existence for classical ***d-HS (d≥1)*** so-called *vanishing* configurations represents large enough interest with point of view of ***HS-***dynamics, including nonconstructibility problem.

Definition 8. A finite configuration $c \in C(A,d,\phi)$ ***is a vanishing configuration (VCF) for a classical d-HS*** ($d \geq 1$) ***if and only if*** $(\exists m>0)(c\tau^{(n)m} = \square)$***, where*** $\square$ ***and*** $\tau^{(n)}$ ***– are null configuration and global transition function of homogeneous structure accordingly.***

Theorem 10. If for a classical 1-HS exist VCF, then the structure possesses nonconstructibility of type NCF. The minimal length L(a,n) of VCF in a classical 1-HS is determined by the following correlation $n-1 \leq L(a,n) < a^n + n-1$***. Exists a classical 1-HS with the simplest neighbourhood index*** $X = \{0,1\}$ ***which possesses the VCF of minimal size*** $L(a,2) = a-1$***. If the set*** $C(A,d,\infty)$ ***is nonclosed relative to global map*** $\tau^{(n)}$ ***then for d-HS*** ($d \geq 1$) ***without NCF (NCF-1) the nonconstructibility of type NCF-1 (NCF) exists.***

Now, we shall state a new existence *criterion* of nonconstructible configurations ***(NCF)*** in *classical* ***1-HS,*** which is known to be generalized for higher dimensionality and which not depends on the concept of ***erasability*** in ***HS-***models. The criterion is based on the concept of γ-configurations ***(****or simply* ***γ-CF).***

Definition 9. In addition to suppositions and designations of the definition 7, let P(W) will be number of individual automata in arbitrary block W of a classical 1-HS. For classical 1-HS exists γ-CF on W-block if and only if at least for one CF(W) exist $G(\gamma) \neq a^{n-1}$ ***configuration-predecessors such what takes place correlation*** $[CF(W) \cup (B)]\tau^{(n)} = CF(W)$***, where B is a block of automata in the structure which are adjacent to all automata of block W according to neighbourhood index X and GTF*** $\tau^{(n)}$**.**

Thus, our definition of ***γ-****configurations* ***(γ-CF)*** is slightly different from ***Maruora-Kimura*** definition of so-called ***k-balanced GTF*** $\tau^{(n)}$**,** but it is easy to see that both are equivalent. In view of definition ***9*** the following theorem can be proved.

<u>Theorem 11</u>. An arbitrary classical d-HS (d ≥ 1) possesses the nonconstructibility of NCF-type if and only if for the structure exist γ-CF.

Theorem ***11*** gives another *criterion* of existence of nonconstructible configurations ***(NCF)*** in the classical ***HS***-models, and it is more convenient for a whole series of theoretical investigations of ***HS***-models**.** The criterion allows us to obtain more acceptable estimations for some numerical characteristics of ***d-HS*****.**

<u>Theorem 12</u>. If for an arbitrary classical 1-HS exist γ-CF of the length B, then for the structure exist the NCF of length L, expressed by the following formula, namely:

$$L = \left]\frac{(n-1)*\ln a}{(n-1)*\ln a - \ln G(\gamma)}\right[*(B+n-1)-n+1$$

where n – size of neighbourhood template of the structure, G(γ) corresponds to the definition 9 whereas a – cardinality of alphabet A of internal states of 1-HS and]Z[denotes integer ≥ Z.

In a whole series of cases instead of optimum estimation of size of nonconstructible configurations it is desirable to have a simple formula as function of the general parameters of ***HS***-model**.** In this direction the following theorem takes place.

<u>Theorem 13</u>. If for an arbitrary classical 1-HS with Moore neighbourhood index X={-1,0,1} exist a γ-CF of length B, then for the structure exist nonconstructible configurations of minimal length L according to the following correlation, namely: $B \le L \le 2*(B+n-1)*(n-1)*a^{n-1}*]\ln a[$.

The theorem gives estimations for minimal size of ***NCF*** in the classical ***1-HS*** as a function of their main parameters, namely**:** sizes of ***γ-CF*** and template, and cardinality of alphabet ***A*** of internal states of ***1-HS*** only. These results can be useful enough both for the theoretical and for numerical investigations in ***HS*** problems, as well. Furthermore, the results can be easily enough enlarged on ***HS***-models with arbitrary neighbourhood indexes and higher dimensionality.

As an example of ***distribution*** of classical ***HS***-models concerning nonconstructibility types, presented above, we shall consider group of binary ***1-HS*** with neighbourhood index $X = \{0,1,2\}$. ***LTF*** $\sigma^{(3)}$ of such structures are defined by parallel substitutions of the following kind, namely:

$$\begin{array}{llll} 000 \to x_o=0 & 010 \to x_2 & 100 \to x_4 & 110 \to x_6 \\ 001 \to x_1 & 011 \to x_3 & 101 \to x_5 & 111 \to x_7 \end{array}$$

Obviously, quantity of all such structures is equal $2^7 = 128$. For simplicity, we shall number the given structures by integers corresponding to their binary representatives $<x_1x_2 \dots x_7>$, i.e. from ***0*** up to ***127.*** For example, the structure determined by ***LTF*** $\sigma^{(3)}$ of the following kind, namely:

$$\sigma^{(3)}(x_o, x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{2} x_j \quad (mod\ \ 2); \quad x_j \in A = \{0,1\}$$

at the made assumption will have number ***105.***

According to the *nonconstructibility* criterion on the basis of ***γ-CF*** (*theorem* ***11)*** we can simply make sure, that each ***1-HS*** from the considered group possesses ***NCF*** and, possibly, ***NCF-1*** (*determination of that we relinquish to the reader*)**.** Amount of such structures is ***93,*** their numbers are**:**

0..14, 16..29, 31..39, 40..42, 44, 46..50, 52, 54..56, 59, 61..74, 76, 77, 79..84, 87, 88, 91, 93..98, 100, 103, 104, 107, 109..112, 115, 117..119, 121..127

A number of structures of the given subgroup can support a complex enough dynamics on features of which we here not accentuate the attention. The following subgroup is made by structures, possessing by pairs ***MEC*,** and consequently ***NCF*.** Amount of such structures is ***11*,** their numbers are ***43, 53, 57, 58, 68, 92, 99, 108, 113, 114*,** and ***116*.** In particular, structures with numbers ***53, 99*,** and ***113*** do not possess ***NCF-1*,** whereas structures with numbers ***92, 108*,** and ***114*** possess ***NCF-1*,** in addition.

Three structures with numbers ***15, 51*** and ***85*** do not possess the ***NCF*** and ***NCF-1*,** generating identical sequences of configurations ***(**within shift**)*** and from the point of view of dynamics of special interest do not represent. At last, the structures which are not possessing the ***NCF*** owing to absence for them ***MEC*** belong to the last subgroup. Numbers of such structures with certain comments are represented below**:**

30 – configurations of the kind $\{\square(1110)^k 11\square \mid k=0,1,2,\ldots\}$ are ***NCF-1*** in the structure
45, 101 – do not possess ***NCF-1***
60 – configurations of the kind $\{\square 1^{2k+1}\square \mid k=0,1,2,\ldots\}$ are ***NCF-1*** in the structure
75, 102, 105, 106, 120 – possess ***NCF-1*** at least of the simplest kind $c=\square 1\square$
86, 90 – possess ***NCF-1*** of the simple kind $c=\square 11\square$
89 – configurations of the kind $<1x_1x_2 \ldots x_n111>$ are ***NCF-1*** in the structure**;** $x_j \in A=\{0,1\}$, $j=1..n$

Thus, from total amount ***128*** binary structures of the considered group**:**

– 113 possess ***NCF*** and, possibly, ***NCF-1;***
– 3 structures with numbers ***15, 51*** and ***85*** do not possess ***NCF*** and ***NCF-1;*** in addition**,** they are not of a particular interest from standpoint of dynamics***;***
– 12 do not possess ***NCF;*** in addition, only two of them with numbers ***45*** and ***101*** do not possess ***NCF-1*** in addition**.**

Hence, a quota of structures possessing ***NCF*** and, probably, ***NCF-1*** is **≈ *0.88*,** whereas only **2** structures with numbers ***45*** and ***101*** do not possess *basic* types of nonconstructibility ***NCF*** and ***NCF-1*.** In addition, any sequence generated from initial finite configuration in structures ***45*** and ***101*** is periodical**;** length of period depends on length of the initial configuration and its kind. For example, for configurations ***c(k)*** length of period is defined by the following formula**:**

$$c(k) = 1^k \equiv \underbrace{11\ldots11}_{\leftarrow k \rightarrow} \quad (k \ge 1); \qquad p = 2^{[\log_2 (k+1)]}; \quad \textit{decimal representation } 1^k \equiv 2^{\kappa} - 1$$
$$\textit{where } [x] - \textit{an integer is no more than } x$$

Thus, only ***5*** structures from ***128*** with numbers ***15, 41, 45, 85*,** and ***101*** possess full convertibility of final configurations generated by them**;** where by this *concept* is understood an opportunity of calculation of all chain of final predecessors for each finite configuration $c \in C(A,1,\phi)$, i.e. completely to determine its prehistory in the structure. Taking into account their generative possibilities, from the point of view of modeling applications they do not represent particular interest. Hence, from point of view of binary ***1-HS*** with neighbourhood index of $X=\{0,1,2\}$, possessing nonconstructibility of types ***NCF*** and/or ***NCF-1*** can present the greatest interest only. It is said, it substantially is generalized and on the more general cases of classical ***HS*-**models. Therefore, for obtaining of complex enough dynamics we should pay the attention to ***HS*-**models possessing types of nonconstructibility ***NCF*** and/or ***NCF-1*.**

In particular, it is possible to show [54], that for providing of self-reproducibility according to ***Moore*** of all configurations $c \in C(A,d,\phi)$, so-called «*universal reproducibility*»**,** presence in a ***d-HS NCF-1*** at absence of ***NCF*** in it is necessary condition, whereas *converse* proposition is generally invalid**.** Thus, we obtain a certain kind of «*filter*» for selection of structures **–** the candidates for possession of property of *universal* reproducibility according to ***E.F. Moore*.** Namely among such structures there are structures both with property of universal reproducibility, and with property of a high degree of nonconstructibility of the finite configurations.

In particular**,** among binary ***1-HS*** considered above only structures with numbers ***30, 60, 75, 86, 89, 90, 102, 105, 106*,** and ***120*** possess ***NCF-1*** without ***NCF*,** and to already well**-**known additive structure ***105*** possessing property of *universal* reproducibility, in full measure it is possible to attribute and structures with numbers ***90*** and ***102.*** At that, for these structures a interesting regularity has been found, namely: ***for «almost all» configurations $c_o \in C(A,1,\phi)$, if n copies of configuration c_o are generated by structure with number 90 during t steps, the same quantity of the configuration c_o is generated by structure with number 102 during 2*t-1 steps; the exception is configurations from the set $\{1^{2k-1} \mid k=1,2,3, \ldots\}$.***

Concept of *nonconstructibility* of types ***NCF*** and ***NCF-1*** is enough closely connected to types of *dynamics* (*graphs of states*) of classical ***d-HS.*** In particular, the following result takes place, namely: ***If a classical d-HS ($d \geq 1$) not possess the nonconstructibility of types NCF and NCF-1, then for each configuration $c_j \in C(A,d,\phi)$ the d-HS generates configurations sequences (graphs of states) of only one of the following three kinds, namely:***

(a) ***all configurations sequences $\{c_j\tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ in the structure are periodical***

(b) $\ldots \to c_{j-k} \to \ldots \to c_{j-2} \to c_{j-1} \to c_j \to c_{j+1} \to c_{j+2} \to \ldots \to c_{j+k} \to \ldots$

(c) ***has configurations sequences $\{c_j\tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ of types (a) and (b)***

Absence for classical HS-models of nonconstructibility of NCF-type is necessary, but not sufficiently for guarantee of reversibility of their dynamics relative to all finite configurations. If a classical d-HS ($d \geq 1$) possesses the nonconstructibility of type NCF-1 without NCF, then for arbitrary configuration $c_j \in C(A,d,\phi)$ the given structure generates configurations sequences (transitions graphs) of only one of the following two kinds, namely:

(a) $c_j \to c_{j+1} \to \ldots \to c_{j+p} \to \ldots \qquad \bigcup_j \{c_j\tau^{(n)k} \mid k \geq 0\} = C(A,d,\phi);\ \ c_j$ ***– NCF-1 ($j=1..\infty$)***

(b) ***has configurations sequences $\{c_j\tau^{(n)k} \mid k \geq 0;\ j=1..\infty\}$ of type (a) along with periodical ones.***

We can easily be made sure in correctness of the following result, namely [54]: ***For existence in a d-HS ($d \geq 1$) without NCF of nonconstructibility of type NCF-1 is enough that for each finite configuration $c \in C(A,d,\phi)$ the d-HS generates as a whole the ascending configurations sequence relative to the size of configurations, i.e.***

$$(\forall c \in C(A,d,\phi))(\exists\{j_1 > j_2 > \ldots > j_q > \ldots\})\left(k < p \to \left|c\tau^{(n)j_p}\right| > \left|c\tau^{(n)j_k}\right|\right) \& (\neg\exists(k<p))\left(\left|c\tau^{(n)k}\right| > \left|c\tau^{(n)p}\right|\right)$$

$$j_q - \textit{ascending sequence of integers;} \quad |h| - \textit{size of a configuration } h \quad (q = 1, 2, \ldots\infty)$$

Obviously, for existence in a d-HS ($d \geq 1$) of nonconstructibility of type NCF-1 it is necessary (but not enough) existence for the structure of configurations $c \in C(A,d,\infty)$ such, that $c\tau^{(n)} = \square$.

On the basis of analysis of the basic types of nonconstructibility and computer simulation, it is possible to establish a fact, dynamics of configurations $c_o \in C(A,d,\phi)$ in classical ***HS***-models is characterized by transition graphs of the following type, namely:

1. <u>Infinite non-periodical sequence</u> of configurations from a set $C(A,d,\phi)$

$$c_o \to c_1 \to c_2 \to \ldots .\ c_j \to \ldots .$$

for which there are two possibilities, namely:

(a) defines algorithm of the structural organization of components of configurations depending on the initial ***CF*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ and the moment of time ***t;*** as examples the binary ***1-HS*** considered above with numbers ***105*** and ***111*** can serve.

(b) such algorithm is absent or is complex enough for determination.

2. ***Sequence of a pure cycle;*** in addition, under the given definition fall the passive configurations ***(PCF)*** $c_o \in C(A,d,\phi)$ determined by the relations $c_o\tau^{(n)} = c_o$ *(accurate to shift)* also.

$$c_o \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \ldots.\ c_j$$

There are ***HS***-models, in which everyone ***CF*** c_o generates a *pure* cycle whose period **≥ 2** and depends as on kind of configuration $c_o \in C(A,d,\phi)$, and its size. As examples the binary ***1-HS*** considered above with numbers ***45*** and ***101*** can serve.

3. ***Sequence of a mixed cycle;*** it is characterized by presence in it of certain ***CF*** c_j, generating some pure cycle, namely:

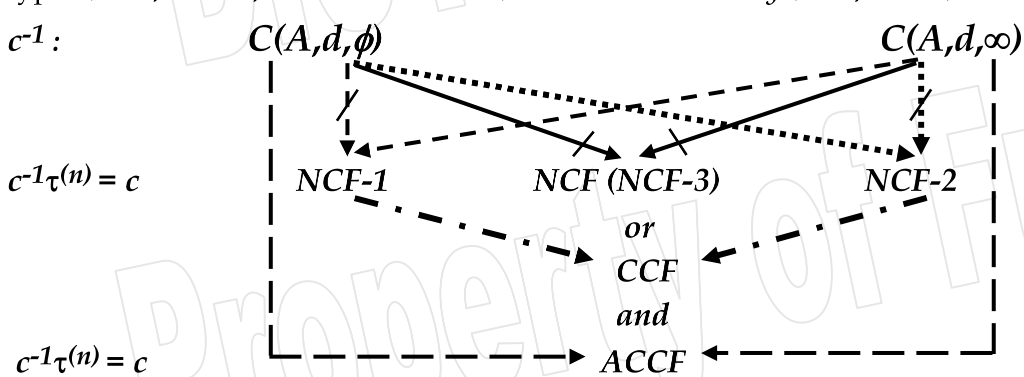
$$c_o \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \ldots.\ c_j \rightarrow \ldots. \rightarrow c_{j+p} \rightarrow$$

As examples, *binary* ***1-HS*** considered above with numbers ***44*** ***(CF □101□&□10101□)*** and ***66*** ***(CF □1011□)*** can serve. At that, it is simple to be convinced, ***HS***-models whose dynamics includes transition graphs such as ***(3)***, possesses the неконструируемостью of ***НКФ***-type.

Dynamics of classical ***HS***-models does not possess the *transition* graphs of other type; at that, dynamics can correspond both to the sets of the specified graphs, and exceptionally to one of them. For example, dynamics of ***1-HS*** with number ***105*** is being described by transition graphs exceptionally only such as ***(1.a)***, whereas ***1-HS*** with numbers ***45*** and ***101*** by transition graphs only such as ***(2)***. ***NCF*** is absolutely nonconstructible ***CF*** with respect to $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$, but ***NCF-1*** and ***NCF-2*** are nonconstructible ***CF*** with respect to the sets $C(A,d,\phi)$ and $C(A,d,\infty)$ accordingly.

Along with differentiation of concept of nonconstructibility in the classical ***d-HS (d≥1)*** the question of differentiation of ***constructibility*** of the finite configurations represents indubitable interest also. The configuration $c \in C(A,d,\phi)$ in classical ***d-HS (d≥1)*** is called the ***constructible*** configuration ***(CCF)*** if it has predecessors c^{-1} from the set $C(A,d,\phi)$ or a set $C(A,d,\infty)$, i.e. $c^{-1}\tau^{(n)} = c$. It is obvious, that a constructible configuration ***c**** cannot be ***NCF (NCF-3)***, but it can be ***NCF-1*** or ***NCF-2***.

On the other hand, in classical ***d-HS (d ≥ 1)*** configuration $c \in C(A,d,\phi)$ is called the *absolutely constructible* configuration ***(ACCF)***, if it has predecessors as from a set $C(A,d,\phi)$, and from set $C(A,d,\infty)$. It is obvious, that ***absolutely*** constructible configuration ***c**** cannot be ***NCF (NCF-3)***, but it cannot be ***NCF-1*** or ***NCF-2*** as well. Diagram, mentioned below, enough evidently illustrates interrelation of all nonconstructibility types ***(NCF, NCF-1, NCF-2 and NCF-3)*** and ***constructibility (CCF, ACCF)*** in the classical ***d-HS (d ≥ 1)***.



On the basis of concept of the absolutely constructible configuration and theorem ***29***, we can prove the following rather interesting result [90], namely:

For an arbitrary classical d-HS (d ≥ 1) the set C(A,d,ϕ) cannot consist only of absolutely constructible configurations or configurations of type NCF-1, however the set C(A,d,ϕ) for d-HS can consist only of constructible configurations, for example, of type NCF-2.

On the other hand, detailed analysis of the *classical binary* ***1-HS*** with neighborhood index $X=\{0,1,2\}$ and local transition function $\sigma^{(3)}$ defined by parallel substitutions of the kind:

$000 \to 0$	$010 \to 1$	$100 \to 0$	$110 \to 0$
$001 \to 1$	$011 \to 1$	$101 \to 1$	$111 \to 0$

allows to formulate the following interesting enough result [90], namely:

There are classical d-HS ($d \geq 1$) for which all constructible finite configurations from the set $C(A,d,\phi)$ are and absolutely constructible, also. There are d-HS without NCF (NCF-3) for which more half of all configurations of the set $C(A,d,\phi)$ are configurations NCF-1 whereas the other configurations of the set are absolutely constructible configurations.

Simple enough classical binary ***1-HS*** with neighborhood $X=\{0,1,2\}$ and local transition function defined by parallel substitutions of the kind, namely:

$000 \to 0$	$010 \to 1$	$100 \to 1$	$110 \to 0$
$001 \to 1$	$011 \to 1$	$101 \to 0$	$111 \to 0$

can be supposed as an example of the classical ***HS***-models for a basing of the second part of the above assertion. In addition, at least the configurations of the kind $c=□1□;\ c_j = □10x_1x_2x_3 \ldots x_n1□;\ x_j \in B;\ j=1..n$ will be in such ***1-HS*** as ***NCF-1***, whereas others – absolutely constructible ones.

Thus, on the one hand, for classical ***d-HS*** ($d \geq 1$) the set $C(A,d,\phi)$ cannot consist only from the absolutely constructible configurations whereas, on the other hand, exist classical ***d-HS*** for which all constructible finite configurations of the set $C(A,d,\phi)$ are absolutely constructible also. So, for classical ***HS***-models is given an opportunity to differentiate naturally not only nonconstructibility, but also constructibility of the finite configurations. And in it one of essential features of classical ***HS***–models consists. Indeed, the difference is more fundamental, above all, with respect to dynamics of such ***HS***–models, including their applied numerous aspects. In particular, namely classical ***HS***–models have interesting interpretations.

We shall explain a little bit more in detail the concept of *nonconstructibility* of the type ***NCF-3***. Formally, a finite ***CF*** $c^* = □c_b□\ \{c_b=x_1x_2 \ldots x_p;\ x_1,\ x_p \in B\backslash\{0\};\ x_j \in A;\ j=2..p\text{-}1,\ B=\{0,1\}\}$, being nonconstructible of the type ***NCF-3***, is defined by the following correlation:

$$(\forall c \in C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty))(c\tau^{(n)} \neq c^*)\ \&\ (\exists c \in C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty))(c_b \subset c\tau^{(n)})$$

As not trivial example of the classical ***1-HS*** with neighbourhood index $X=\{0,1,2\}$ we shall consider the structure, whose ***LTF*** $\sigma^{(3)}$ is defined by parallel substitutions of the following kind:

$000 \to 0$	$010 \to 1$	$100 \to 0$	$110 \to 1$
$001 \to 1$	$011 \to 1$	$101 \to 1$	$111 \to 0$

From the criterion of existence of ***NCF*** nonconstructibility in ***d-HS*** ($d \geq 1$) basing on the concept of ***γ-CF*** (theorem ***11***), it is simple to be convinced, that the classical binary ***1-HS*** determined thus possesses the nonconstructibility of type ***NCF***. The block configuration c_b=**<010100>** acts as a block-nonconstructible configuration, namely:

c^{-1}	–	–	–	0	1	0	0	0
c^{-1}	–	0	1	1	1	0	0	0
c^{-1}	–	–	–	–	0	0	0	0
c^{-1}	–	–	–	0	1	1	1	1
c^{-1}	–	–	–	–	–	1	0	0
$c_b=c^{-1}\tau^{(3)}$	0	1	0	1	0	0		

In that we can easily be convinced by means of simple *check* of absence for structure of predecessors c^{-1} as it follows from the above table. In addition, by the same way we can be convinced of possession by the structure the nonconstructibility such as ***NCF-1***, namely:

c^{-1}	...	–	–	0	1	0	0	0
c^{-1}	...	–	–	–	0	0	0	0
$c^{-\infty}$	...	1	1	1	1	0	0	0
c^{-1}	...	–	–	–	–	1	0	0
c^{-1}	...	–	–	0	1	1	1	1
$c_p=c^{-1}\tau^{(3)}$	...	0	0	1	0	0		

i.e. already simplest configuration c_p=□*1*□ is ***NCF-1***, since it has predecessors $c^{-\infty}$ from the set ***C(B,1,∞)*** only. On the other hand, the block configuration c_b=***<101>*** is constructible, what easily follow from the existence of the predecessor c^{-1} for it, namely:

c^{-1}	0	1	0	0	1
$c_b=c^{-1}\tau^{(3)}$	1	0	1		

Whereas the finite configuration ***c**** = □c_b□ for the structure is nonconstructible, namely:

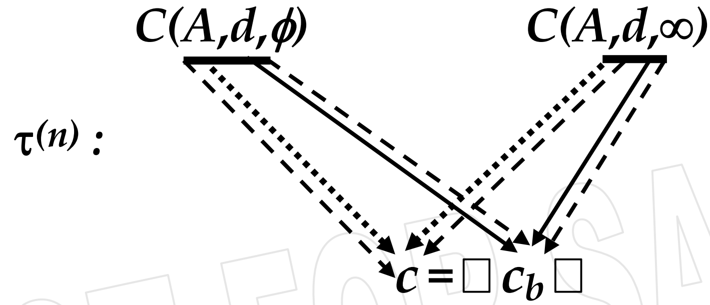
c^{-1}	–	–	–	–	0	1	0	0	0
c^{-1}	–	–	–	–	–	0	0	0	0
c^{-1}	–	–	0	1	1	1	0	0	0
c^{-1}	–	–	–	–	–	–	1	0	0
c^{-1}	–	–	–	–	0	1	1	1	1
$c^*=c^{-1}\tau^{(3)}$	0	0	1	0	1	0	0		

i.e. has not predecessors c^{-1} from the set ***C(B,d,ϕ)*** ∪ ***C(B,d,∞)***, being configuration-nonconstructible for the structure**.** Thus**,** in case of *block***-***constructibility* of configuration c_b**,** the configuration ***c****=□c_b□ can be *configuration***-***nonconstructible***,** i.e. to not have predecessors from the set ***C(A,d,ϕ)*** ∪ ***C(A,d,∞).*** Depending on the kind of ***LTF*** $\sigma^{(3)}$ of the above structure**,** we can enough simply be convinced, what for arbitrary configuration ***c***∈***C(B,1,ϕ)***, where **<*c*>**[$\tau^{(3)}$] **–** sequence of configurations *strictly* growing on length, what visually the following clear diagram illustrates, namely**:**

$$\begin{array}{rl|l|l}
\tau^{(3)}: & ...000 & 1x_2x_3\,...\,x_{n-2}\left\langle\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\rangle & 1000...\\
 & ...01x_o^* & x_1^*x_2^*x_3^*\,...\,x_{n-2}^*1 & 0000...
\end{array}$$

$$x_o^*, x_1^*, x_j, x_j^* \in B \qquad (j = 2..n-2)$$

Hence, for each pair of configurations c_o**,** ***c***∈***C(B,1,ϕ)*** the problem of membership ***c*** ∈ **<**c_o**>**[$\tau^{(3)}$] will be algorithmically solvable**.** A ***configuration-***nonconstructible ***CF c***= □c_b□ is characterized by circumstance that it has not predecessors from the common set ***C(A,d,ϕ)*** ∪ ***C(A,d,∞).*** Whereas a *block***-**nonconstructible configuration c_b has not predecessors from the common set ***C(A,d,ϕ)***∪***C(A,d,∞)*** such, that $c_b \subset c^{-1}\tau^{(n)}$**.** In the both cases we deal with with different types of nonconstructibility. Graphically the basic distinction between *configuration***-**nonconstructible ***CF c*** = □c_b□ and the ***block-***nonconstructible configuration c_b can be presented by the following rather transparent diagram, namely:



where: ▬ – existence of predecessors c^{-1} and .... – absence of predecessors c^{-1} in case of ***NCF-3;*** --- – absence of predecessors c^{-1} in case of nonconstructibility ***NCF***. From the given diagram the difference between nonconstructibility of type ***NCF-3*** and nonconstructibility of type ***NCF*** is rather transparent. If in the first case the nonconstructibility, named ***configurational***, concerns the finite configuration, in the second case we deal with *block constructibility*. In case of *configuration constructibility* (*nonconstructibility*) a finite configuration c^* has (*not*) predecessors from the set $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$ whereas in case of *block constructibility* (*nonconstructibility*) a block configuration c_b has (*not*) predecessors c^{-1} from the common set $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$ such, that $c_b \subset c^{-1}\tau^{(n)}$. Thus, it is possible to show [80], that the following useful result takes place, namely:

Classical d-HS ($d \geq 1$) possesses the nonconstructibility of type NCF and, probably, NCF-3 if and only if for it exist configurations $c \in C(A,d,\phi)$, not possessing predecessors c^{-1} from a set $C(A,d,\phi) \cup C(A,d,\infty)$. In addition, the problem of existence of such configurations for arbitrary classical d-HS is algorithmic solvable for $d = 1$ and is unsolvable for $d \geq 2$.

Moreover, the nonconstructibility of type ***NCF-3*** can be considered as a special subclass of the general nonconstructibility of type ***NCF;*** nonconstructibility of type ***NCF-3*** in a whole series of cases represents quite certain interest both for theoretical and applied considerations of classical ***HS***-models. First of all, it concerns cases of research of ***HS***-models as the formal parallel systems of processing of finite words in finite alphabets [80], and also at simulation in them at a formal level of a lot of processes, including processes of computing character. In a whole series of important enough cases, quite certain interest a series of results on the given type of nonconstructibility ***NCF-3*** represent, including using them as the compound components of own apparatus of researches of dynamics of the classical ***HS***-models [80,90]. The given circumstances underlie segregation in the class of nonconstructible configurations ***NCF*** of a special subclass ***NCF-3.***

The above-mentioned considerations have been considered by us [5,29,30] as one of approaches to the classification of dynamics of classical ***HS***-models in connection with discussion of a rather interesting work of ***A.W. Burks*** [314]. Afterwards, by systematizing ***HS***-models with respect to their behavior, ***S. Wolfram*** has allocated them into four classes similarly to our approach. Hence, the above-mentioned two classifications carry clearly «***phenomenological***» character and not give any recommendations for designing required rules of behavior of ***HS***-models; they only characterize possible types of dynamics as a whole. There are also other «***phenomenological***» criteria of classification of rules of behavior of the classical ***HS***-models on which we shall stop a shade lower. Whereas the transition graphs of *prehistories* (*predecessors*) of ***CF*** c_o from the set $C(A,d,\phi)$ belong to the following types, namely:

1. <u>Infinite nonperiodical</u> sequence of configurations from the set $C(A,d,\phi)$, namely:

$$\ldots \leftarrow c_{-j} \leftarrow \ldots \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

As examples the binary ***1-HS*** considered above with number ***39*** (***CF*** $\square 1^k \square \mid k=1..n$) can serve.

2. ***<u>Finite sequence</u>*** of configurations from the set ***C(A,d,ϕ):***

$$c_{-j} \leftarrow \ldots. \leftarrow c_{-2} \leftarrow c_{-1} \leftarrow c_o$$

Takes place, if ***CF*** c_{-j} is nonconstructible ***CF*** of ***NCF***-type. For example, for above-mentioned ***1-HS*** with number ***39***, one of possible sequences of *predecessors* for the ***CF*** c_o=□*1*□ has the following kind, namely: $c_{-3} = 101 \rightarrow 111 \rightarrow 11 \rightarrow 1 = c_o$, where ***CF*** □***101***□ is ***NCF.***

3. ***<u>Sequence of a pure cycle</u>;*** in addition, under the given definition a passive ***CF c ∈ C(A,d,ϕ)*** (*accurate to shift*) falls also, namely:

$$\begin{tikzcd} c_{-j} \arrow[rrrr, bend left, leftarrow] & \ldots. \arrow[l] & c_{-2} \arrow[l] & c_{-1} \arrow[l] & c_o \arrow[l] \end{tikzcd}$$

As examples the binary ***1-HS*** considered above with numbers ***45*** and ***101*** can serve.

4. ***<u>Sequence of the mixed type</u>;*** it is characterized by presence in it of certain ***CF*** c_{-j} for which *predecessors* can be from the set ***C(A,d,ϕ)***, from the ***C(A,d,∞)***, or from both sets simultaneously, namely:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \ldots. & c_{-j-p} \arrow[l] & \ldots. \arrow[l] & c_{-j-1} \arrow[l] & & & & & c_r \in C(A,d,\phi);\ r = 0..\text{-}j\text{-}p \\ & & & & c_{-j} \arrow[ul] \arrow[dl] & \ldots. \arrow[l] & c_{-2} \arrow[l] & c_{-1} \arrow[l] & c_o \arrow[l] \\ \ldots. & b_{-j-k} \arrow[l] & \ldots. \arrow[l] & b_{-j-1} \arrow[l] & & & & & b_q \in C(A,d,\infty);\ q = \text{-}j\text{-}1..\text{-}j\text{-}k \end{tikzcd}$$

As examples the binary ***1-HS*** considered above along with other types of ***HS***-models [54] can serve. In addition, it is possible to be convinced, transition graphs of *predecessors* such as ***(4)***, starting with ***CF*** c_{-j} admit the subgraphs of kinds ***(1)-(3).*** In the light of our results on the non-constructibility, problem the following guess can be formulated, namely: ***In general, the problem of classification of structures d-HS for d ≥ 2 according to types of their states graphs is algorithmically unsolvable.***

Our classification and similar to it classification of ***S. Wolfram*** of dynamics of classical ***HS***-models have especially «*phenomenological*» character and an appreciable classifying part do not play. They both have been obtained on the basis of experimentation with rather simple types of classical ***HS***-models and on especially speculative experiments. Meanwhile, a classification claiming to name itself like this, should provide direct or indirect algorithm allowing each classical ***HS***-model to ascribe to one or another type. However, both above-mentioned *classifications* do not allow to do it – for example, in view of existence of unsolvability of the problem of existence of ***NCF*** in the ***d-HS (d ≥ 2)*** we cannot already *differentiate* an arbitrary ***HS***-model concerning the above type ***4***. Impossibility of similar classification has been proved also by ***Culik K. II*** and ***Yu S.*** [555] being based on one unsoluble problem, namely: it cannot be decided whether all finite configurations of the given ***d-HS (d ≥ 2)*** become *quiescent* and therefore to which class it belongs. Some other rather interesting classifications have been proposed also. In particular, ***Langton C.*** has suggested that ***LTF*** of ***d-HS (d ≥ 1)*** can be parameterized by their **λ**-parameter, which measures the fraction of non-quiescence ***LTF*** $\sigma^{(n)}$. ***Dubacq J-C. et al.*** as well as ***Goldenfeld H.*** and ***Israeli N.*** have proposed the parameterization of ***LTF*** $\sigma^{(n)}$ of ***d-HS (d≥1)*** measured by their ***A. Kolmogorov*** complexity also [536,604]. Stochastic approach to classification can be found in work [569].

The method of ***NCF*** and ***NCF-1*** is a very powerful tool in analysis of ***HS***-models. The effectiveness of this approach depends very much upon the quantitative knowledge of *main* correlations between ***γ-CF, MEC, NCF*** and ***NCF-1*** on the level of *local* transition functions and *global* functions as well. At present, full knowledge of this topic does not exist. We represent certain individual results in this direction.

<u>Theorem 14</u>. Let $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\tau^{(p)}$ ***will be decomposition of a GTF*** $\tau^{(n)}$ ***into two functions*** $\tau^{(m)}$, $\tau^{(p)}$ ***of the same dimension 1 and defined in the same alphabet A. If GTF*** $\tau^{(m)}$ ***has not MEC and*** $\tau^{(p)}$ ***has a set D of γ-CF, then GTF*** $\tau^{(n)}$ ***has the same a set D of γ-CF. If GTF*** $\tau^{(m)}$ ***has not MEC and*** $\tau^{(p)}$ ***has MEC, then GTF***

$\tau^{(n)}$ has the same the set of NCF that GTF $\tau^{(n)}$. There is a GTF $\tau^{(m)}$ which has MEC with limited size of the minimal simple IB and NCF of any earlier given minimal size. There is GTF $\tau^{(n)}$ for which any pair of MEC contains NCF. Let GTF $\tau^{(n)}$ has a set M of pairs MEC; then GTF $\tau^{(n)m}$ ($m > 1$) has identical the set M of MEC with function $\tau^{(n)}$ if and only if at least one configuration of each pair MEC of M is NCF for GTF $\tau^{(n)}$. Otherwise, $(\forall k\geq 1)(M_k \subset M_{k+1})$ where M_k – the set of all pairs of MEC for GTF $\tau^{(n)k}$ ($k\geq 1$). Let $\tau^{(n)}=\tau^{(m)}\tau^{(p)}$ will be decomposition of GTF $\tau^{(n)}$ into two functions $\tau^{(m)}$, $\tau^{(p)}$ of the same dimension d and defined in the same alphabet A. Then GTF $\tau^{(n)}$ will have NCF if and only if at least one of global transition functions $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ will possess NCF. If at least one GTF of the pair $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ possesses a NCF-1 then GTF $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\tau^{(p)}$ will possess NCF-1 and/or NCF.

Theorem ***14*** takes place for basic ***HS***-models, and in view of it, it can be easily seen that there is global transition function $\tau^{(m)}$ with the different sets of ***MEC*** and with the same sets of ***NCF***. Therefore, on the grounds of this result we have the following rather interesting theorem.

<u>Theorem 15</u>. For each integer $n \geq 2$ there is a classical 1-HS for which minimal block sizes (B) of MEC and NCF are linked by the following correlations B(MEC)/B(NCF) = n or B(MEC)/B(NCF) = 1/(n+1) for the minimal B(γ-CF)=1, accordingly. For each integer $n \geq 2$ there is GTF $\tau^{(n)}$ of a classical 1-HS, which possesses no NCF and NCF-3, but which has NCF-1 of minimal size $L \geq n-1$. For each integer $n\geq 3$ there is GTF $\tau^{(n)}$ of a classical binary 1-HS which possesses γ-CF of minimal size n and IB MEC of minimal size L = 1. Let, an arbitrary structure d-HS ($d \geq 1$) possesses nonconstructibility of type NCF, then for minimal sizes of configurations NCF, γ-KΦ, and an inside block (IB) of MEC takes place the following correlation, namely:

$$L^{ncf}_{min} \geq L^{ibmec}_{min} \{\leq|\geq\} L^{\gamma}_{min}; \quad \text{where} \quad L^{ncf}_{min}, L^{ibmec}_{min}, \text{and } L^{\gamma}_{min} \text{ are minimal}$$
$$\text{sizes of the block configurations NCF, IB MEC, and } \gamma\text{-CF accordingly}$$

Amount of d–HS ($d \geq 1$) with alphabet A={0,1,...,a–1} and neighbourhood index X={0,1,...,n–1} possessing the configurations NCF and γ–CF of size 1 is defined by the formula $N(a,n) = \sum_{j=1}^{a-1} (-1)^{a+j+1} C_a^j \, j^{a^n}$.

Now, we shall consider similar questions for other concepts of nonconstructibility in the classical ***d-HS ($d \geq 1$) {NCF-1, NCF-2 and NCF-3}***, which according to theorem ***1*** can combine in very wide limits. Of definitions ***1-4*** and theorem ***1*** easily follows, that the configurations ***c∈C(A,d,ϕ)*** cannot be ***NCF, NCF-1, NCF-2*** and ***NCF-3*** simultaneously. Consequently, the intersections of any pairs of the nonconstructible configurations of the above types for any ***GTF*** are empty sets. The following theorem gives a criterion of the existence of ***NCF-1 (NCF-2)*** for a classical ***d-HS ($d \geq 1$)*** without ***NCF*** and ***NCF-3.***

<u>Theorem 16</u>. The set C(A,d,∞) is closed with respect to GTF $\tau^{(n)}$ of a classical d-HS ($d \geq 1$) if takes place

$$(\forall c` \in C(A,d,\infty))\ (c`\tau^{(n)} \in C(A,d,\infty))$$

in the opposite case the set C(A,d,∞) is not closed. A classical d-HS, which has not NCF-3 and/or NCF, possesses NCF-1 (NCF-2) if and only if the set C(A,d,∞) is not closed (is closed) with respect to global transition function $\tau^{(n)}$.

In view of our supposition that ***null***-configuration □ ∈ ***C(A,d,∞)***, result of theorem ***16*** can be formulated in other terms. In a series of cases the result represents the more comfortable *criterion* of existence of the nonconstructibility of types ***NCF-1*** and ***NCF-2*** for the *classical* ***d-HS*** which not possess ***NCF*** and ***NCF-3.***

<u>Theorem 17</u>. In a classical d-HS ($d \geq 1$) without NCF and NCF-3 exist NCF-1 (NCF-2) if and only if for their GTF $\tau^{(n)}$ exist (are absent) configurations c∈C(A,d,∞) such, that $c\tau^{(n)}$=□. In classical d-HS ($d \geq 1$) which not possess NCF exists nonconstructibility of type NCF-1 if and only if for their GTF $\tau^{(n)}$ exist configurations c∈C(A,d,∞) such, that $c\tau^{(n)}$ = □.

The theorem gives the more convenient criterion of the existence of ***NCF-1*** and ***NCF-2*** for the classical ***HS-***models, which not possess ***NCF*** and ***NCF-3.*** The concept of erasability ***(****existence of pairs of* ***MEC)*** is directly linked with the nonconstructibility problem in the classical ***HS-***models. For purposes of next generalization we have introduced a new more common concept of erasability in ***d-HS*** ***(d ≥ 1),*** and on the basis of such generalization a series of interesting *dynamic* properties of ***HS-***models was discovered.

<u>Definition 10</u>. Two configurations c_1, $c_2 \in C(A,d)$ ($c_1 \neq c_2$) form for GTF $\tau^{(n)}$ of a classical d-HS a pair of MEC-1 if and only if for these configurations takes place correlation $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c \in C(A,d,\phi)$.

On the basis of the above concept an *essential* generalization of the well-known ***Moore-Myhill*** criterion of the existence of ***NCF*** for the classical ***HS-***models was been given.

<u>Theorem 18</u>. A classical d-HS possesses types of nonconstructibility NCF (possibly, and NCF-3) and/or NCF-1 if and only if for structure there are pairs of MEC-1 ($d \geq 1$). If such structure not possess MEC-1, then the structure possesses NCF-1; inverse affirmation is wrong in general case.

The concept of nonconstructibility of type ***NCF-3*** is result of direct consequence of difference between configuration nonconstructibility and block nonconstructibility. The following theorem represents the criterion of existence of nonconstructibility of type ***NCF-3.***

<u>Theorem 19</u>. A configuration $c = \square c_b \square$ for classical 1-HS is nonconstructible of type NCF-3 if and only if a block configuration c_b for the structure is constructible whereas the block configuration $c^*_b = 0^m c_b 0^m$ ($m \geq a^n + n - 1$) is NCF.

Particular interest is due to the algorithmic aspect of the nonconstructibility problem, presented in item **2.3.** The basic results in this direction can be formulated as follows.

<u>Theorem 20</u>. With respect to an arbitrary block configuration c_b or finite configuration c^*, the problem of determination of its type (constructible, NCF, NCF-1, NCF-2, NCF-3) for arbitrary classical 1-HS is algorithmically solvable.

<u>Theorem 21</u>. Problem of existence for a classical 1-HS nonconstructibility of types NCF, NCF-1, NCF-2 and NCF-3 is algorithmically solvable. The problem of existence for a classical 1-HS the combinations of nonconstructibility types according to the table 1 is algorithmically solvable. Problem of existence for a classical d-HS ($d \geq 2$) nonconstructibility of type NCF is algorithmically unsolvable.

According to theorems *5* and *8* the problem of existence of pairs of ***MEC*** (*and* ***NCF)*** for classical ***1-HS*** is algorithmically solvable. The following theorem gives similar result for the general case of the ***MEC-1.***

<u>Theorem 22</u>. The problem of existence of pairs of MEC-1 for classical 1-HS is algorithmically solvable. Problem of existence of pairs of MEC-1 for a classical d-HS ($d \geq 2$) is algorithmically unsolvable. The problem of existence of NCF-1 for classical d-HS ($d \geq 1$) without NCF (probably, NCF-3) is solvable for $d = 1$ and is unsolvable for $d \geq 2$.

The properties of parallel maps defined by ***GTF*** $\tau^{(n)}$ of the classical ***HS-***models play fundamental part in the study of theoretical properties of ***HS-***models. Many scientists have worked in this direction and their results are well known. Our basic results in this direction can be presented as follows.

<u>Theorem 23</u>. Problems of determination of the one-to-one correspondence of parallel global maps $\tau^{(n)}$: $C(A,\phi) \rightarrow C(A,\phi)$, $\tau^{(n)} : C(A,\infty) \rightarrow C(A,\infty)$ and $\tau^{(n)} : C(A) \rightarrow C(A)$ for a classical 1-HS are algorithmically solvable. Problem of existence for a parallel global map $\tau^{(n)}$: $C(A) \rightarrow C(A)$ the inverse parallel map τ_n^{-1} for case of an arbitrary classical 1-HS is algorithmically solvable.

In this connexion the ***T. Yaku*** has proved the following interesting result: ***The problem of existence for an arbitrary configuration $c \in C(A,d)$ in the classical d-HS ($d \geq 2$) of the predecessors is algorithmically unsolvable.*** For the ***1-***dimensional case we have the opposite result which is founded on the following theorem.

***Theorem 24**. Problem of determination of predecessors and their types for an arbitrary configuration c from set C(A,1,ϕ) in the classical structures 1-HS is algorithmically solvable.*

In particular, on the basis of the above ***1-HS*** with number ***102*** the following result can be proved:

Absence for classical HS-models of nonconstructibility of NCF-type is necessary, but not sufficiently for guarantee of reversibility of their dynamics relative to finite configurations.

Results presented in chapter **2** solve the nonconstructibility problem in the classical ***d-HS*** as a whole. More special results in the direction are numerous and allow us to investigate the nonconstructibility problem in detail. Along with that, the results in this direction allow to form rather effective methods for investigation of dynamics of the classical ***d-HS (d ≥ 1)***. A series of the similar results are discussed below; many rather interesting results in this direction can be found in our monographs and in articles presented in references to the present monograph and in rather extensive bibliography [536].

The special questions linked with the nonconstructibility problem are considered in item **2.4**. Closely connected to ***Yamada-Amoroso*** *completeness* problem is problem of existence of *universal configurations* ***(UCF)*** for the classical ***d-HS*** which was formulated by ***S. Ulam*** for the case of regular lattice. It can be formulated as follows: ***Whether exists a finite configuration (finite set of configurations) for the given monogenic d-HS from which the set C(A,d,ϕ) can be generated by means of GTF $\tau^{(n)}$ of a certain HS?***

***Definition 11**. The set of configurations $c_k \in C(A,d,\phi)$ composes for GTF $\tau^{(n)}$ of a classical d-HS the set of universal configurations (UCF), if $\cup_k \langle c_k \rangle [\tau^{(n)}] = C(A,d,\phi)$ (k=1 .. p).*

In some sources the question relative to so-called ***«minimal» HS***-models which ***S. Wolfram*** defines as follows: ***Starting with a finite configuration c*, a minimal CA is one in which subsequent generations contain all finite configurations*** was being enough actively discussed; i.e. in our terminology for such ***HS***-models the following relation should be carried out, namely:

$$(\exists c_o \in C(A,d,\phi))\left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\left\{c_j\tau^{(k)j}\right\} = C(A,d,\phi)\right) \qquad (\lambda)$$

First of all, in our opinion, the term ***«minimal»*** insufficiently correctly reflects essence of the question as it concerns, first of all, complexity of the ***HS***-models which as the rule, is defined by dimensionality, the neighbourhood index ***(****size of the neighbourhood pattern****)*** and cardinality of alphabet of internal states of an individual automaton of structure ***d-HS=<Z^d, A, $\tau^{(n)}$, X>***, i.e. by value ***SL=dxnx#(A)***, where ***#(A)*** – cardinality of the set ***A***. Many considerations about the possibility of existence of such structures have been adduced; in reality, concrete examples of such type of ***HS***-models were based only on empirical considerations. Our results [5,54] prove impossibility of existence of classical ***HS***-models satisfying the relation ***(λ)***. Using the above results on the nonconstructibility problem, we have shown that the given problem has negative solution for an arbitrary classical ***d-HS (d ≥ 1)***.

***Theorem 25**. For an arbitrary classical d-HS (d ≥ 1) there is not a finite set of universal configurations.*

Theorem **25**, to some degree, has something in common with the concept of complexity of the finite ***CF*** in the classical ***d-HS***, introduced below. Furthermore, under certain conditions the following stronger result takes place. This result allows to clarify certain precise properties of nonconstructibility problem for the classical ***HS***-models.

***Theorem 26**. If for arbitrary classical d-HS (d ≥ 1) without NCF exists a set G of NCF-1 then not exist a finite set of configurations $c_j \in C(A,d,\phi)$ such, that the following relation takes place, namely:*

$$\boxed{\bigcup_j \langle c_j \rangle \left[\tau^{(n)}\right] = C(A,d,\phi) \setminus G \qquad (j = 1..p)}$$

On the basis of an algebraical approach and the results in the *nonconstructibility* problem we proved the more strong result, which essentially generalizes the above theorem.

<u>Theorem 27</u>. Let $\tau^{(n)}$ will be an arbitrary GTF $\tau^{(n)}$ of classical d-HS with alphabet A (a – prime), which possesses a set GSAK of NCF and, possibly, NCF-3 and/or NCF-1. Then, there is not the d-dimensional finite sets of finite configurations $c_j \in C(A,d,\phi)$ and GTF $\tau^{(n_j)}$ in alphabet A=$\{0,1,2, ..., a\text{-}1\}$ such, that the following two correlations take place, namely:

$$\boxed{1)\ \bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n_j)}\right] = C(A,d,\phi) \setminus GSA \quad or \quad 2)\ \bigcup_j < c_j > \left[\tau^{(n_j)}\right] = GSA \qquad (d \geq 1;\ j = 1..p)}$$

On condition that alphabet A (a – composite number) is used, takes place the above formulation of the result with the second correlation, only; analogous result takes place for case of A (a – prime) and the nonconstructibility of type NCF-2, i.e. GTF $\tau^{(n)}$ possesses a set GSAK of NCF-2.

Structures with *refractority* ***d-HSR(r,P)*** represent the undoubted interest from many points of view. The general object in such ***HS***-models – investigation of dynamic distribution of individual automata in the excited states «*1*» in conformity with an initial configuration c_o, a neighbourhood index ***X*** and depth ***r*** of refractority. We have studied the most general properties of ***d-HSR(r,P)*** by means of both theoretical approaches and computer modelling.

Formal grammar theory ***(FGT)*** is a part of the automata theory. Therefore, study of ***HS*** dynamics from the point of view of the ***FGT*** is undoubtedly deserve attention, and a series of our works are devoted to these problems. Parallel $L(\tau_n)$-languages introduced by us in ***1974*** can be defined as the set of all finite configurations generated by ***GTF*** $\tau^{(n)}$ of the classical ***1-HS*** from certain initial configuration c_o ***(axiom)***. In this case the ***HS***-models can be considered as the formal *parallel* grammars ***(τ_n-grammars)***, which do not use nonterminal symbols whereas processing in their is being done by absolutely parallel manner. Questions of parallel grammars of such type are considered in the *fifth* chapter of the monograph.

Thus, τ_n-grammars are similar to the well-known ***Lindenmayer*** systems and can be used for linguistic description of many parallel discrete systems and processes. We have investigated the ***τ_n-grammars*** in conformity with traditions of the ***FGT*** with respect to a series of important characteristics of such class of parallel grammars. The results in this direction are presented in our monograph [5], which contains the systematic exposition of the τ_n-grammars theory.

Furthermore, many results in τ_n-grammars were applied to the case of nondeterministic T_n-grammars. Thus, we proved that the families of languages $L(\tau_n)$, and $L(T_n)$ reveal an extra-ordinary resistance to traditional closure operations. It is shown that τ_n-grammars are equivalent to *parallel programmed* array grammars, and that there is a certain constructive unilateral bridge from parallel array grammars to τ_n-grammars.

A whole series of received results on grammars τ_n, and T_n had shown that the traditional approach to implementation of programming languages for *homogeneous* computer systems will not allow to create actually effective parallel software which might use maximal degree of paralleling admitted by similar structures of finite automata. In our opinion, grammars τ_n and T_n are powerful means of mathematical semantics both for microprogramming languages of parallel *microprogrammed* computational structures and for description of many kinds of cellular systems of the different purposes.

Extremal constructive opportunities of the classical ***HS***-models are considered in the third chapter of the present monograph. In contrast to *nonconstructibility*, study of general properties which reflect *maximal* constructive possibilities of the classical ***HS***-models, represent great interest and a series of the results in this direction are presented in item **2.4.** One of them can be the so-called universal *reproducibility*, i.e. each finite configuration in a classical sreucture ***d-HS (d≥1)*** is self-reproducing in the Moore sense. The Moore definition captures the essence of reproducibility and allows us to concentrate only on it.

Definition 12. We shall say that configuration $c \in C(A,d,\phi)$ contains p copies (with accuracy to rotation and shift of homogeneous space Z^d) of the block configuration c_b if there are p disjoint subsets of the Z^d, and each of these subsets contains at least one copy of block configuration c_b. Finite configuration $c_o \in C(A,d,\phi)$ is self-reproducing in the Moore sense for classical d-HS (d≥1), if for any in advance given integer $m > 0$ there is integer $t > 0$ such that configuration $c\tau^{(n)t}$ contains at least m copies of the initial configuration $c_o \in C(A,d,\phi)$.

A series of scientists investigated this question and with the help of their efforts a class of *linear classical* ***d-HS (d≥1)*** was discovered. The local transition function $\sigma^{(n)}$ of such structures can be characterized by the following algebraical function, namely:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k * x_k \pmod{a} \\ x_n, b_k \in A = \{0,1,2,\dots,a-1\};\ k = 1..n;\quad a\text{ - prime} \end{array}}$$

This class of linear classical ***d-HS*** possesses the universal reproducibility of finite configurations in the Moore sense. The following theorem summarizes results of such scientists as ***Amoroso, Cooper, Smith, Fredkin, Winograd, Ostrand, Waksman,*** and others [54-56,88,90,536].

Theorem 28. In a linear d-dimensional classical HS-model with an arbitrary alphabet A={0,1,2, ..., a-1} (a – prime) any finite configuration C is being self-reproduced in the Moore sense.

Using the result of theorem ***150*** [5], we essentially have generalized the above result, namely.

Theorem 29. An arbitrary classical d-HS (d≥1) with local transition function $\sigma^{(n)}$ of the following kind

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k * x_k\right)^{a^m} \pmod{a}$$

where $a = p^k$ (p – prime number; m, k – positive integers; $b_j, x_j \in A$; $j = 1..n$) has all finite configurations as self-reproducing in Moore sense; in addition, the similar d-HS admits both connected neighborhood template, and disconnected at least with two elementary automata in each of d dimensions.

Specifically, ***LTF*** $\sigma^{(n)}$ for such *generalized linear* ***1-HS*** with alphabet ***A={0,1, ..., a-1}*** and neighbourhood index $X = \{j_1, j_2, \dots, j_p\}$ $(0 = j_1 < j_2 < \dots < j_p = n-1)$ has the following kind, namely [54-56,88]:

$$\sigma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=j_1}^{j=j_p} x_j \pmod{a}; \quad (0 = j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_p = n-1; \quad 2 \le p \le n);\ a = p^k$$

As a result of both analytical research, and computer simulation of structures from class of ***generalized linear 1-HS,*** we have obtained a whole series of rather interesting results relative to self-reproducing finite configurations in Moore sense [54-56]. Thus, self-reproducibility of finite ***CF*** had been discovered for ***d-HS*** whose alphabet ***A*** not fulfill condition $\#A=p^k$. It is necessary to note that ***d-HS*** of such type is only one out of several known ones at the present time. In this connexion it is very interesting to obtain the ***criterion*** of the existence of self-reproducing finite configurations in classical ***d-HS (d ≥ 1). Are there other classes of similar classical HS-models, and how they can be characterized?*** In this direction the following interesting enough result can be presented [88,90].

<u>Theorem 30</u>. Set P of all linear classical d-HS with the alphabet A={0,1,2,...,a-1} and GTF $\tau^{(n)}$ ($n \geq d+1$) together with set of all structures whose LTF $\sigma^{(n)}$ are formed by a composition of global functions of structures from P, form a semigroup concerning property of universal self-reproducibility in the Moore sense of finite configurations. There are nonlinear classical d-HS (d≥1) that have property of universal self-reproducibility in the Moore sense.

A number of special results in this directions can be found in our books [1,3,5,8,9]. Class of the classical ***HS-***models with universal reproducibility is attractive in many respects. Results in this direction allow to discover a series of useful correlations between the *nonconstructibility* and the *universal reproducibility* in the classical ***HS-***models, and to solve a number of mathematical problems as shown, for example, in item **2.4.**

<u>Theorem 31</u>. Existence of nonconstructibility of type NCF-1 without NCF and NCF-3 for an arbitrary classical HS-model is necessary condition (but not sufficient), in order that model possesses universal reproducibility in the Moore sense.

From the point of view of the above results the following *extremely* interesting problem can be solved**,** namely**:** ***Can a classical d-HS double an arbitrary finite configuration?*** This problem has the negative solution [88,90].

<u>Theorem 32</u>. There are not classical d-HS (d ≥ 1) which can double an arbitrary finite configuration.

On the basis of theoretical and computer analysis of the classical ***1-HS*** with symmetrical ***LTF (GTF)*** we can formulate the following extremely interesting hypothesis**:** ***Arbitrary classical structure 1-HS with symmetrical GTF $\tau^{(n)}$ (n≥3), which has NCF-1 without NCF (NCF-3), possesses possibility of universal or essential nonconstructibility of finite configurations.***

A new class of the classical ***HS–***models possessed by a considerable extent the reproductibility of finite configurations, can be defined on the basis of a special algebraical system [5,9] ***AS = <A_a; +; #>,*** where alphabet ***A_a={0,1, ..., a-1} (a –*** *composite number*)**, *(+)* –** operation of addition ***(mod a)*** and ***(#) –*** operation of multiplication, which is defined by the table **2** presented below. This algebraical system has a whole series of interesting enough applications, including mathematical ones. In particular, the system can be useful for problems of polynomial arithmetics.

multiplication-table 2

#	0	1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	a-6	a-5	a-4	a-3	a-2	a-1
0	0	0	0	0	0	0	.	.	.	.	.	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	.	.	.	.	.	a-4	a-3	a-2	a-1	0	a-1
2	0	2	3	4	5	6	.	.	.	.	.	a-3	a-2	a-1	0	a-1	1
3	0	3	4	5	6	7	.	.	.	.	.	a-2	a-1	0	a-1	1	2
4	0	4	5	5	7	8	.	.	.	.	.	a-1	0	a-1	1	2	3
5	0	5	6	7	8	9	.	.	.	.	.	0	a-1	1	2	3	4
6	0	6	7	8	9	10	.	.	.	.	.	a-1	1	2	3	4	5
.....	...	....	.....	.....	...	...	.	.	.	.	.	.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	...	....	.....	.....	...	...	.	.	.	.	.	.....	.....	.....	.....	.....	.....
a-3	0	a-3	a-2	a-1	1	2	.	.	.	.	.	a-9	a-8	a-7	a-6	a-5	a-4
a-2	0	a-2	a-1	1	2	3	.	.	.	.	.	a-8	a-7	a-6	a-5	a-4	a-3
a-1	0	a-1	1	2	3	4	.	.	.	.	.	a-7	a-6	a-5	a-4	a-3	a-2

On the basis of this *algebraic system* ***(AS)*** a series of interesting enough results on dynamics of classical ***HS-***models with arbitrary alphabet ***A={0,1,2,3,4, ..., a-1} (a –*** *an arbitrary integer*) had been obtained**.** In particular**,** on the basis of the above ***AS*** can be defined an interesting enough class of the classical ***1-HS*,** whose local transition function is defined by the parallel transition rules of the following kind, namely**:**

$$\begin{cases} x_1x_2x_3\cdots x_n \to x_1^1 = 0, & \text{if } (\forall k)(x_k = 0) \\ x_1x_2x_3\cdots x_n \to x_1^1 = \prod\limits_{k=1}^{n}{}_{\#}\, \delta(x_k), & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_k,\ x_1^1 \in A; \quad k = 1..n$$

$$\delta(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where **#**-multiplication is defined by table **2.** Let ***S(a,m)*** be the set of all finite configurations of the kind $c = \square x_1x_2x_3x_4 \ldots x_m \square$ for $x_k \in A\backslash\{0\}$ $(j=1..m)$, and $\Sigma(a,m)$ be the set of all finite configurations of length m. Consequently, the density $\Xi(a,m) = S(a,m)/\Sigma(a,m)$ has asymptotic behaviour defined by the following correlations, namely:

$$\lim_{m\to\infty} \Xi(a,m) = 0 \qquad\qquad \lim_{m\to\infty} \Xi(a,m) = 1$$

$$\lim_{m\to\infty} \Xi(a,m) = \lim_{a\to\infty} \Xi(a,m) = e^{-1/p}, \quad \text{if} \quad \lim_{m,a\to\infty} a/m = p = const$$

In such a manner, under certain circumstances the set ***S(a,m)*** of finite configurations, self-reproducing in the Moore sense, can serve as characteristic of the so-called ***considerable self-reproductability*** in the classical ***HS***-models [88]. In items **2.4, 3.3** some interesting discussions about the problems is presented. Similar questions can be found in our books presented in References.

In the *fourth* chapter of the monograph the problem of *complexity* of finite configurations for ***HS***-models is discussed. ***Complexity*** is one of the most intriguing and vague concepts of the modern science. We assume that namely the intuitive essence forms the basis for such situation. The well-developed theory of *computational complexity* within computer science and modern approaches to estimation of *complexity* of growing self-organizing cellular systems corroborate the above-said. At present, we know only three more famous approaches to definition of ***complexity*** of the finite objects: ***combinatorial, probabilistic*** and ***algorithmical.*** For the last case ***A. Kolmogorov*** has defined the relative complexity of certain finite object ***G*** (*relative to an object* ***S***) by minimum length of Turing machine program of deriving ***G*** from ***S***. Our approach can also be called *algorithmical* but it essentially differs from approach of ***A. Kolmogorov.*** Essence of our concept of complexity consists in estimation of complexity of generating arbitrary finite configuration from some primitive configuration c_p by means of the finite number of global transition functions $\tau^{(n)}$ of some finite basic set T_f.

Our concept of complexity is based on two fundamental results. The first result ascends to ***Kimura*** and ***Maruoka (1974).*** This result characterizes the constructive possibilities of the ***polygenic HS***-models and can be formulated as follows.

<u>Theorem 33</u>. An arbitrary non-zero d-dimensional configuration c* from set C(A,d,ϕ) can be generated from a primitive configuration $c_p \in C(A,d,\phi)$ ***by means of a certain finite sequence of global transition functions*** $\tau^{(n)}$ ***of a polygenic d-HS*** $(d \geq 1)$.

On the other hand, we have obtained the second fundamental result at ***1985*** [5,55]. Result characterizes the dynamic properties of the classical ***monogenic HS***-models and can be formulated as follows.

<u>Theorem 34</u>. For an arbitrary finite alphabet A there are not finite sets of configurations $c_k \in C(A,d,\phi)$ ***and global transition functions*** $\tau_k^{(n_k)}$ ***which are defined in the same alphabet A for which takes place the following correlation, namely:***

$$\boxed{\bigcup_k < c_k > \left[\tau_k^{(n_k)}\right] = C(A,d,\phi) \qquad (k = 1..p)}$$

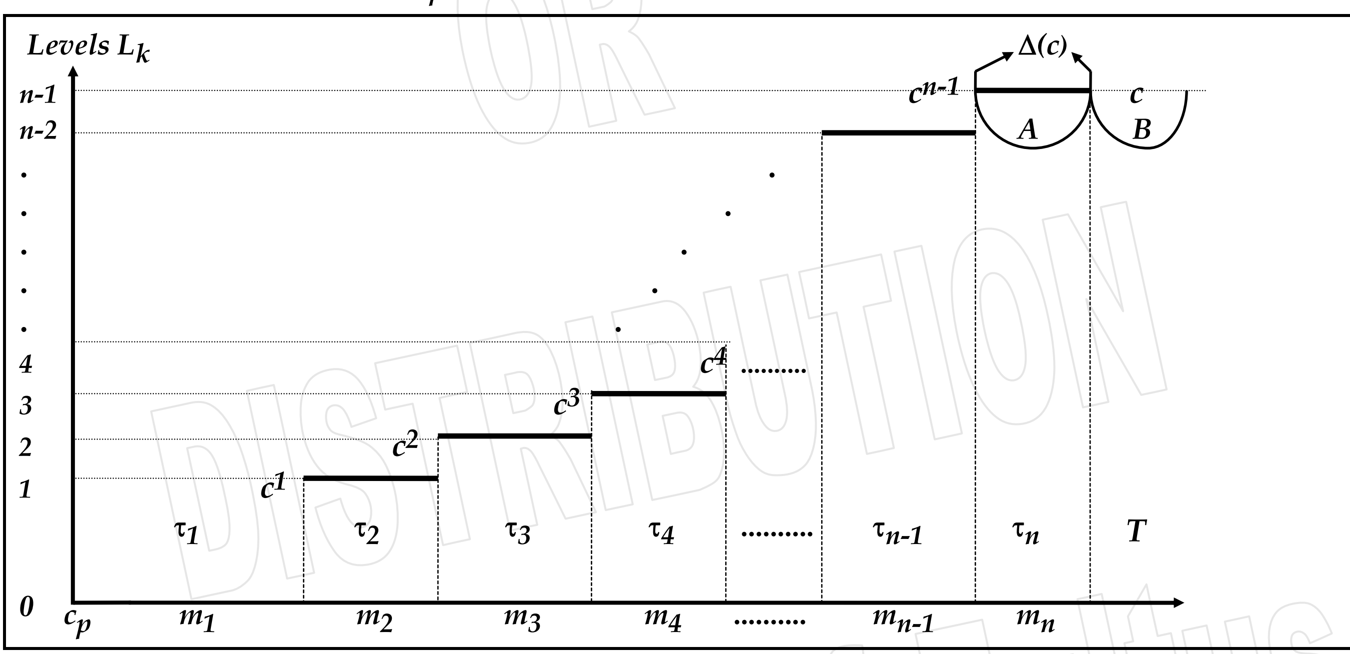
Let G_f be a finite set of ***d***-dimensional ***GTF*** $\tau_k^{(n_k)}$, defined in alphabet ***A***, on the basis of which we can generate an arbitrary finite configuration ***c*** from a certain primitive configuration $c_p \in C(A,d,\phi)$ during finite number of steps of a certain polygenic ***d-HS***, i.e. the following derivative rules exist, namely:

$$c = c_p\tau_1^{m1}\tau_2^{m2}\tau_3^{m3}\ldots\tau_n^{mn} \qquad (\tau_k \in G_f\,;\ \tau_j \neq \tau_{j+1};\ k = 1..n;\ j = 1..n-1) \qquad \textbf{(1)}$$

where m_k denotes ***m_k-tuple*** application of ***GTF*** $\tau_k \in G_f\ (k = 1\ ..\ n)$. In this case, it is said, a configuration $c \in C(A,d,\phi)$ is generated from *primitive* configuration $c_p \in C(A,d,\phi)$ during at least $p = \Sigma_k m_k$ steps of ***GTF*** $\tau_k \in G_f\ (k=1\ ..\ n)$. We shall say that two global transition functions $\tau_i, \tau_j \in G_f$ are ***different*** $(\tau_i \neq \tau_j)$ if and only if $(\exists c \in C(A,d,\phi))(c\tau_i \neq c\tau_j)$. If in derivative sequence ***(1)*** there are ***(n-1)*** pairs $<\tau_i, \tau_j>$ $(j=1..n-1)$ of the different ***GTF***, then we shall say that in generation of a configuration ***c*** from primitive configuration c_p there are ***(n-1)*** of levels L_k, which are defined by the following function, namely:

$$L_k = \begin{cases} 1, \text{ if } & \tau_k \neq \tau_{k+1} \\ 0, \text{ otherwise} & \end{cases} \qquad (k = 1..n-1)$$

The following picture splendidly illustrates the generating process of an arbitrary finite configuration ***c*** from a primitive configuration c_p, namely:



This picture can serve as a rather good illustration for many considerations linked with our concept of ***complexity***. Then, the ***complexity*** of an arbitrary configuration $c \in C(A,d,\phi)$ can be defined as follows.

<u>Definition 13</u>. The complexity (SL) of an arbitrary configuration $c \in C(A,d,\phi)$ of a structure d-HS $(d \geq 1)$ is being calculated according to the following formula, namely:

$$SL(c) = \min_{\tau_k \in G_k} \prod_{k=1}^{n-1} P_k^{m_k} \qquad (2)$$

where P_k is the k-th prime number whereas values m_k are defined from the sequence (2).

On the basis of the definition a series of important properties of the finite configurations in *classical* and *polygenic* ***d-HS*** $(d \geq 1)$ were received. These properties are characterized with respect to the introduced concept ***(2)*** of complexity [3,5,9]. The following theorem presents a series of the results in this direction.

Theorem 35. ***For an arbitrary integer d ≥ 1 the set G of all d-dimensional finite configurations contains configurations of any earlier given complexity with respect to an arbitrary finite basic set G_f of the d-dimensional GTF $\tau_k(^{n}k)$, defined in a certain finite alphabet A of classical structures d-HS (d ≥ 1).***

A series of the more special results in this direction and interesting consequences can be found in our works presented in References. On the basis of theorem ***34*** and a whole series of other our results in the direction the result which plays an extremely important part both for investigation of *dynamic properties* of *classical* ***HS***-models and for further development of the *complexity concept* of the finite configurations, can be expressed by the following theorem.

Theorem 36. ***For any dimensionality d ≥ 1 there is GTF $\tau \notin G_f$, which generates finite configurations of any earlier given complexity in the sense of definition 13 from a certain configuration $c \in C(A,d,\phi)$ of a limited complexity.***

This result generates a whole series of interesting questions, one of which is question about number of configurations of the same ***complexity*** with respect to the given ***basic*** set G_f. The following important result allows to make clear this question.

Theorem 37. ***There is infinite quantity of the basic sets G_f of d-dimensional GTF, defined in alphabet A, relative to each of which the infinite sets of finite configurations of the same complexity exist.***

In connexion with the concept of complexity defined above, an interesting question about the ***minimal*** basic set G_f of the global transition functions arises. In the general case, this question is open, however in case of class of the binary ***GTF*** a series of interesting results in this direction have been received.

Theorem 38. ***Exists a minimal basic set G_f, which contains four 1-dimension binary GTF $\tau_k(^{n}k)$ (k=1..4) only; at least one GTF of set G_f possesses nonconstructibility of type NCF-1. With respect to minimal basic set G_f of 1-dimensional binary GTF there are infinite sets of the finite configurations of the same complexity in the sense of definition 13.***

Theorem 39. ***The minimal basic set G_f contains four 1-dimensional binary GTF, whose corresponding local transition functions are defined by parallel substitutions (3.a .. d); global transition functions of such set G_f possess types of nonconstructibility according to the table 3. The minimal basic set G_f for 1-dimensional non-binary case consists of the GTF $\tau_k(^{n}k)$ (k = 1 .. 4) which possess NCF and/or NCF-1, NCF-2 and, possibly, NCF-3.***

$$
\begin{array}{ll}
000 & \Rightarrow \\
001 & \Rightarrow \\
010 & \Rightarrow \\
011 & \Rightarrow \\
100 & \Rightarrow \\
101 & \Rightarrow \\
110 & \Rightarrow \\
111 & \Rightarrow \\
 &
\end{array}
\left[\begin{array}{c} 0\\1\\0\\1\\0\\1\\1\\0\\(a)\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} 0\\1\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\(b)\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} 0\\1\\0\\0\\1\\1\\0\\0\\(c)\end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{ll}
00 & \Rightarrow \\
01 & \Rightarrow \\
10 & \Rightarrow \\
11 & \Rightarrow \\
 &
\end{array}
\left[\begin{array}{c} 0\\1\\1\\1\\(d)\end{array}\right]
\qquad (3)
$$

Table 3

LTF\NCF	*NCF*	*NCF-1*	*NCF-2*	*NCF-3*
(21.a)	*no*	*yes*	*no*	*no*
(21.b)	*no*	*yes*	*no*	*no*
(21.c)	*yes*	*yes*	*no*	*no*
(21.d)	*yes*	*no*	*yes*	*yes*

The result of the above theorem characterizes the constructive possibilities of ***1-**dimensional binary* ***GTF*,** which compose the ***minimal*** basic set G_f. Furthermore, the result has allowed to solve a whole series of problems from our monographs [3,5,12] and can be used for investigation of the complexity problem in ***1-**dimension* case with an *arbitrary* alphabet ***A*.** On the basis of the theorem the more *simple substantiation* for the introduced concept of complexity in ***1-***dimensional binary case can be presented**.** Result of such substantiation can be easily formulated in the form of the following theorem.

Theorem 40. An arbitrary 1-dimensional binary configuration $c \in C(B,1,\phi)$ is monotonously generated from primitive configuration $c_p = \langle 1 \rangle$ by means of a GTF $\tau_k^{(n)}$ of some fixed finite set GSV. At the same time, there is not a finite system of pairs $\{c_k, \tau_{jk}^{(n_k)}\}$ such that the following correlation takes place:

$$\boxed{\bigcup_k < c_k > \left[\tau_{k_j}^{(n_k)}\right] = C(B,1,\phi); \quad c_k \in C(B,1,\phi);\ n_k \in \{2,3\};\ j_k \in \{0,1,2,3\} \qquad (k = 1..p)}$$

The set GSV of the binary global transition functions (GTF) can be chosen as a set G_f relative to which the concept of complexity of 1-dimensional binary finite configurations is defined.

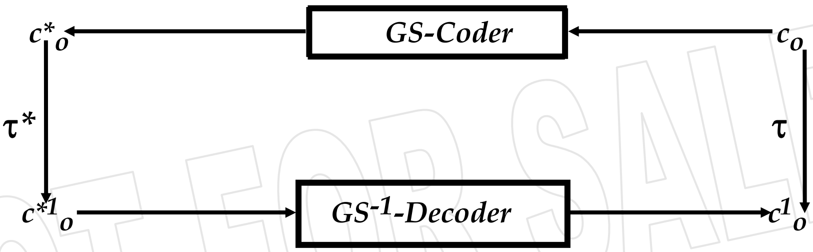
The above theorem ***40*** allows the generalization upon the case of an arbitrary alphabet ***A*** and the more general types of the finite systems of pairs $\{c_k, \tau_{jk}^{(n_k)}\}$**.**

On the basis of the introduced concept of ***complexity A(X)*** of finite configurations, we have presented solutions of a series of problems in the ***HS*** theory**.** A relation between ***A(X)*** and other known measures of *complexity* is presented. Of our results in the direction, in particular, follows, that *classical* ***HS-***models are not the finite axiomatizable formal systems, i.e. it is impossible to define a finite set of axioms (*finite configurations***)*** from which the set ***C(A,d,ϕ)*** of all finite configurations in an arbitrary classical ***HS-***model can be generated. In the set ***C(A,d,ϕ)*** the *infinite hierarchy* of complexity can be established. A number of presented results on the complexity problem of finite configurations in classical ***HS-***models allow us to identify the certain profound distinctions between *parallel* and *sequential* formal information processing models.

In the ***sixth*** chapter the problem of ***modeling*** which plays a very important part in the ***HS*** theory itself and in its numerous applications is discussed**.** General aspects of the problems are linked with *modeling* of one ***HS*** by another: real-time modeling, modeling with suppression of certain properties of modeled ***HS*,** simplification of characteristics of modeled ***HS*,** and optimal modeling**.** We have made an attempt to obtain the optimal modeling technique. In connexion with that, the concept of ***T-modeling*** had been introduced which turned out is very suitable also for many applications of the ***HS*** theory. On the basis of the introduced concept we carried out a detailed study of the multifold problem of modeling for the classical ***d-HS*.** In the chapter a series of algorithms and principles of self-recovering in real ***HS-***models is presented, which can be useful for a practical constructing in the *homogeneous* computing structures on the basis of ***HS-***models. Along with applied aspects on the basis of ***T-***modeling a sufficiently wide class of theoretical problems was investigated such as**:** universal computability and parallel algorithms, classes of paralleling**,** reversibility of modeling and so on. The theoretical results have allowed to make clear a number of *underlying* properties of ***HS-***models as both a formal model of parallel computations and as a new environment for modeling of various kinds of parallel discrete processes, algorithms and phenomena.

A number of scientists has dealt with the problem of modelling of one classical ***d-HS*** by another, from which works of ***H. Yamada, S. Amoroso, E. Codd, H. Nishio, A.R. Smith, A. Adamatzky, T. Toffoli, N. Margolus, E. Banks, J.J. Battler, B. Chopard, A.S. Podkolzin, A. Ilachinski, V.B. Kudrjvcev, M. Sipper, V.Z. Aladjev*** along with some others can be recommended. Enough detailed discussion of underlying results on the problems can be found in books [1,4,5,8]. In the item ***6.1*** of the sixth chapter our concepts of modelling in the classical ***d-HS*** ***(d≥1)*** are introduced and certain related results are presented.

In the end, we introduce the concept of ***1-modelling*** of one ***d-HS*** by another ***d-HS*** $(d \geq 1)$, definition of which can be illustrated by the following diagram. The *diagram* enough lucidly illustrates the principle of modelling of an arbitrary classical ***d-HS*** by other one of the same type.



In a modelled ***d-HS*** an arbitrary configuration $c_o \in C(A,d,\phi)$ defined in an alphabet A is transferred into next configuration $c_o\tau = c^*_o$ by means of ***GTF*** τ. Let $GS(\alpha)$ be a certain ***recursive*** method of encoding of symbols $\alpha \in A$, and $GS^{-1}(\beta)$ be a recursive decoding method of a set of β-symbols from alphabet A^*; let $GS[x]$ and $GS^{-1}[y]$ be the *recursive coding* and *decoding* of configurations x and y, respectively. Then for the second ***d-HS*** an arbitrary configuration $c^*_o = GS[c_o]$ is transferred by means of ***GTF*** τ^* into the next configuration c^{*1}_o for which $GS^{-1}[c^{*1}_o] = c^*_o$. They say, that one classical ***d-HS 1-models*** another ***d-HS*** if their *dynamics* satisfies the above-mentioned *requirements*. Let, T_x be length of edge of ***d***-dimensional cube which contains template of the modelled classical $HS = \langle Z^d, A, X, \tau\rangle$. Now, on the basis of the above suggestions we can formulate the following rather interesting result.

<u>*Theorem 41*</u>***. For arbitrary classical d-HS =*** $\langle Z^d, A, \tau^{(n)}, X\rangle$ ***there is a certain structure*** $\langle Z^d, A^*, \tau^{(m)}, X^*\rangle$***, which 1-models the first structure; where*** T_x, T_{x^*} ***– templates and A, A* – alphabets of both structures are linked by the following correlations, namely:***

$$\begin{cases} T_{X^*} \leq (T_X + 1) * ([\log_2 a] + 1) - 1; & \text{for } A^* = \{0,1,2\} \\ T_{X^*} \leq (T_X + 1) * (L + 5) - 1; & \text{for } A^* = \{0,1\} \end{cases}$$

$$\text{where} \quad L = \left[\frac{\log_2 a - 1}{\log_2 7 - 1}\right] + 2$$

To our knowledge, this result is the best of its kind. In works [3,5] we have considered the certain most special cases of modeling of one classical ***d-HS*** $(d \geq 1)$ by another. Now, we shall consider algorithmical properties of classical ***d-HS***. It is well known that classical ***d-HS*** are parallel *algorithms* for processing of ***d***-dimensional words defined in a finite alphabet ***A***. Because the study of ***d-HS*** in this regard is of great significance for treating of behavioural properties of such structures and their numerous applications, we begin with discussion of concept ***«one algorithm T-models (slightly T-models) another algorithm»***.

Let M_1 be an algorithm whose alphabet is A, and M_2 be an algorithm whose alphabet is A^* $(A \subseteq A^*)$. Let $M^k{}_1 s = s^k$ $(M^0{}_1 s = s)$ be the result of the ***k***-fold rewriting of words defined in the alphabet ***A*** by means of an algorithm M_1. Then for an arbitrary word ***s*** defined in the alphabet ***A*** the algorithm M_1 *generates* the following sequence of the finite words, namely:

$$M^0{}_1 s,\ M^1{}_1 s,\ M^2{}_1 s,\ M^3{}_1 s,\ \ldots,\ M^k{}_1 s,\ \ldots \qquad (4)$$

Let s^* be an arbitrary finite word defined in the alphabet A^* (*which in the alphabet* ***A*** *equals to the word* ***s***) and algorithm M_2 generates a sequence of the words from the initial word s^* of the following kind:

$$M^0{}_2 s^*,\ M^1{}_2 s^*,\ M^2{}_2 s^*,\ M^3{}_2 s^*,\ \ldots,\ M^k{}_2 s^*,\ \ldots \qquad (5)$$

<u>*Definition 14*</u>***. We shall say, that algorithm*** M_2 ***T-models algorithm*** M_1***, if there is a certain recursive procedure GS, which allows to evolve for any word s defined in the alphabet A from the word sequence (5) the subsequence of the following kind, namely:***

$$M^{o}{}_{o}s^*, M^{j}{}_{12}s^*, M^{j}{}_{22}s^*, M^{j}{}_{32}s^*, \ldots, M^{j}{}_{k2}s^*, \ldots$$

such that in the alphabet A the correlation $(\forall k\in N)(M^{j}{}_{k2}s^* \equiv M^{k}{}_{1}s)$ takes place and $j_k=T+k$. If value j_k depends on length of the rewritten words s in the modelled algorithm M_2, then we say that algorithm M_2 slightly T-models the initial algorithm M_1 $\{j_k = F(|S|)\}$.

In item **6.2** of the chapter **6** we present some of our results on the ***T-****modelling* by means of *classical* **1-HS** of the well-known successive algorithms for the rewriting of finite words in the finite alphabets. Let, a Turing machine ***($MT^s{}_q$)*** has ***s*** symbols on the tape and ***q*** internal states.

Theorem 42. For an arbitrary $MT^s{}_q$ there is a classical 1-HS with alphabet A of cardinality $a = s+q+9$ and Moore neighborhood index $X=\{-1,0,1\}$ which 8-models it. For an arbitrary $MT^s{}_q$ there is a classical 1-HS with alphabet A of cardinality $a=s+q$ and neighboorhood index $X=\{-2,-1,0,1,2\}$ which 1-models it. For an arbitrary $MT^s{}_q$ there is a classical 1-HS with alphabet A of cardinality $a=q*(s+1)+1$ and Moore neighborhood index $X=\{-1,0,1\}$ which 1-models it. For an arbitrary $MT^s{}_q$ there is a classical 1-HS with alphabet A of cardinality $a=s*(s+1)*(q+1)+1$ and simplest neighborhood index $X=\{1,0\}$ which 2-models it. For arbitrary $MT^s{}_q$ with 2D tape there is classical 2-HS with alphabet A of cardinality $a=q*(s+1)+1$ and Neumann neighborhood index X which 1-models it. For an arbitrary $MT^s{}_q$ with k tapes there is a classical 1-HS with alphabet A of cardinality $a=s^k*(q+1)^k$ and Neumann-Moore neighborhood index X which 1-models it.

As consequences of the above theorem, we have a series of interesting enough results on ***algorithmical unsolvability*** of certain problems concerning *dynamics* of the finite configurations in the classical ***d-HS.***

Definition 15. A finite configuration $c_o\in C(A,d,\phi)$ for the global transition function $\tau^{(n)}$ of an arbitrary classical d-HS ($d \geq 1$) is said to be accordingly:

limited, if $(\exists p)(\forall k)(c_k\in \langle c_o\rangle[\tau^{(n)}] \rightarrow D(c_k) \leq p)$, where D - minimal diameter of a block of homogeneous space of the structure, which contains configuration c_k;

(k-m)-periodical, if $(\exists m)(\exists k)(c_o\tau^{(n)m} = c_o\tau^{(n)k})$ $(m > 0;\ k - m > 1)$; periodical, if $(\exists k>1)(c_o\tau^{(n)k} = c_o)$, and passive for k=1;

vanishing, if $(\exists m)(c_o\tau^{(n)m} = \square)$, where $\square$ – null configuration of the structure.

On the basis of the above definition we can formulate the following important result.

Theorem 43. The following problems concerning the dynamics of finite and infinite configurations in a classical d-HS ($d \geq 2$) are algorithmically unsolvable, in general, namely:

– the problem of recursiveness of the set of configurations $\langle c_o\rangle[\tau^{(n)}]$;

– the problem of limitation of an arbitrary configuration $c_o\in C(A,d,\phi)$;

– the problem of (k-m)-periodicity or periodicity of an arbitrary configuration $c_o\in C(A,d,\phi)$;

– the problem of existence of passive and/or vanishing configurations for an arbitrary set $\langle c_o\rangle[\tau^{(n)}]$;

– for arbitrary classical d-HS ($d \geq 2$) with alphabet $A=\{0,1,\ldots,a-1\}$ and GTF $\tau^{(n)}$ the problem of existence of configurations C such, that $C\tau^{(n)}=C^{\infty}{}_r$ (where $C^{\infty}{}_r$ – infinite CF of the structure consisting only from r-states; $r\in A$), is algorithmically unsolvable.

Above, we used a special simulation technique called ***T-modeling (slightly T-****modeling)* for modeling of a series of well-known algorithms for rewriting of finite words defined in finite alphabets ***(algorithms*** *such as* ***TAG-****systems and* ***LAG-****systems*, ***Markov*** *normal algorithms*, ***Post*** *production systems*, ***SS-****machines*, ***Buchi*** *regular systems, and so on)* by means of classical ***1-HS***, and vice versa. In particular, on the basis of ***T-modeling*** of ***SS-***machine by means of a classical ***1-HS*** the following important result can be received:

There is a classical 1-HS with Moore neighbourhood index, which has the creative set of all vanishing finite configurations.

At last, a whole series of interesting results linked with ***T-modelling*** of Turing machines with ***k-***heads and heterogeneous periodically defined transformations by means of the classical ***1-HS*** are discussed.

In item ***6.3*** of chapter ***6*** a number of general results linked with the ***T-modeling*** of the classical ***d-HS*** by means of ***HS*** of the same class are presented. A series of scientists have dealt with the problem, but it is necessary to note that neither the neighbourhood nor the *state-set reduction* techniques were necessarily optimal, and here we have made an attempt to obtain the optimal technique along these lines. On the basis of our approaches we can formulate a series of the following rather interesting results.

<u>Theorem 44</u>. An arbitrary classical structure d-HS (d>1) is 1-modeled by a binary structure of the same dimensionality with template of the following size, namely:

$$L = (L_1+1)^{d-1} * (L_d+1) * \prod_{k=1}^{d} (p_k+1); \quad L_1 = \left\lceil V = \sqrt[d]{\log_2 (a-1)+2} \right\rceil; \quad L_d = L_1 + [2*(V - L_1)]$$

where $p_1*p_2*p_3* \ldots *p_d$ – size of the minimal d-dimensional parallelepiped, which contains template of the modeled d-HS under conditions that the following correlation $\log_2 \log_2 4(a-1) \geq d$ is being executed.

<u>Theorem 45</u>. Any classical 1-HS with alphabet A={0,1,2, ..., a-1} and template of size n is 1-modeled by a binary classical 1-HS with template of size $L=(n+1)*[\log_2 a + n+\beta]$, where $\beta = 4$ for $a \leq 2^{19}$ and $\beta = 5$, otherwise.

<u>Theorem 46</u>. An arbitrary classical 1-HS with alphabet A (a≥ 6) and template of size n 1-modeled by a binary classical 1-HS with template of size $L=n*[2\log_2 (a+2) + 1] - 2$. An arbitrary classical 1-HS with alphabet A for 4≤a≤21 and template of size n is 1-modeled by means of a classical 1-HS with alphabet A*={0,1,2} and template of size L=6n-1. An arbitrary classical structure 1-HS with alphabet A (5≤a≤14) and template of size n is 1-modeled by a classical 1-HS with alphabet A*={0,1,2,3} and template of size L = 5n - 2.

In connexion with definition of ***universal computability*** of the classical ***HS*** by means of ***T-modelling*** of the universal Turing machine ***(UMT)*** a question about minimum complexity of ***HS*** which can ***T-model*** the ***UMT*** arises. For estimation of the *complexity* of a ***HS***, the product ***axn*** can be introduced, where ***a*** is cardinality of alphabet ***A*** and ***n*** is size of the ***HS*** template. Establishing the minimum product ***axn*** is the problem which, in our opinion, is as difficult as finding the *minimum product* ***sxq*** for the *universal* MT^s_q. The smallest result for product ***axn*** is a ***1-***dimensional universal ***HS (1-UHS)*** has given by ***A.R. Smith***, who has found the following ***1-UHS: axn=2x40, 3x18, 6x7, 8x5, 9x4, 12x3,*** and ***14x2***. Notice the existence of the classical ***1-UHS*** with template of minimal size ***n=2***. On the basis of the above ***Smith's*** results and our result (theorem ***46)*** for minimal product ***axn*** for the classical ***1-UHS*** the following estimations were established ***axn = 2x16, 3x11*** and ***4x8***. This result of theorem ***46*** can be generalized also upon the higher dimensionality.

<u>Theorem 47</u>. Any classical d-HS (d ≥ 1) with alphabet A and template, which is contained in a minimal d-dimensional parallelepiped $p_1xp_2xp_3x \ldots xp_d$, is 1-modeled by means of a binary classical d-HS with template of size $L=p_1x\{[2\log_2 (a+2) + 1] - 2\}xp_2xp_3xp_4x \ldots xp_d$. An arbitrary d-HS with template of size

$n_1 x n_2 x n_3 x \ldots x n_d$ and alphabet $A=\{0,1,2,\ldots,a-1\}$ is being simulated by d-HS with simplest neighborhood index in $1/(\sum_{j=1}^{d} n_j - d)$-real time; in addition, cardinality of alphabet A* of the simulating d-HS is being defined by the following relations, namely:

$$\# A^* = a + \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{a^{\prod_{k=1}^{j} n_k + \varphi(j)} - a^{2\prod_{k=0}^{j-1} n_k}}{a^{\prod_{k=0}^{j-1} n_k} - 1} \right), \quad where \quad \varphi(j) = \begin{cases} 1, & if\ j < d \\ 0, & otherwise \end{cases}; \quad n_o = 1$$

An arbitrary classical structure d-HS with template in the form of parallelepiped of size $n_1 x n_2 x \ldots x n_d$ and alphabet $A=\{0,1,2,3,\ldots,a-1\}$ is simulated in 1/n–real time by a structure of the same dimensionality $d \geq 1$ with template in the form of hypercube with length of edge 2 and alphabet A* under the following conditions, namely:

$$n = \max_{k=1..d} \{n_k\} - 1 \qquad \# A^* = \sum_{k=1}^{n} a^{k^d}$$

In addition, in general case for ***d***-dimensional classical ***HS***-model the simplest neighbourhood index ***X*** has the following kind, namely**:**

$$X=\{\underbrace{\underbrace{(0,0,\ldots\ldots,0)}_{d}, \underbrace{(1,0,0,\ldots,0)}_{d}, \underbrace{(0,1,0,\ldots,0)}_{d}, \ldots\ldots, \underbrace{(0,0,\ldots,0,1)}_{d}}_{d+1}\}$$

i.e. one automaton of the elementary template is central one having strictly one individual automaton of structure along each axis as neighboring**.**

Considerable both theoretical and applied interest represents a question of modeling of classical ***d-HS (d≥2)*** by structures of the same class but with reducing of dimensionality. In work [532] an interesting approach to realization of modeling a classical ***3-HS*** by means of ***2-HS*** is presented. For ***1***-dimensional case, however, the given approach does not work, not allowing to model arbitrary ***2-HS*** by means of a ***1-HS.*** Theorem mentioned below represents *other* approach providing modeling of an arbitrary *classical* ***2-HS*** by means of the appropriate ***1-HS.***

<u>Theorem 48</u>. An arbitrary classical 2-HS is modeled by the appropriate classical 1-HS with the Moore neighbourhood index.

Thus, reduction of the presented results allows to formulate the following rather interesting result.

<u>Theorem 49</u>. An arbitrary classical d-HS (d ≥ 1) is modeled by means of the appropriate classical 1-HS with the Moore neighbourhood index.

Intractable problem – the problem for decision of which a multinomial algorithm does not exist. In this sense the modeling of ***2-HS*** by means of ***1-HS*** can be ascribed to a class of intractable problems because of time demanded for their decision with growth of size of configurations of simulated dynamics of an initial structure. However, it in the event that will not be discovered much faster modeling algorithm what seem to us as uneasy enough problem. In item ***6.4*** of the chapter ***6*** a series of special questions of modelling in classical ***d-HS*** is presented. Above all, the following result characterizes the possibilities of modelling of an arbitrary ***non-deterministic 1-HS*** by means of the classical structures ***1-HS.***

<u>Theorem 50</u>. An arbitrary non-deterministic structure SH(1,a,n,N) is modeled by appropriate classical structure 1-HS with Moore neighbourhood index and alphabet A* of cardinality $N(a^{n+1}-1)/(a-1)+a+n$.

In our monograph [3] we quite justly noted constructive defects of the classical ***d-HS*** with symmetrical local transition functions**.** On the other hand**,** from our results of modelling in the classical ***d-HS*** it may be drawn that ***HS*** with *symmetrical* and *asymmetrical* local transition functions $\sigma^{(n)}$ are equivalent with respect to constructibility. In addition, ***d-HS (d ≥ 1)*** with Margolus neighborhood ***(****in our terminology «on splitting»****)*** are modeled by classical ***d-HS*** of the same dimensionality [53,54,88], namely**:**

Theorem 51. An arbitrary structure d-HS (d ≥ 1) on splitting, defined in alphabet A, is modeled in real time by an appropriate classical d-HS with alphabet A*, where A* = A∪{#} (# ∉ A).

Theorem 52. If a certain MT^s_q fulfills some algorithm S for time T, then exists a classical 1-HS with A-alphabet of cardinality 2*(s+2q+1), Moore neighbourhood index and symmetrical GTF $\tau^{(n)}$ which will simulate the same algorithm S for time ≤ 4*T.

On the basis of this result the following rather interesting theorem can be formulated [5,53,54,88].

Theorem 53. For an arbitrary classical 1-HS with Moore neighbourhood index there is a structure S of the same dimensionality and neighbourhood index X, and alphabet A* of cardinality $2(4a^2+5a+12)$ and a symmetrical GTF $\tau^{(n)}$, which models the first structure for time 4*L, where L is length of a processed finite configuration in the modeled structure.

In connexion with a series of problems the classical ***d-HS (d ≥ 1)*** with a ***symmetrical LTF (GTF)*** present definite interest. The ***symmetrical LTF*** $\sigma^{(n)}$ is defined by parallel transition rules of the following kind**:** $x_1x_2x_3 \ldots x_n \rightarrow x^*_1$ and $(x_1x_2x_3 \ldots x_n)^R \rightarrow x^*_1$, where X^R is symmetrical inversion of ***X***-string. Using the above theorem**,** we can easily verify that by means of the *symmetrical* ***GTF*** $\tau^{(n)}$ it is possible to compute any partially recursive function, but from the point of view of constructive possibilityes the *symmetrical* ***HS-***models are less powerful**,** far and away**,** than *asymmetrical* ones. Thus, if for modelling of a number of processes in classical ***HS (****especially****, asymmetrical** ones**)*** the asymmetrical ***LTF*** $\sigma^{(n)}$ are most suitable, then for concrete realizations of ***HS-***models, in particular, by means of microelectronics or for the more peculiar interpretations of ***HS*** the symmetrical ***LTF*** $\sigma^{(n)}$ are more suitable. Class of *symmetrical* ***GTF*** $\tau^{(n)}$ presents special interest in many respects. At that, the following result can be useful enough for many interesting considerations.

Theorem 54. An arbitrary classical 1-HS with symmetrical GTF $\tau^{(2)}$ and simplest neighbourhood index X = {0,1} possesses the nonconstructibility of types NCF and/or NCF-1.

In connexion with problems of ***universality*** and ***modeling*** in the classical ***HS*** the ***reversibility*** problem presents the undoubted interest. You can find sufficiently detailed discussion of this problems in item ***6.4*** and in monograph [5]**.** A classical ***d-HS*** is ***reversible*** if and only if it not possesses *nonconstructibility* of types ***NCF, NCF-1*** and ***NCF-3.*** In item ***6.4*** a discussion of such definition of ***reversibility*** for classical ***d-HS*** is presented**.** The *reversibility* problem generates a series of interesting attendant questions. In the general case, this problem is characterized by question about possibility to model an arbitrary classical ***d-HS (d ≥ 1)*** by means of structure of the same class, but without the given properties of the modeled structure**.** The problem has important sense both in theoretical and applied aspects of ***HS*** problems. In context of the nonconstructibility of types ***NCF-1*** and ***NCF-2*** we have the following general result [5].

Theorem 55. An arbitrary classical d-HS (d ≥ 1) is T-modeled by a certain d-HS (d≥1) of the same class, which not possesses NCF-1 and/or NCF-2.

In case of the nonconstructibility of ***NCF-***type the question is the more difficult. To this effect, we have introduced two concepts of modelling**:** ***WM-*** and ***W-modeling*** in classical ***d-HS,*** which embrace a wide enough class of methods of modeling**.** On the basis of investigations of the above concepts of modeling we can formulate the following results, namely.

Theorem 56. An arbitrary classical d-HS (d≥1) cannot be WM-modeled by a classical d-HS of the same dimensionality without nonconstructibility of NCF-type.

Theorem 57. An arbitrary classical d-HS ($d \geq 1$) cannot be W-modeled by means of a certain classical d-HS of the same dimensionality without nonconstructibility of NCF-type.

On the other hand, at the certain assumptions similar modelling is possible, what the following result testifies. Approach used for proof of the result can be useful in a whole series of cases [54,88,90].

Theorem 58. Under the condition of use of infinite alphabet of elementary automaton exists a d-HS not possessing NCF, that can model an arbitrary classical structure d-HS of the same dimensionality $d \geq 1$ in strictly real time. An arbitrary classical d-HS is being 1-modeled by means of a classical d-HS* for which problem of existence of nonconstructibility of type NCF (NCF-3) and NCF-1 is algorithmically solvable. Any classical d-HS ($d \geq 1$) with alphabet $A=\{0,1,\dots,a-1\}$ is 1-modeled by a classical structure (d+1)-HS with the same alphabet A that does not possess the property of nonconstructibility of type NCF. Arbitrary classical structure d-HS ($d \geq 1$) within the scope of dynamics of finite and/or structural-periodic configurations can be modeled by a classical structure 2-HS with elementary neighbourhood index $X=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, not possessing the nonconstructibility of NCF-type. Arbitrary classical d-HS ($d \geq 1$) is modeled by means of an appropriate 1-HS which not possess property of nonconstructibility of NCF-type.

The ***reliability*** problem, linked with modeling in ***d-HS ($d \geq 1$)***, plays a very important part in practical realizations of computational ***HS***-models. We have presented a number of algorithms and principles of ***self-recovering*** in real ***HS***, which can be useful enough for practical constructing in the homogeneous computational structures based on the ***HS***-models [5].

In item ***6.5*** of chapter ***6*** the *parallel algorithms* defined by the classical ***d-HS*** (abbreviation ***d-PADHS***) are discussed. The ***d-PADHS*** play considerable enough part in describing certain biological processes and ***programming*** systems based on *computational homogeneous structures* ***(CHS)***, as well as for the theory of algorithms, as such. We shall consider parallel algorithms defined by classical ***HS***-models with point of view of their certain possibilities.

We present certain results on the complexity of ***1-PADHS:*** complexity in ***Markov-Nagornyi's*** meaning and computational complexity. The ***1-PADHS*** are defined as follows.

By definition, ***1-PADHS(a,n)*** operates with strings of symbols (*configurations of the set* $C(A,\phi)$ *or words*) which are defined in alphabet ***A***. The mode of operation is being described by the ***GTF*** $\tau^{(n)}$ of a certain classical ***1-HS***, which are defined by ***LTF*** with parallel transition rule of the following kind, namely:

$$\underbrace{000\dots0}_{n} \Rightarrow 0 \qquad x^j_1 x^j_2 x^j_3 \dots x^j_n \Rightarrow x^{*j}_1; \quad x^{*j}_1, x^j_k \in A \ (k=1 \,..\, n;\ j=1 \,..\, a^n-1) \tag{6}$$

For every word $c \in C(A,\phi)$ a parallel algorithm ***1-PADHS(a,n)*** defines the sequence of words $<c>[\tau^{(n)}]$, in which word c_k is called ***final***, if takes place the following correlation: $c_{k-1} = c_{k-1}\tau^{(n)} = c_k$. Let, $C(A,\phi)$ is a words set which are processed by the algorithm ***1-PADHS(a,n)***, and ***F*** be a partial word function in alphabet ***A***, if for certain finite word $c_j \in C(A,\phi)$ takes place the correlation $F(c_j) = c^*_j \in C(A,\phi)$. Let then ***F*** is a word function whose domains of the existence and value are E_F and V_F, respectively. We shall say that word function ***F***, defined in an alphabet A^*, is ***PADHS-computable***, if there is a parallel algorithm ***1-PADHS(a,n)*** in the alphabet $A=\{b\}\cup A^*$ ($b \notin A^*$) such, that for any $c^*_o \in C(A^*,\phi)$, if c_o is a representation of word c^*_o of the form $c^*_o = \square b^{p+2}0^1b^20^{p+1}c^*_o b^{p+2}\square$, then the following two general *conditions* execute, namely:

1) if word c^*_o belongs to the existence domain E_F of ***F***-function, then a sequence $<c_o>[\tau^{(n)}]$ contains a passive configuration – the ***final*** word c_f of the following kind, namely:

$$c_f = \square b^{p+2}0^1b^10^{p+2}F(c^*_o)b^{p+2}\square, \qquad F(c^*_o) \in V_F; \tag{7}$$

2) if word c^*_o not belong to the existence domain E_F of ***F***-function, then a sequence $<c_o>[\tau^{(n)}]$ does not contain a passive ***final*** word c_f of the above kind ***(6)***.

It then can be proved that a word ***F***-function is ***PADHS****-computable* if and only if it is Turing-*computable*. The ***equivalence*** of such precise formalizations of the intuitive notion of a computable function ***F*** is one of the strongest arguments in favour of the ***Church thesis***. The problem of estimation of complexity of parallel algorithm ***1-PADHS*** is extremely important and in this direction we have the following rather interesting result [5,53-56,88,90].

Theorem 59. An arbitrary partial recursive word function F, defined in a certain finite alphabet A*, is PADHS-computable in the extended alphabet $A = \{b\} \cup A^*$ $(b \notin A^*)$.

Consequently, parallel algorithms ***1-PADHS*** are equivalent to ***Markov*** normal algorithms in ***Markov-Nagornyii*** sense. At the same place, we have discussed the concept of complexity of the ***1-PADHS***, in detail, and the concept of parallelism of such class of algorithms. We have defined a class of algorithms which were called by *locally realizable algorithms* ***(LRA)***. The essence of ***LRA*** consists in the possibility to represent an algorithm by means of *local* identical algorithms with separate subwords of any processed word. A typical example of similar algorithms is symbolic sorting. In our opinion, ***LRA*** can be realized by means of the parallel ***d-PADHS***. For such algorithms *linear time* realization in ***HS***-models is allowed. For example, the problems of symbolic sorting and reverse mapping of words are realized by means of ***1-PADHS*** in linear time. At present, the question of advantage of parallel algorithms is extremely often discussed. To this question the following theorem refers too [5,53,88,90].

Theorem 60. If parallel algorithm 1-PADHS(a,n) computes a certain partial recursive word function F during T steps, then suitable Turing machine can compute the same function F during T* steps, where $T^* \le \{(n+1)T^2+(n-1)T\}/2$

The *paralleling* possibility permitted by ***1-PADHS*** can be tracked up on the following example. It is well known that *two-way pushdown machine* ***(TWPM)*** is equivalent to one-head Turing machine with time of work no more than $X^{k|X|}$, where ***k*** – constant and ***X*** – the length of input word ***X***. Characterization of the ***TWPM*** in terms of the parallel algorithms gives much better result as regards time [5,53,88,90].

Theorem 61. If a TWPM admits some set of finite words during t steps, then the corresponding parallel algorithm 1-PADHS can admit the same word set during no more than $2t^2$ ***steps.***

Thus, by means of parallel algorithms ***1-PADHS*** for a series of sequential algorithms we can obtain the much better results as regards time than by MT^s_q. It is necessary to note that the parallelism intrinsic in ***1-PADHS*** was used only for modeling of one algorithm by another, and it did not use the parallelism intrinsic in the essence of the modeled algorithms itself. The so-called ***bc-automata*** present indubitable interest for the theory of structural programming. In connexion with sequential ***bc***-model the following interesting result can be presented [53].

Theorem 62. If a certain bc-automat demands t steps for processing of some input finite word, then the corresponding parallel algorithm 1-PADHS can carry out the same work during no more than $2(t+1)^2$ ***steps.***

It will be noted, that the estimation appearing in this theorem is overstated, in general. Thus, use of the effective essence of *paralleling* of computations allows us to enough considerably save a time, generally speaking. Such saving of a time we can obtain by the price of increase of certain *computational* resources of the classical ***HS***-models only.

In the seventh chapter our results on the *global decomposition* problem ***(GDP)*** of ***GTF*** $\tau^{(n)}$ in ***d-HS*** $(d \ge 1)$ are presented. The ***GDP*** in ***HS***-models immediately adjoins the above problem of the complexity ***A(X)***. Furthermore, the problem directly concerns the question of *constructive complexity* of ***HS***-models, which plays the important part both in concrete realizations of parallel computational systems on the basis of ***HS*-**models and for modeling in the classical ***HS*.**

The *global decomposition problem* ***(GDP)*** can be formulated as follows, namely:

Can global transition function $\tau^{(n)}$ of an arbitrary structure d-HS (d ≥ 1) be presented in the form of a composition of finite number of more simple global transition functions?

It is said that global transition function $\tau^{(n)}$ in an alphabet ***A*** is more ***simple*** than other global transition function $\tau^{(m)}$ defined in the same alphabet ***A*** if ***n<m.*** The above problem is called as the ***decomposition problem;*** it is of great enough importance in the theory of homogeneous structures and in its numerous applications. Above all, the problem touches complexity of ***GTF*** of the ***d-HS (d ≥ 1)*** in whole including the classical ones**.** The more formal definition of the ***GDP*** can be presented as follows.

Definition 16. The global decomposition problem of GTF $\tau^{(n)}$ (d-GDP) is formulated as follows: can an arbitrary GTF $\tau^{(n)}$ be presented in the form of a composition of finite number of the more simple global transition functions of the same class, i.e.

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n_1)}\, \tau^{(n_2)}\, \tau^{(n_3)}\, \tau^{(n_4)} \,.....\, \tau^{(n_k)} \qquad (n > d+1;\ n_j < n) \qquad (8)$$

where GTF $\tau^{(n)}$, $\tau^{(n_j)}$ (j = 1 .. k) are defined in the same alphabet A and have the same dimensionality d that the initial global transition function $\tau^{(n)}$; in addition, for functions $\tau^{(n_j)}$ multiple enterings in the representation (8) are admitted. For case of 1-dimensional GTF $\tau^{(n)}$ for decomposition (8) takes place the following correlation, namely: $n = \sum_j n_j - m + 1$ (j = 1 .. m).

Along with well-known ***GDP*** we present a series of results on the so-called *general global decomposition problem* ***(GLDP).*** The ***GLDP*** is question whether or not arbitrary ***GTF*** $\tau^{(n)}$ can be presented in the form of composition of type ***(8)*** in which the arbitrary global functions $\tau^{(n_j)}$ ***(j = 1 .. k)*** can be used**,** admitting the sign of equality and excepting trivial cases of representation. Thus, in case ***d-GLDP*** in *representation* ***(8)*** use of arbitrary ***GTF*** $\tau^{(n_j)}$ ***($n_j \le n$)*** is admitted, which have identical with an initial function $\tau^{(n)}$ both dimension and alphabet. It is proved that ***GDP*** and ***GLDP*** are not equivalent, in general. In item ***7.1*** of chapter ***7*** the ***GDP*** for certain special global transition functions is discussed.

First of all, us will interest the question of *interrelationship* of nonconstructibility properties of ***GTF*** $\tau^{(n)}$ and global transition functions $\tau^{(n_j)}$ which enter in composition ***(8).*** In this sense ***(****using result of theorem* ***14)*** it is simple enough to convince oneself in validity of the following statement [5,88,90]**,** namely. This result is used in a whole series of proofs concerning the nonconstructibility problem.

Theorem 63. An arbitrary GTF $\tau^{(n)}$ possesses NCF if and only if at least one GTF $\tau^{(n_j)}$ ($n_j < n$) possesses NCF; if at least one global transition function from a pair $\{\tau^{(m)}, \tau^{(p)}\}$ be possess NCF-1, then and their composition $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\, \tau^{(p)}$ (n = m+p-1) will possess NCF-1 and/or NCF.

On the basis of ***Yamada-Amoroso*** results on completeness problem for polygenic ***HS*-**models and some our results on the *nonconstructibility* problem for classical ***HS*-**models, the negative solution of the ***GDP*** is presented. Namely, the following theorem takes place.

Theorem 64. For an arbitrary finite alphabet A there is an infinite set of 1-dimensional GTF the 1-GDP for which has negative solution.

Relative to the class of ***1-***dimensional *binary injective* ***GTF*** $\tau^{(n)}$ we have the following result.

Theorem 65. In class of all binary injective 1-dimensional global transition functions $\tau^{(n)}$, the 1-GDP has negative solution, generally speaking.

The *GDP* with respect to a class of linear *GTF* $\tau^{(n)}$ has been considered. Similar linear functions possess the ***G***-property of the *universal reproducibility*. The ***GDP*** for $\tau^{(n)}$ is considered with respect to a ***subclass***, whose functions are defined by the ***LTF*** $\sigma^{(n)}$ of the following kind, namely:

$$\boxed{\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \left(x_1 + x_n + \sum_{k=2}^{n-1} b_k * x_k\right) \quad (mod\ a); \quad b_k \in \{0,1\}; \quad x_k \in A \quad (k = 1..n-1)}$$

Such set of global transition functions $\tau^{(n)}$ is denoted as $M^*(A,1,G)$ which can be presented as union of two subsets $M^*_1(A,1,G)$ and $M^*_2(A,1,G)$ (for brevity M^*_1 and M^*_2) of *GTF* $\tau^{(n)}$ $(n \geq 2)$ with *connected* and *unconnected* templates of size ***n***, accordingly; i.e. $M^*(A,1,G) \equiv M^*_1 \cup M^*_2$ and $M^*_1 \cap M^*_2 = \varnothing$, where **Ø** – the *empty* set. Global transition functions of these subsets are denoted as $\tau_1^{(n)}$ and $\tau_2^{(n)}$ accordingly. By the above suppositions the following general result takes place.

Theorem 66. Set $M^*(A,1,G)$ and its a subset M^*_1 are not closed with respect to composition operation. An arbitrary global transition function $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ cannot be presented in the form of composition of two more simple functions of the same subset M^*_1.

Widening of the set ***GTF***, which admits an arbitrary function of set M^*_1 as elements of representation ***(8)***, upon set M^*_2 of global transition functions allows to receive the positive solution of the ***1-GDP*** for ***GTF*** $\tau_1^{(n)}$ of the set M^*_1. Below, we shall identify the concepts «*neighbourhood index*» and «*template*» if it not give rise to any ambiguity.

Theorem 67. Arbitrary global transition function $\tau_1^{(2k)} \in M^*_1$ can be presented in form of composition $\tau_1^{(2k)} = \tau_1^{(k)}\tau_2^{(k+1)} = \tau_2^{(k+1)}\tau_1^{(k)}$, where $\tau_1^{(k)} \in M^*_1$ and $\tau_2^{(k+1)} \in M^*_2$ with template $X_2=\{0,k\}$ (k=2,3, ...). A global transition function $\tau_1^{[p(2k+1)]} \in M^*_1$ can be presented in form $\tau_1^{[p(2k+1)]} = \tau_1^{(p)}\tau_2^{[p(2k+1)-2]} = \tau_2^{[p(2k+1)-2]}\tau_1^{(p)}$ (p=3,5,7,9, ...; k=1,2,3,4, ...). An arbitrary global transition function $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ (under the condition $n=p*q$) can be presented in the form $\tau_1^{(n)} = \tau_2^{(n-p+1)}\tau_1^{(p)} = \tau_2^{(n-q+1)}\tau_1^{(q)}$, where GTF $\tau_1^{(n)}$ of set M^*_2 has the symmetrical template.

The following result reflects the situation for case of global transition function $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ (***n*** – *prime*).

Theorem 68. An arbitrary global transition function $\tau_1^{(n)} \in M^*_1$ can be presented as a composition of the finite number of more simple global transition functions from the set $M^*(A,1,G)$ if and only if n is a composite number.

For case of a global transition function $\tau_2^{(n)} \in M^*_2$ takes place the quite different situation [53].

Theorem 69. For an arbitrary integer $n \geq 5$ and alphabet A there are at least $N^* = n-4$ global transition functions $\tau_2^{(n)} \in M^*_2$, which can be presented as a composition $\tau_2^{(n)} = \tau_2^{(n-1)}\ \tau_1^{(2)}$.

Whereas relative to the above-mentioned class of ***HS***-structures with refractority {***d-HSR(r,P)***} we have the following results [5,54-56,88,90].

Theorem 70. The global decomposition problem in the class of all homogeneous structures d-HSR(r,P) $(d \geq 1)$ with refractority has negative solution.

Theorem 71. In the class B(r) of all 1-dimensional refractory GTF with depth of refractority $r \geq 1$ each global transition function $\tau^{(n)}$ cannot be presented in the form of a composition of the finite number of functions from the same set B(r); B(r) is a set of all refractory global transition functions isolated with respect to composition operation.

In item **7.2** of chapter **7** certain interesting approaches to investigation of *global* decomposition problem are presented**.** On the basis of ***Shannon*** *function* and some results of the theory of boolean functions the following theorem can be presented [5,53-56,88,90].

Theorem 72. For an arbitrary given finite basic set G_f of 1-dimensional binary global functions exists an integer $n_o > 0$ such that for any integer $n \geq n_o$ exists at least one binary global transition function $\tau^{(n_j)}$ relative to which the global decomposition problem has negative solution.

On the basis of the theory of ***a***-valued logics the following results can be presented [53-56,88].

Theorem 73. The class L(a,0) of all local transition functions $\sigma^{(n)}$ ($n \geq 2$, $a > 2$) has not a finite basis.

On the basis of the result *(like the binary case)* the *negative* solution of the global decomposition problem for the general case can be received [5,54-56,88,90].

Theorem 74. Among all d-dimensional global transition functions $\tau^{(n)}$, defined in an arbitrary finite A-alphabet and with arbitrary neighborhood index, exists infinite set of global transition functions with respect to which d-GDP ($d \geq 1$) has negative solution.

Using now algebraic approaches**,** a whole series of rather interesting results on properties of *semigroup* ***L(a,d)*** of all parallel global mappings $\tau^{(n)}$***: C(A,d) → C(A,d)*** are presented. The set of all such mappings can be presented as union of *seven* nonintersecting subsets**,** which relative to global transition functions ***(GTF)*** $\tau^{(n)}$, which compose their have the following general characteristics, namely**:**

G_1 ***: GTF*** $\tau^{(n)}$ possess all types of nonconstructibility ***(NCF, NCF-1, NCF-2, NCF-3);***

G_2 ***: GTF*** $\tau^{(n)}$ possess the nonconstructibility of types ***NCF (NCF-3)*** and ***NCF-1*** without ***NCF-2;***

G_3 ***: GTF*** $\tau^{(n)}$ possess the nonconstructibility of types ***NCF (NCF-3)*** and ***NCF-2*** without ***NCF-1;***

G_4 ***: GTF*** $\tau^{(n)}$ possess the nonconstructibility of type ***NCF-2;*** parallel global maps defined by the ***GTF*** $\tau^{(n)}$ are not mutually one-valued**;**

G_5 ***: GTF*** $\tau^{(n)}$ possess the nonconstructibility of type ***NCF-1***, only**;**

G_6 ***: GTF*** $\tau^{(n)}$ possess the nonconstructibility of type ***NCF (NCF-3)***, only**;**

$G_7 \subset G_6$ ***: GTF*** $\tau^{(n)}$ possess the mutually one-valued parallel maps $\tau^{(n)}$ ***: C(A,d) → C(A,d).***

The sets G_k ***(k = 1..6)*** relative to composition operation form the *non-commutative* semigroups**,** whereas the set G_7 forms a group**.** Consequently, semigroup ***L(a,d)*** of all parallel maps $\tau^{(n)}$ ***: C(A,d) → C(A,d)*** in ***d-HS*** ($d \geq 1$) can be presented as ***union*** of the finite number of non-intersecting subsemigroups and the group, i.e. $L(a,d) = \cup_k G_k$ ***(k=1..7).*** Structural analysis of subsemigroups G_j ***(j = 1..6)*** and of the group G_7 allows to formulate the following general result about representation of the semigroup ***L(a,d).***

Theorem 75. Semigroup L(a,d) of all parallel global maps $\tau^{(n)}$: C(A,d) → C(A,d) defined by the classical d-HS ($d \geq 1$) can be presented as union of 6 non-intersecting subsemigroups G_k (k=1..6), which have not the finite systems of generators, and a maximal group G(d). With respect to the semigroup L(a,d)\G(d) the sets G_h (h = 4..6) are the isolated subsemigroups.

In item **7.2** of chapter **7** the more detailed structure of semigroup ***L(a,1)*** ($a \geq 3$) is discussed**.** The global *decomposition* problem was investigated on the basis of so-called concept of the *infinite mutually erasable configurations* (***∞-MEC***)**.** By definition, a pair of configurations $c_1, c_2 \in C(A,d,\infty)$ is a pair of ***∞-MEC*** if the following correlation $c_1\tau^{(n)} = c_2\tau^{(n)} = c_3 \in C(A,d,\infty)$ takes place**.** On the basis of this concept and a ***special*** class of global transition functions defined by local transition functions of the following kind, namely**:**

$$E^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_j = 0,\ x_{n-1} = x_n = 1 \qquad (j = 1..n-2) \\ 1, & \text{if } x_j = 0,\ x_{n-1} = 1 \qquad (j = 1..n-2\,; n) \\ x_n, & \text{otherwise} \end{cases}$$

a whole series of rather interesting partial results on the global decomposition problem are presented, in particular, as follows. The given class $E^{\#}$ of *GTF* $E^{(n)}$ because of a lot of specific dynamic properties represents definite interest for the further researches even irrespective of decomposition problem. So, on the its basis has been obtained: ***For any integer n ≥ 3 GTF*** $E^{(n)}$ ***of class*** $E^{\#}$ ***have, generally speaking, negative decision of 1-GDP.*** The given result allows to obtain a *constructive negative* decision of **1-GDP**, having other interesting applications [88,90,567].

Theorem 76. Semigroup L(a,1) of all 1-dimensional parallel global maps $\tau^{(n)} : C(A,1) \rightarrow C(A,1)$ ***has not finite basis. For any integer n ≥ 3 there is a 1-dimensional global transition function*** $\tau^{(n)}$ ***defined in an arbitrary finite alphabet A with respect to which global decomposition problem has negative solution.***

In item **7.3** of chapter **7** the *complexity* of *global* transition functions with respect to the problems ***d-GDP*** and ***d-GLDP***, and certain linked solvability problems are discussed. Let ***GSAKV*** be the set of all global transition functions of ***d***-dimensionality, which are defined in an arbitrary finite alphabet ***A***, and such functions that for each function $\tau^{(n)} \in GSAKV$ and configuration $c \in C(A,d,\phi)$ the correlation $|c| \leq |c\tau^{(n)}|$ takes place, where $|c|$ – minimal diameter of an arbitrary configuration $c \in C(A,d,\phi)$. Then, in the class ***GSAKV*** of global transition functions the ***d-GDP*** is solvable [5,53-56,88,90]. The result is used in a series of investigations with respect to the decomposition problem.

Theorem 77. In class GSAKV of d-dimensional global transition functions the d-GDP is constructively solvable. For any d-dimensional GTF $\tau^{(n)}$ ***determined in the alphabet A exists a constructive algorithm deciding for it both d-GDP, and d-GLDP.***

The general problem of solvability of the ***d-GDP*** is a generalization of very interesting more particular decomposition problem, namely:

Can an arbitrary global transition function be presented in the form (8) under condition that functions $\tau_j^{(n_j)}$ ***belong to a certain basic set G?***

In this direction the following basic result takes place [5,54-56,88,90].

Theorem 78. With respect to an arbitrary basic subset G of all d-dimensional global functions, defined in alphabet A={0,1, ..., a-1} (a – prime), the d-GDP is algorithmically solvable.

In item **7.3** of chapter **7** a series of very interesting problems which are intermediate between common and particular ***d-GDP*** are discussed. Along with that, the question of *unique* representation of arbitrary global transition function in the form ***(8)*** is considered. The *utilization* of possibility of representation of ***LTF*** $\sigma^{(n)}$ in the form of *polynomials* with respect to base ***a*** is based on the following result, and allows to receive a series of rather interesting results concerning the ***d-GDP/d-GLDP***.

Theorem 79. An arbitrary local transition function $\sigma^{(n)}$ ***defined in alphabet A={0,1, ..., a-1} is presented in the form of polinomial of maximal degree n(a-1) over a system M if and only if the algebraic system M = <A; +; x> is field.***

On the basis of such polynomial representation a very interesting class of local transition functions $\sigma^{(n)}$ which are presented by symmetrical polynomials, is investigated. Among all symmetrical polynomials a subclass of so-called *elementary* symmetrical polynomials is selected. Polynomials P_k which are given by the functions defined below are selected as ***elementary*** polynomials over field ***A***, namely:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{r} R_j(k, x_1, x_2, \dots, x_n); \qquad r = C_n^k / k! \\ P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j; \qquad P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod\limits_{j=1}^{n} x_j \end{array}}$$

where $R_j(k,x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ – arbitrary possible arrangements of elements $\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\}$ on k, which are different with accuracy to symmetry; the elementary symmetrical polynomials are denoted as ***ESP***. Let $\Psi(n,a)$ be a set of *classical* **1**-dimensional *global* transition functions, whose *local* transition functions $\sigma^{(n)}$ are presented by ***ESP***. It can be shown, that each global transition function $\tau^{(n)}{}_j \in \Psi(n,a)$, excepting the first (P_1) and the last (P_n), has the following representation, namely:

$$\boxed{\begin{array}{c} \tau_j^{(n)} = \tau_1^{(n-j+1)} \tau_j^{(j)}; \quad \tau_j^{(n)} \in \Psi(j,a); \quad \tau_1^{(n-j+1)} \in \Psi(n-j+1,a) \\ \sigma_1^{(n-j+1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-j+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n-j+1} x_k \pmod a; \quad \sigma_j^{(j)}(x_1, x_2, \dots, x_j) = \prod\limits_{k=1}^{j} x_k \pmod a \quad (1<j<n) \end{array}}$$

For any integer $n \ge 2$ the global transition functions $\tau_1^{(n)}$ and $\tau_n^{(n)}$ are called the ***basic*** functions of set $E(n,a)$ of all symmetrical global transition functions of $\le n$ variables in alphabet A. In this direction the following rather interesting result can be formulated [5,54-56,88,90].

<u>Theorem 80</u>. Any global transition function $\tau^{(n)} \in E(n,a)$, excepting basic ones, is presented in the form of composition $\tau_1^{(n-j+1)}\tau_j^{(j)}$ (1<j<n) of two more simple basic functions. An arbitrary basic function of set E(n,a) has not of the similar presentation, generally speaking.

Approach on the basis of polynomial representation of local transition functions over field A for prime number a can be spread upon the *binary* case $a=2$. In this case ***Zegalkin*** polynomials are very useful for representation of the *binary* local transition functions. Furthermore, investigations of *binary* ***d-HS*** $(d \ge 1)$ are more comfortable within the framework of the so-called ***Zegalkin*** *algebra*, which can be generalized on non-binary fields A, where a is degree of a prime number. On the basis of possibility of polynomial representation of local transition functions, defined in alphabet $A=\{0,1,2,\dots,a-1\}$ (a – *prime number*), we can obtain the further development of the decomposition problems. On the basis of class ***GSAKV*** of the local transition functions presented by polynomials, namely:

$$\boxed{\sigma^{(n)}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = g * \sum_{k=1}^{k=n} x_k \pmod a, \quad g \in A}$$

over field A, and the class of all *binary* local transition functions presented by ***Zegalkin*** polynomials the following general result can be formulated [5,54-56,88,90].

<u>Theorem 81</u>. For prime integers a and n any local transition function $\sigma^{(n)} \in$GSAKV cannot be presented as a composition of finite number of more simple functions defined in the same alphabet A={0,1,...,a-1}. For arbitrary prime n≥2 there is a binary local transition function $\sigma^{(n)}$ which cannot be presented as a composition of the finite number of more simple functions defined in the same binary alphabet B={0,1}.

On the basis of results on decomposition problem a constructive approach *(criterion)* to solution of the global decomposition problem for *certain* classes of global transition functions is presented. The given ***criterion*** is based on the following result, namely:

An arbitrary global transition function $\tau^{(n)}$, defined in alphabet A (a – prime integer), has the positive solution of the global decomposition problem if and only if the corresponding polynomial P_n (mod a) can be presented in the form of superposition of polynomials, namely:

$$P_{n_k}((P_{n_{k-1}}(P_{n_{k-2}} \ldots\ldots (P_{n_1}) \ldots\ldots))) \quad (mod\ a); \qquad n_j < n;\ j = 1..k \qquad (9)$$

Now, we shall present a series of results on *common* **(d-GDP)** and *generalized* **(d-GLDP)** decomposition problems, which were received on the basis of a polynomial representation of local transition functions $\sigma^{(n)}$ defined over field A_p, where $A_p = \{0,1,2,3, \ldots, a\text{-}1\}$ **(a –** *prime number***).**

***Theorem 82**. In general case, the d-GLDP for an arbitrary global transition function $\tau^{(n)}$ has negative solution, excluding trivial cases.*

In general case the ***d-GDP*** and the ***d-GLDP*** are not equivalent, therefore the following result presents the special interest.

***Theorem 83**. If for certain d-dimensional global transition function the problems d-GDP and d-GLDP are equivalent, then for such function both problems are algorithmically solvable.*

The above results on the *composition* problem with respect to alphabet A_p allow to obtain the following important result [5,53-56,88,90].

***Theorem 84**. For any d-dimensional global transition function, defined in alphabet A_p, the d-GDP and the d-GLDP are equivalent and algorithmically solvable.*

On the basis of theorems ***82*** and ***84*** the following rather important result can be presented [54-56].

***Theorem 85**. For an arbitrary d-dimensional global transition function $\tau^{(n)}$, defined in alphabet A_p, the d-GDP and d-GLDP have the positive solutions if and only if the initial function $\tau^{(n)}$ can be presented in the form $\tau^{(n)} = \tau^{(m)}\tau^{(q)}$ (m, q < n; m+q-1 = n) of two more simple d-dimensional functions, defined in the same alphabet A_p.*

With the general composition problem is linked a series of optimization problems, which are discussed in item ***7.4.*** The last theorem is linked with these problems, also. In addition, on the basis of theorem ***85*** the following rather interesting result can be received [5,54-56,88,90].

***Theorem 86**. For an arbitrary integer $n \geq 3$ exists d-dimensional global transition function $\tau^{(n)}$, defined in alphabet A_p with respect to which the d-GDP and the d-GLDP are equivalent and have the negative solution.*

On the basis of theorem ***86*** we can solve an interesting question about estimation of number of global transition functions defined in alphabet A_p relative to which both problems ***d-GDP*** and ***d-GLDP*** have the positive solutions**.** The investigation of the question is being summarized by the following general result, which presents independent interest, also [5,54-56,88,90].

***Theorem 87**. For «almost all» d-dimensional global transition functions defined in alphabet A_p both problems d-GDP and d-GLDP have negative solution.*

Thus, we have proved a slightly unexpected result, namely**:**

The quota of all global transition functions, defined in alphabet A_p, which have the positive solutions of the d-GDP and the d-GLDP, equals zero.

From our results on the ***d-GDP*** and ***d-GLDP*** among all ***d-***dimensional global transition functions $\tau^{(n)}$ **($n \geq 2$),** defined in alphabet A_p, an infinite hierarchy of complexity with respect to the ***d-GDP/d-GLDP*** can be introduced**.** We shall say, that a global transition function $\tau^{(n)}$ *belongs to the **s**-level of complexity* [*designation* $\tau^{(n)} \in L(s)$] if and only if for the function takes place representation of the following kind:

$$\boxed{\tau^{(n)} = \tau_1^{(n_1)}\tau_2^{(n_2)}\tau_3^{(n_3)} \ldots\ldots \tau_k^{(n_k)} \qquad (n_j \leq s < n) \qquad (\exists j)(n_j = s)}$$

and analogous representation under conditions $(\exists j)(n_j > s)$ $(j=1..k)$ is absent. Furthermore, if for certain global transition function $\tau^{(n)}$ the ***d-GDP (d-GLDP)*** has *negative* solution, then such function should be ascribed to class of the ***L(n)****-level of complexity***.** Under the condition of the above results, definitions and theorem ***87*** the following asymptotical correlations can be proved, namely**:**

$$\boxed{\begin{array}{c}(\forall s\geq 2)(\#L(s)>0)\,;\quad \lim_{s\to\infty}\frac{\#L(s)}{a^{a^s}}\geq 1 \qquad (a-\text{prime integer})\\ \#-\text{cardinality of an arbitrary set } G\end{array}}$$

Furthermore, on the basis of theorem ***84*** and definition of the complexity concept of ***d***-dimensional $\tau^{(n)}$ global transition functions with respect to the problem ***d-GDP/d-GLDP*** the following rather important result relative to solvability of complexity levels of global transition functions takes place.

<u>Theorem 88</u>. The problem of belonging of an arbitrary d-dimensional global transition function (GTF) $\tau^{(n)}$***, defined in alphabet*** A_p***, to s-level of complexity is algorithmically solvable.***

The above results on *composition* problem essentially used algebraic properties of alphabet A_p, because arbitrary local transition function $\sigma^{(n)}$ can be exceptionally presented by a polynomial in ***(mod a) of*** the maximal degree ***n*(a-1)*** over field A_p, and vice versa. Whereas for case of the alphabet A_c ***(c –*** *composite number***)*** by far not each local transition function $\sigma^{(n)}$, defined in the alphabet A_c, can be presented in a polynomial form of the above type**.** Namely**,** the following general result takes place [5,54-56,88,90].

<u>Theorem 89</u>. For an arbitrary alphabet A_c ***the quote (H) of local transition functions*** $\sigma^{(n)}$ ***defined in the alphabet*** A_c***, which have the polynomial representation in (mod a), satisfies the following correlation:***

$$\boxed{\frac{1}{a^{a^n-4^n}}\leq H\leq\frac{1}{a^{a^n-(a-2)^n}}}$$

Thus, for case of ***a-***composite number «*almost all*» local transition functions $\sigma^{(n)}$ defined in alphabet A_c, cannot be presented in a polynomial form in ***(mod a)*** for large enough values ***n*** or/and ***a*.** To this effect, we have introduced an *algebraic system* ***(AS)***, in which «*almost all*» local transition functions**,** defined in alphabet A_c can be exceptionally presented by polynomials in ***(****mod* ***a)*** [84]**.** On the basis of theorems ***83, 84*** and ***34*** we have obtained the following rather interesting result relative to problem ***d-GDP/d-GLDP*** for case of general alphabet A_c of ***HS-***models.

<u>Theorem 90</u>. With respect to «almost all» global transition functions $\tau^{(n)}$ ***defined in alphabet*** A_c ***whose local transition functions admit polynomial representation of form (9), problems d-GDP and d-GLDP are equivalent and algorithmically solvable.***

Thus, on the basis of theorems ***34*** and ***90*** the above results on problems ***d-GDP/d-GLDP*** can be spread on «*almost all*» global transition functions defined in alphabet A_c**.** However**,** for *general* case of alphabet ***A*** the question is open and the detailed discussion of the question can be found in monographs [5,8,9]. The general results presented in chapter ***7*** solve problems ***d-GDP*** and ***d-GLDP*** for classical ***HS-***models as a whole. Meantime, the main results obtained on the problems with respect to classical ***HS-***models are valid for non-classical ***(****unstable****) HS-***models too.

It is necessary to have in mind, the results presented above are valid, basically, for classical ***d-HS (d≥1)*** whose local transition functions $\sigma^{(n)}$ satisfy the following determinative relation, namely:

$$(\exists h\in A)\Big(\sigma^{(n)}(h,h,h,\dots,h)=h\Big)$$

i.e. alphabet ***A*** of internal states of the individual automaton of the model contains specially chosen, so-called state of «*rest*» ***h***, as a rule, «***0***» for alphabet ***A***={***0,1,2, ..., a-1***}. This state has numerous and natural enough interpretations, above all, with the applied standpoint. It is necessary to have in mind, that all above-presented results formulated relative to state of *rest* «***0***» are valid and for the general case of *state* of rest ***h*** ∈ ***A***, i.e. for all classical ***d-HS (d ≥ 1)***.

Discrimination of the separate type of *classical* ***HS***–models is caused by a whole series of rather essential circumstances. Among them it is possible to note, first of all, the problem of existence in ***HS*** of so–called *nonconstructible configurations (the **noncondytuctibility** problem)* and a problem of dynamics reversibility of the structures. In particular, in the first case the given approach had allowed to introduce three new rather important concepts of ***non–constructible*** configurations ***(NCF–1, NCF–2, NCF–3)***, which provide origination of a whole series of rather essential results, whereas the second allows to see the dynamics reversibility problem from a new standpoint. Thus, differentiation of the set ***C(A,d)*** of all configurations into *two non-intersecting* subsets ***C(A,d,ϕ)*** and ***C(A,d,∞)*** of *finite* and of *infinite* configurations accordingly is direct consequence of condition of belonging of a ***HS***–model to type of ***classical*** ones. The essence of concept of dynamics convertibility is more precisely being revealed just in the environment of classical ***HS***–models, what once again confirms the following result, namely:

There are the classical d–HS (d ≥ 1) not possessing nonconstructibility of NCF–type and for which each configuration c*∈C(A,d,ϕ) has predecessors from the set C(A,d,∞), but not each such configuration has a predecessor from the set C(A,d,ϕ). There are classical d–HS (d ≥ 1) not possessing nonconstructibility of types NCF and NCF–1, however for which there are configurations c^{∞}∈C(A,d,∞) which have at least two predecessors from the set C(A,d,∞).

In particular, the given result quite naturally causes expediency of introduction for *classical* ***d–HS (d ≥ 1)*** concepts of ***relative convertibility (irreversibility)*** of their dynamics. Meantime, there are many other rather essential reasons conditioning investigations classical ***HS***–models as a special object. At present, in this direction we carry out a whole series of researches concerning, above all, the mentioned classical ***HS***–models in the context of their theoretical and applied aspects.

At last, a whole series of other results received by us in process of researches on the ***HS*** problems, can be found as in the given monograph in the annotated form, and in our publications (*first of all*, *in* [1,3,5, 9,5,54-57,82,88,90]) in the form of the thorough strict proofs and interpretations of numerous computer experiments with the classical ***HS***-models. In particular, detailed elaboration of the nonconstructibility problem, decomposition problem, modelling in ***d-HS (d≥ 1)***, and so on have been presented. Practically exhaustive bibliography of our works in ***HS*** problems can be found in *References* to the monograph and in the internet-bibliography [536], namely: ***http://www.geocities.com/ca_hs_ref***.

The monograph is the second revised and supplemented edition of our previous monograph, founded on a special lecture course «*Classical Homogeneous Structures* (*Classical Cellular Automata*)» that has been given for students and graduate students of faculty of mathematics and informatics at the ***Grodno*** State University during ***April – May, 2008*** [567].

Литература

1. ***Аладьев В.З.*** К теории однородных структур.- Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1972, 190 с.
2. ***Аладьев В.З.*** Введение в архитектуру моделей ***ЕС ЭВМ.-*** Таллинн: Изд-во Валгус, 1976, 340 с.
3. ***Aladjev V.Z.*** Mathematical Theory of Homogeneous Structures and Their Applications.- Tallinn: Valgus Press, 1980, 267 p.
4. ***Аладьев В.З. и др.*** Математическая биология развития.- Москва: Изд-во Наука, 1982, 256 с.
5. ***Аладьев В.З.*** Однородные структуры**:** Теоретические и прикладные аспекты.- Киев: Республиканское изд-во Тэхника, 1990, 272 с.
6. ***Аладьев В.З., Тупало В.Г.*** Компьютерная хрестоматия.- Киев: Изд-во УСЭ, 1993, 480 с. [*обзорная статья* ***«V.Z. Aladjev. Homogeneous Structures: Theoretical and Applied Aspects***»]
7. ***Аладьев В.З., Тупало В.Г.*** Научно**-**практическая деятельность Таллиннской исследовательской группы**:** Итоговые результаты за **25-**летие ***(1969 – 1993).-*** Москва: Минтопэнерго, 1994, 80 с.
8. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Вопросы математической теории классических однородных структур.- Гомель: Изд-во БЕЛГУТ, 1996, ISBN 5-063-56078-5.
9. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Математическая теория классических однородных структур.- Таллинн-Гомель: Изд-во TRG **&** VASCO **&** Salcombe Eesti Ltd., 1998.
10. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Научно-исследовательская активность Таллиннской исследовательской группы за период ***1995 – 1998.-*** Таллинн-Гомель-Москва: Изд-во TRG **&** VASCO Ltd, 1998, 80 с., ISBN 14-064298-56.
11. ***Параллельная обработка информации и параллельные алгоритмы*** **/** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Таллинн: Республиканское изд-во Валгус, 1981, 296 с.
12. ***Параллельные системы обработки информации*** **/** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Таллинн: Республиканское изд-во Валгус, 1983, 376 с.
13. ***Математическое обеспечение ЕС ЭВМ и АСУ*** **/** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Таллинн: Республиканское изд-во Валгус, 1978, 190 с.
14. ***Система управления базами данных на основе операционной системы МИНИОС и СУБД ОКА*** **/** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Таллинн: Изд-во Валгус, 1980, 150 с.
15. ***Структурно-аналитические модели и алгоритмы распознавания и идентификации объектов управления*** **/** Под ред. ***В.З. Аладьева.-*** Киев: Изд-во Тэхника, 1993.
16. ***Аладьев В.З.*** Задача о матрицах, возникающая в теории самовоспроизводящихся автоматов **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***19, № 2,*** 1970, с. 159-165.
17. ***Аладьев В.З.*** Некоторые вопросы, возникающие в теории сотообразных структур **//** Изв. АН ЭССР. Биология, ***19, № 3,*** 1970, с. 266-277.
18. ***Аладьев В.З.*** Одна теорема теории сотообразных структур **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***19, № 3,*** 1970, с. 365-368.
19. ***Аладьев В.З.*** Вычислимость в однородных структурах.- Москва: Изд-во ВИНИТИ, 1971, 265 с.
20. ***Аладьев В.З.*** К теории однородных структурах.- Москва: Изд-во ВИНИТИ, 1971, 188 с.
21. ***Аладьев В.З.*** Об одном асимптотическом свойстве стохастических сотообразных структур **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 2,*** 1971, с. 205-208.

22. ***Аладьев В.З.*** Некоторые оценки для структур Неймана-Мура // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 3,*** 1971, с. 335-342.

23. ***Аладьев В.З.*** Две модели, решающие проблему Французского флага // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 3,*** 1971, с. 360-362.

24. ***Аладьев В.З.*** К устойчивости некоторых оптимальных дифференциальных систем // Автоматика и вычислительная техника.- Москва: Изд-во АН СССР, ***14,*** 1971.

25. ***Аладьев В.З., Ефимов Н.И.*** О некоторых свойствах структур Мура // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 2,*** 1971, с. 208-210.

26. ***Аладьев В.З., Орав Т.А.*** Числовая модель регуляции осевой структуры // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***20, № 3,*** 1971, с. 276-278.

27. ***Аладьев В.З., Полуэктов Р.А.*** О моделях регуляции пространственной структуры // Изв. АН ЭССР. Биология, ***20, № 4,*** 1971, с. 360-363.

28. ***Аладьев В.З.*** К теории однородных структур // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***21, № 2,*** 1972.

29. ***Aladjev V.Z.*** Computability in Homogeneous Structures // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***21, № 1,*** 1972, с. 79-83.

30. ***Aladjev V.Z.*** Some questions concerning nonconstructibility and computability in homogeneous structures // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***22, № 2,*** 1973, с. 210-214.

31. ***Аладьев В.З.*** Некоторые алгоритмические вопросы математической биологии развития // Изв. АН ЭССР. Биология, ***22, № 1,*** 1973, с. 68-76.

32. ***Аладьев В.З. Tau(n)-***грамматики и порождаемые ими языки // Изв. АН ЭССР. Биология, ***23, № 1,*** 1974, с. 67-87.

33. ***Аладьев В.З., Орав Т.А.*** Проблема кибернетического моделирования процессов развития // Изв. АН ЭССР. Биология, ***23, № 3,*** 1974, с. 197-200.

34. ***Аладьев В.З., Осипов О.Б.*** Об одном методе моделирования в однородных структурах // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***23, № 4,*** 1974, с. 414-417.

35. ***Аладьев В.З.*** О сложности параллельных алгоритмов, определяемых однородными структурами // Изв. АН ЭССР. Физ.-Матем., ***24, № 2,*** 1975, с. 267-272.

36. ***Аладьев В.З., Осипов О.Б.*** К вопросу реализации операционных систем в вычислительных структурах и средах / Труды **4-**й Всес. конф. по однородным вычислительным системам и средам.- Киев: Изд-во Наукова Думка, 1975, с. 256-260.

37. ***Аладьев В.З.*** Характеристика одномерных однородных структур в терминах стэковых автоматов, *в сборнике статей* [**2**], с. 244-276.

38. ***Аладьев В.З.*** К понятию однородных структур, *в сборнике статей* [**2**], с. 186-197.

39. ***Аладьев В.З. и др.*** Содержание теории однородных структур, *в сборнике* [**2**], с. 198-213.

40. ***Аладьев В.З., Осипов О.Б.*** Моделирование операционных систем на однородных структурах, *в сборнике статей* [**2**], с. 214-243.

41. ***Аладьев В.З., Клюшников В.Т.*** Некоторые свойства конфигураций, *в сборнике статей* [**13**].

42. ***Аладьев В.З., Осипов О.Б.*** Параллельная система обработки информации, *в сборнике* [**14**].

43. ***Aladjev V.Z.*** To Nonconstructibility in Homogeneous Structures, *in the collection* [**14**], pp. 154-171.

44. ***Aladjev V., Vetyusme R.*** On Composition Problem in Homogeneous Structures, *in the collection* [**14**].

45. ***Аладьев В.З.*** Некоторые перспективы развития теории однородных структур как формального аппарата исследования вычислительной техники параллельного действия, *в сборнике статей* [**14**], с. 177-210.

46. ***Аладьев В.З.*** Кибернетическое моделирование биологии развития, *в сборнике статей* [***11***].

47. ***Аладьев В.З.*** Перспективы развития теории однородных структур **/** Труды ***3-***й Венгерской конф. по вычислительной технике.- Будапешт: Изд-во АН Венгрии, 1981, с. 17-34.

48. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А.*** Проблемы внедрения технологии параллельной обработки при решении задач бухучета **/** Труды ***2-***й Всес. Конф. «*Бухгалтерский учет в условиях совершенствования хозяйственного механизма*»***.-*** Баку, 1981, с. 132-136.

49. ***Аладьев В.З., Блиндер Б.С.*** Об одном подходе к созданию высокоэффективных систем обработки информации на базе вычислительной техники ***ВЦКП*** **/** Труды Всес. конференция «*Основные направления развития программного обеспечения ЭВМ, комплексов и сетей ЭВМ*»***.-*** Севастополь, 1981, с. 25-35.

50. ***Аладьев В.З.*** Об одном нестандартном подходе к созданию высокопроизводительных систем информационного поиска на основе информационного распараллеливания в однородных структурах **/** Труды Всес. Симпоз. «*Высокопроизводительные системы информационного поиска и управления базами данных*»***.-*** Кишинев: Изд-во АН Молдавии, 1982, с. 39-42.

51. ***Аладьев В.З.*** Описание параллельной системы обработки информации для ***ЕС ЭВМ*** в терминах систем алгоритмических алгебр **/** Всес. семинар «*Параллельное программирование и высокопроизводительные вычислительные системы*»***.-*** Киев: Изд-во Наукова Думка, 1982.

52. ***Аладьев В.З., Бойко В.К.*** Параллельная управляющая система ***ОВС,*** *в сборнике статей* [***12***].

53. ***Аладьев В.З.*** Избранные вопросы теории однородных структур, *в сборнике* [***12***], с. 141-341.

54. ***Aladjev V.Z.*** *Solutions of a Series of Problems in the Mathematical Theory of Homogeneous Structures* ***/ TR-040684.-*** Tallinn**:** Изд-во P/A Silikaat, 1985, 1566 p.

55. ***Aladjev V.Z., Zinkevich T.G.*** *The Classical Homogeneous Structures* ***/ TR-041085.-*** Tallinn**:** Изд-во P/A Silikaat, 1985, 947 p.

56. ***Aladjev V.Z.*** *Recent Results in the Theory of Homogeneous Structures* ***/ TR-041285.-*** Tallinn: Изд-во P/A Silikaat, 1985, 942 p.

57. ***Аладьев В.З.*** Однородные структуры**:** *Модель перспективных параллельных вычислительных систем* **/** Новые направления и средства аналого-цифрового преобразования и обработки информации.- Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1988, с. 76-90.

58. ***Aladjev V.Z. et al.*** Homogeneous Structures**:** Theoretical and Applied Aspects, *in the collection* [***6***].

59. ***Aladjev V.Z.*** Operations Over Languages Generated by ***Tau(n)-Grammars //*** Comment. Mathem., University Carolinae Praga, ***154,*** no. ***2,*** 1974, pp. 211-220.

60. ***Aladjev V.Z.*** About the Equivalence of ***Tau(n)-Grammars*** and ***Sb(m)-Grammars //*** Comment. Mathem., University Carolinae Praga, ***157,*** no. ***4,*** 1974, pp. 717-726.

61. ***Aladjev V.Z.*** Survey of Research in the Theory of Homogeneous Structures and Their Applications ***//*** Mathematical Biosciences, ***22,*** 1974, pp. 121-154.

62. ***Aladjev V.Z.*** The Behavioural Properties of Homogeneous Structures ***/ 1st*** Intern. Symp. on ***USAL,*** Tokyo, Japan, 1975, pp. 28-49.

63. ***Aladjev V.Z.*** Some New Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** Proc. Intern. Symp. on Mathem. Topics in Biology, Kyoto, Japan, 1978, pp. 193-226.

64. ***Aladjev V.Z.*** Theory of Homogeneous Structures and Their Applications **/** Proc. ***2nd*** Intern. Conf. on Mathem. Modelling, Sant-Louis, USA, 1979, pp. 121-142.

65. ***Aladjev V.Z.*** Homogeneous Structures in Engineering Sciences **/** Proc. ***19th*** AnnualMeeting Society of Engineering Science.- University of Missouri-Rolla, USA, 1982.

66. ***Aladjev V.Z.*** The general modern problems in the mathematical theory of homogeneous structures **/** Abstracts of Intern. Workshop ***PARCELLA-82.-*** Berlin: Springer, 1982.

67. ***Aladjev V.Z.*** Homogeneous Structures in Mathematical Modelling **/** The ***4th*** Intern. Conf. on Mathem. Modelling**.-** Zurich, 1983, pp. 10-15.

68. ***Aladjev V.Z.*** New Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** Informatik-Skripten, no. ***3*,** Braunschweig, 1984, pp. 3-15.

69. ***Aladjev V.Z.*** New Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** ***MTA*** Szamitastechnikai es. Autom. Tanulmanuok, ***158*,** Budapest, 1984, pp. 3-14.

70. ***Aladjev V.Z.*** A Criterion of Nonconstructibility in the Classical Homogeneous Structures **/** Proc. Intern. Workshop ***PARCELLA-84.-*** Berlin**:** Akademie-Verlag, 1984, pp. 1-5.

71. ***Aladjev V.Z.*** A Few Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** Mathematical Research, Band **25.-** Berlin**:** Akademie-Verlag, 1985, pp. 168-175.

72. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** ***MTA*** Szamitastechnikai es. Automat. Tanulmanuok, ***185*,** Budapest, 1986, pp. 261-280.

73. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results in the Mathematical Theory of Homogeneous Structures **//** Trends, Techniques and Problems in Theoretical Comp. Science **/** Lecture Notes in Comp. Sci., Band ***281.-*** Heidelberg: Springer-Verlag, 1986, pp. 110-128.

74. ***Aladjev V.Z.*** Homogeneous Structures in Mathematical Modelling **/** Proc. ***6th*** Intern. Conf. on Mathem. Modelling.- Sant-Louis: Washington University, USA, 1987.

75. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results in the Theory of Homogeneous Structures **/** Parallel Processing by Cellular Automata and Arrays.- Amsterdam: North-Holland, 1987, pp. 31-48.

76. ***Aladjev V.Z.*** Unsolved Theoretical Problems in Homogeneous Structures **/** Mathematical Research, Band ***48*.-** Berlin**:** Akademie-Verlag, 1988, pp. 33-49.

77. ***Aladjev V.Z.*** The Complexity Problem in Homogeneous Structures **/** The Intern. Conf. on Comp. Sciences.- Praga, 1988, pp. 42-57.

78. ***Aladjev V.Z.*** Computer Investigation of Homogeneous Structures **/** The Intern. Conf. ***IMYCS-88.-*** Bratislava, 1988, pp. 31-41.

79. ***Aladjev V.Z.*** Survey on Homogeneous Structures **/** Tech. Rept., no. ***19-12/89*.-** PTIP, 1989, 670 p.

80. ***Aladjev V.Z.*** Survey on Some Theoretical Results and Applicability Aspects in Parallel Computation Modelling **//** J. New Gener. Comp. Systems, ***1*,** no. ***4*,** 1988, pp. 307-317.

81. ***Aladjev V.Z.*** A solution of the Steinhays's combinatorical problem **//** Appl. Math. Lett., no. ***1*,** 1988.

82. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results in the Mathematical Theory of Homogeneous Structures **/** New Trends in Computer Sciences.- Amsterdam**:** North-Holland, 1988, pp. 3-54.

83. ***Aladjev V.Z.*** Recent Results on the Theory of Homogeneous Structures **/** New Approaches to Parallel Processing.- Berlin**:** Akademie-Verlag, 1988, pp. 128-147.

84. ***Aladjev V.Z.*** An Algebraical System for Polinomial Representation of ***K-***Valued Logical Functions **//** Applied Mathem. Letters, no**. *3*,** 1988, pp. 207-209.

85. ***Aladjev V.Z.*** Interactive Program System for Modelling of Homogeneous Structures **/** The ***7th*** Intern. Conf. on Mathem. and Comp. Modelling, Chicago, USA, 1989.

86. ***Aladjev V.Z. et al.*** Theoretical and Applied Aspects of Homogeneous Structures **/** Proc. Intern. Workshop ***PARCELLA-90.-*** Berlin: Akademie-Verlag, 1990, pp. 48-70.

87. ***Aladjev V.Z.*** Homogeneous Structures**:** Theoretical and Applied Aspects **/** The ***8th*** Intern. Conf. on Mathem. and Comput. Modelling, Washington University, USA, 1991.

88. ***Aladjev V.Z.*** *Survey on the Homogeneous Structures* **/** Tech. Rept., no. ***12-19/89*** **(***revised and extended report***)**, Project-Technological Institute of Industry.- Tallinn, 1989, 1047 p.

89. ***Aladjev V., Hunt U., Shishakov M.*** Homogeneous Structures**:** Conception, Basics of Theory and Applied Aspects***.- TRG: http://www.geocities.com/Pentagon/1397.***

90. ***Aladjev V., Hunt U.*** *Fundamental Problems in the Theory of the Classical Homogeneous Structures* ***/ TRG*** Research Rept. ***TRG-55/97.-*** Tallinn**:** Изд-во VASCO, 1997, 966 p.

91. ***Аладьев В.З. и др.*** Прикладные аспекты теории однородных структур ***/ 8-***я Белорусская математическая конференция, ч. ***3*,** Минск: Изд-во АН Белоруссии, 19-24 июня 2000.

92. ***Аладьев В.З. и др.*** Моделирование в классических однородных структурах **/** Труды Межд. конф. по матем. моделированию ***(МКММ-2000).–*** Херсон, Украина, 2000.

93. ***Аладьев В.З., Шишаков М.Л.*** Введение в математический пакет ***Mathematica 2.2.-*** Москва: ИИД ФилинЪ, 1997, 363 с., ISBN 5-89568-004-6.

94. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Основы компьютерной информатики.- Таллинн-Гомель: Российская Академия Ноосферы **&** TRG, 1997, 396 с.

95. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Основы компьютерной информатики**.-** Москва: ИИД ФилинЪ, 1998, 496 с., ISBN 5-89568-068-2.

96. ***Аладьев В.З., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Основы компьютерной информатики**. 2-**е изд.- Москва: ИИД ФилинЪ**,** 1999, 545 с.

97. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Введение в среду математического пакета ***Maple V.-*** Минск: Международная Академия Ноосферы, 1998, 452 с.

98. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Программирование в среде математического пакета ***Maple V.-*** Минск-Москва: Российская Академия Экологии, 1999.

99. ***Аладьев В.З., Богдявичюс М.А.*** Решение физико-технических и математических задач с ***Maple V.-*** Таллинн-Вильнюс: Изд-во TRG Press, 1999, 686 с., ISBN 9986-05-398-6.

100. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А., Хунт Ю.Я., Шишаков М.Л.*** Рабочее место математика.- Минск**-**Таллинн**-**Москва**:** Российская Академия Естественных Наук, 1999, 608 с.

101. ***Аладьев В.З., Шишаков М.Л.*** Рабочее место математика**.-** Москва: Лаборатория Базовых Знаний, 2000, 752 с. + ***CD*,** ISBN 5-93208-052-3.

102. ***Аладьев В.З., Богдявичюс М.А. Maple 6:*** Решение математических, статистических и инженерно-физических задач.- Москва: Изд-во Лаборатория Базовых Знаний, 2001, 850 с.

103. ***Аладьев В.З., Богдявичюс М.А.*** Специальные вопросы работы в среде математического пакета ***Maple.-*** Вильнюс: Изд-во Вильнюсского технического ун-та, 2001, 208 с. + ***CD.***

104. ***Aladjev V.Z., Bogdevicius M.A. Interactive Maple:*** *Solution of Mathematical*, *Statistical*, *Engineering and Physical Problems***.-** Tallinn: International Academy of Noosphere, Baltic Branch, 2001**-**2002, ***CD*** with Booklet, ISBN 9985-9277-1-0.

105. ***Аладьев В.З., Ваганов В.А., Гришин Е.П.*** Дополнительные программные средства математического пакета ***Maple*** релизов ***6*** и ***7.-*** Таллинн: Международная Академия Ноосферы, Балтийское отделение, 2002, 314 с. + ***CD*,** ISBN 9985-9277-3-7.

106. ***Аладьев В.З.*** Эффективная работа в ***Maple 6/7.-*** Москва: Изд-во Лаборатория Базовых Знаний, 2002, 334 с. + ***CD*,** ISBN 5-93208-118-X.

107. ***Аладьев В.З., Лиопо В.А., Никитин А.В.*** Математический пакет ***Maple*** в физическом моделировании.- Гродно: Изд-во Гродненского госуниверситета, 2002, 416 с.

108. ***Aladjev V.Z., Vaganov V.A.*** *Computer Algebra System* ***Maple:*** *A new software library***.-** Tallinn: International Academy of Noosphere, the Baltic Branch, 2002, ***CD*** with Booklet.

109. ***Aladjev V.Z., Bogdevicius M.A., Prentkovskis O.V.*** *A New Software for Mathematical Package* ***Maple*** *of Releases* ***6, 7*** *and* ***8.-*** Vilnius: Vilnius Gediminas Technical University **&** International Academy of Noosphere, 2002, 404 p., ISBN 9985-9277-4-5, 9986-05-565-2.

110. ***Aladjev V.Z., Vaganov V.A.*** *Systems of Computer Algebra: A new software toolbox for* ***Maple.-*** Tallinn: International Academy of Noosphere, 2003, 270 p. + ***CD.***

111. ***Aladjev V.Z., Bogdevicius M.A., Vaganov V.A.*** *Systems of Computer Algebra: A New Software Toolbox for* ***Maple.*** Second edition**.-** Tallinn: International Academy of Noosphere, the Baltic Branch, 2004.

112. ***Aladjev V.Z. Computer Algebra Systems:*** *A New Software Toolbox for* ***Maple.-*** Palo Alto: Fultus Corp., 2004, 575 p., ISBN 1-59682-000-4.

113. ***Aladjev V.Z. Computer Algebra Systems:*** *A New Software Toolbox for* ***Maple.-*** Palo Alto: Fultus Corp., 2004, Adobe Acrobat eBook, ISBN 1-59682-015-2.

114. ***Aladjev V.Z. et al.*** *Electronic Library of Books and Software for Scientists, Experts, Teachers and Students in Natural and Social Sciences***.-** CA: Palo Alto: Fultus Corporation, 2005, ***CD.***

115. ***Aladjev V.Z., Bogdevicius M.A. Maple:*** *Programming, Physical and Engineering Problems***.-** CA: Palo Alto, Fultus Corp., 2006, 404 p., ISBN 1-59682-080-2.

116. ***Аладьев В.З.*** Системы компьютерной алгебры. ***Maple:*** Искусство программирования.- Москва: Изд-во БИНОМ, 2006, 792 с., ISBN 5-93208-189-9.

117. ***Аладьев В.З.*** Основы программирования в ***Maple.-*** Таллинн: Международная Академия Ноосферы, 2006, ***(pdf),*** ISBN 9985-9508-1-X, ***http://*****www.aladjev-maple.narod.ru.**

118. ***Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.*** Программирование и разработка приложений в ***Maple.-*** Гродно: Изд-во ГрГУ, Таллинн: Международная Академия Ноосферы, 2007, 456 с.

119. ***Математическая энциклопедия.-*** М.: Изд-во Советская энциклопедия, т. ***1,*** 1977, с. 50-52.

120. ***General Cellular Automata Subject Classification.- http://dynamics.bu.edu.***

121. ***Italian Cellular Automata Program.- inews-mailgate@bloom-beacon.mit.edu.***

122. **www.sd-eudb.net** ***(****ввести «****International Academy of Noosphere****» in the full-search field****).***

123. ***Mathematical Problems in Biology*** **/** Ed. ***R. Bellman.-*** N. Y.: Academic Press, 1962.

124. ***Von Neumann J.*** *Theory of Self-Reproducing Automata* **/** Ed. ***A.W. Burks.-*** Urbana: University of Illinois Press, 1966, 324 p.

125. ***Codd E.F.*** *Cellular Automata***.-** New York: Academic Press, 1968, 120 p.

126. ***Zuse K.*** *Rechnender Raum***.-** Braunschweig: Friedrich Vieweg **&** Sohn, 1969, [*English translation:* ***Calculating Space,*** MIT Technical Translation ***AZT-70-164-GEMIT,*** MIT ***(Proj. MAC),*** Cambridge, Mass. 02139, Feb. 1970].

127. ***Hedlund G.*** Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical Systems **//** Mathem. System Theory, ***3,*** 1969, pp. 320-375.

128. ***Essays on Cellular Automata*** **/** Ed. ***A.W. Burks.-*** Urbana: Univ. of Illinois Press, 1970.

129. ***Yamada H., Amoroso S.*** Tessellation Automata **//** Information and Control***, 14,*** 1969.

130. ***Yamada H., Amoroso S.*** Structural and Behavioural Equivalence of Tessellation Automata **//** Information and Control***, 18,*** 1971, pp. 1-31.

131. ***Smith A.R.*** *Cellular Automata Theory* **/** PhD Thesis.- Stanford: Stanford Univ., 1970.

132. ***Banks E.R.*** *Information Processing and Transmission in Cellular Automata* **/** PhD Thesis.- Massachusetts**:** MIT Press, 1971, 215 p.

133. ***Ostrand T.J.*** *Property Preservation by Tessellation Automata* **/** PhD Thesis.- New Jersey: The State University of New Jersey, 1972, 178 p.

134. ***Kitagawa T.*** Cell Space Approaches in Biomathematics **//** Math. Biosciences, ***19*****,** 1974.

135. ***Studies on Cellular Automata*****.-** Tokyo: Research Institute of Electrical Comm., 1975.

136. ***Сметанич Я., Иваницкий Г.*** Модели развивающихся биологических объектов на основе ***L*****-**систем **//** Биофизика, ***XXII*****,** вып. ***5*****,** 1979, с. 55-97.

137. ***Wunsch G.*** *Zellulare Systeme***.-** Berlin**:** Akademie-Verlag, 1977, 317 p.

138. ***Vollmar R.*** *Algorithmen in Zellularautomaten***.-** Stuttgart: B.G. Teubner, 1979, 194 p.

139. ***Vollmar R.*** Some Remarks on Pipeline Processing by Cellular Automata **//** Comp. and Artificial Intelligence**,** ***6*****,** no. ***3*****,** 1987, pp. 263-278.

140. ***Блюмин С.Л.*** О проблеме конструирования линейными клеточными автоматами **//** Автоматика и телемеханика, ***№ 11*****,** 1981, с. 131-138.

141. ***Buttler J.*** Synthesis of one-dimensional binary cellular automata systems from composite local maps **//** Information and Control, ***43*****,** no. ***3*****,** 1979, pp. 42-54.

142. ***Buttler J.*** Decomposable Maps in General Tessellation Structures **//** JCSS**,** ***32*****,** 1979, pp. 120-137.

143. ***Wolfram S.*** Statistical Mechanics of Cellular Automata **//** Rev. Mod. Phys., ***55*****,** 1983.

144. ***Wolfram S.*** Universality and Complexity in Cellular Automata **//** Physica, ***100*****,** 1984.

145. ***Wolfram S.*** Computation Theory of Cellular Automata **//** Comm. Math. Phys., ***96*****,** 1984.

146. ***Preston K., Duff M.*** *Modern Cellular Automata***.-** London**:** Plenum Press, 1984.

147. ***Cellular Automata*** **/** Eds. ***T. Toffoli, S. Wolfram*****.-** Amsterdam**:** North-Holland, 1984.

148. ***Martin O.*** Algebraic Properties of Cellular Automata **//** Comm. Math. Phys., ***93*****,** 1984.

149. ***Theory and Applications of Cellular Automata*****.-** Singapure**:** Word Scientific, 1986.

150. ***Toffoli T., Margolus N.*** *Cellular Automata Machines***.-** Cambridge: MIT Press, 1987. [*русский пер.***:** Машины клеточных автоматов.- Москва: Изд-во Мир, 1991, 278 с.].

151. ***Toffoli T.*** *Cellular Automata Machines as Physics Emulators***.-** Tricate: The International Center for Theoretical Physics, 1988, pp. 28-36.

152. ***Toffoli T.*** Cellular Automata and Mathematical Physics **/** Proc. *6th* Intern. Confer. on Math. and Comp. Modelling.- Sant-Louis, USA, 1987, pp. 163-167.

153. ***Gutowitz H.*** Local Structure Theory for Cellular Automata **//** Physica, ***280*****,** 1987.

154. ***Willson S.*** Cellular Automata Can Generate Fractals **//** Discret. Appl. Math., ***8*****,** 1984.

155. ***Haken H.*** *Synergetics: An Introduction***.-** Berlin-Heidelberg**:** Springer-Verlag, 1983.

156. ***Beitrage zur Theorie der Polyautomaten*** **/** Ed. ***R. Vollmar*****.-** Braunschweig, 1982.

157. ***Cellular Automata and Modelling of Complex Physical Systems*****.-** Les Houches, 1989.

158. ***Кудрявцев В. и др.*** Основы теории однородных структур.- Москва: Наука, 1990, 290 с.

159. ***Garzon M.*** *Models of Massive Parallelism: Analysis of Cellular Automata and Neural Net works***.-** Berlin**:** Springer-Verlag, 1995, 272 p.

160. ***Cellular Automata*** **/** Eds. ***T. Toffoli, R. Vollmar*****,** Report**,** ***108*****,** Saarbrucken, 1995.

161. ***Adamatzky A.*** *Identification of Cellular Automata*.- London: Taylor & Francis, 1994.

162. ***Automata, Languages and Development*.-** Amsterdam: North-Holland, 1976.

163. ***Rozenberg G.*** Bibliography of ***L***-Systems // Theoret. Comp. Sciences, ***5***, no. ***1***, 1977.

164. ***Bellman R.*** *Introduction to Artificial Intelligence*.- San Francisco: Boyd&Fraser, 1978.

165. ***Margolus N. CAM-8:*** *A Computer Architecture Based on Cellular Automata*.- Fields Institute Communications, ***6***, 1996, pp. 167-187.

166. ***Информация в Internet***, получаемая по ключевой фразе «*Cellular Automata*».

167. ***Gaylord R., Nishidate K.*** *Modeling Nature: Cellular Automata Simulations with* ***Mathematica.-*** Berlin-Heidelberg-London: Springer-Verlag, 1996, 234 p.

168. ***Reiter C.*** Life and Death on a Computer Screen.- Discover (*August* ***1984***), pp. 81-83.

169. ***Legendi T.*** Cellprocessors in Computer Architecture // Comp. Linguist. and Comp. Languages, ***11***, no. ***2***, 1976, pp. 147-167.

170. ***Takacs D.*** A Maximum-Selector Design in ***CODD-ICRA*** Cellular Automata // Cybernetics, no. ***7***, 1977, pp. 105-144.

171. ***Mathematical Research*.-** Band ***7 (1981), 25 (1985), 29 (1986), 48 (1988).-*** Berlin: Springer-Verlag.

172. ***Gardner M.*** *Wheeles, Life and Other Mathematical Amusements*.- N.Y.: Freeman, 1983.

173. ***Achasova S., Bandman O., Markova V., Piskunov S.*** *Parallel Substitution Algorithms: Theory and Application*.- Singapure: World Scientific, 1995, 190 p.

174. ***Brender R.*** *A Programming System for the Simulation of Cellular Spaces*.- Ann Arbor: The University of Michigan, 1970, 180 p.

175. ***Cellprocessors and Cellalgorithms*** / Informatik-Skripten, **2**.- Braunschweig, 1981.

176. ***Каляев А.В.*** Однородные коммутационные регистровые структуры.- Москва: Изд-во Советское Радио, 1978, 168 с.

177. ***Варшавский В.И. и др.*** Однородные структуры.- Москва: Изд-во Энергия, 1973.

178. ***Фрумкин М.А.*** Систолические вычисления.- Москва: Изд-во Наука, 1990.

179. ***Beitrage zur Theorie der Polyautomaten*** / Ed. ***R. Vollmar***, Informatik-Skripten, **2**.- Braunschweig, 1982, 324 p.

180. ***Мальцев А.И.*** Алгоритмы и рекурсивные функции.- Москва: Изд-во Наука, 1986.

181. ***Минский М.*** Вычисления и автоматы.- Москва: Изд-во Мир, 1971, 364 с.

182. ***Матевосян А.А.*** К вопросу об универсальном клеточном вероятностном автомате // Кибернетические системы, ***66***.- Тбилиси, 1980, с. 14-24.

183. ***Адаматский А.*** Идентификация вероятностных клеточных автоматов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, ***3***, 1991, с. 90-95.

184. ***Vollmar R.*** Cellular Spaces and Parallel Algorithms // Parallel Computers – Parallel Mathematics / Ed. ***M. Feilmeier.-*** Oxford: North-Holland Publ. Co., 1977.

185. ***Nishio H.*** A Classified Bibliography on Cellular Automata Theory – With Focus on Recent Japanese References / The ***1st*** Intern. Symp. on ***USAL***, Tokyo, Japan, 1975.

186. ***Smith A.R.*** Introduction to and Survey of Polyautomata Theory //Automata, Languages, Development / Eds. ***A. Lindenmayer, G. Rozenberg.-*** Amsterdam, 1976.

187. ***Toffoli T.*** *Cellular Spaces – An Extensive Bibliography*.- Michigan: University of Michigan, 1976.

188. ***Zuse K.*** On Self-Reproducing Systems // Electron. Rechenanl., ***9***, 1967.

189. ***Адаматский А.*** Идентификация распределенного интеллекта // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, ***5***, 1993, с. 186-196.

190. ***Lieblein E.*** *A Theory of Patterns in Two-dimensional Tessellation Space* / PhD Thesis.- Pennsylvania: University of Pennsylvania, 1968, 218 p.

191. ***Gaiski D., Yamada H.*** A Busy Beaver Problem in Cellular Automata / Proc. of the ***1**s* Intern. Symp. on ***USAL.-*** Tokyo, 1975, pp. 171-184.

192. ***Rado T.*** On Non-computable Functions // Bell Systems Techn. J., ***41***, 1962, pp. 877-884.

193. ***Wegrzyn S., Gille J., Vidal P.*** A Model for Developmental Systems: Generating Word with an Operating System // Automatica, ***25***, no. ***5***, 1989, pp. 695-706.

194. ***Wegrzyn S., Gille J., Vidal P.*** A Model for Developmental Systems: Generating Word with an Operating System // Automatica, ***25***, no. ***6***, 1989, pp. 707-714.

195. ***Blishun A.*** The Generation of the Cellular Chain of Assigned Length // Technical Cybernetics, ***6***, 1975, pp. 95-98.

196. ***Mazoyer J.*** An Overview of the Firing Squard Synchronization Problem / LNCS, ***316.-*** Berlin: Springer-Verlag, 1988, pp. 82-94.

197. ***Барздинь Я.*** Проблема универсальности в теории растущих автоматов / Автореферат канд. дисс.- Москва: Изд-во МГУ, 1965, 16 с.

198. ***Лукашевич И.*** Исследование ритмического поведения однородной ткани / Самообучающиеся автоматические системы.- Москва: Изд-во АН СССР, 1966, с. 124-142.

199. ***Подколзин А.С.*** О сложности моделирования в однородных структурах / Проблемы кибернетики, вып. ***30.-*** Москва: Изд-во Физматлит, 1975, с. 199-225.

200. ***Подколзин А.С.*** О поведениях однородных структурах / Проблемы кибернетики, вып. ***31.-*** Москва: Изд-во Физматлит, 1976, с. 133-166.

201. ***Cellular Automata and Cooperative Phenomena*** / Eds. ***Goles E., Boccara N.-*** Kluwer: Academic Press, 1993, 348 p.

202. ***Parallel and Distributed Algorithms*** / Ed. ***Cosnard M.-*** Elsevier Science, 1989.

203. ***Gerhart M. et al.*** A Cellular Automata Model of Exitable Media // Physica, ***D46***, 1990.

204. ***Hartman H., Tamayo P.*** Reversible cellular automata and chemical turbulence // Physica, ***D45***, 1990, pp. 293-306.

205. ***Adamatzky A.*** Controllable Transmission of Information in Excitable Media / Advanced Materials for Optics and Electronics, ***5***, 1995, pp. 1024-1048.

206. ***Batty M.*** Cities as Fractals: *Simulating Growth and Form* // Fractals and Chaos / Eds. ***A. Crilly et al.-*** Berlin-New York: Springer Verlag, 1991, pp. 43-69.

207. ***Batty M.*** Generating urban forms from diffusive growth // Environment and Planing, ***A***, ***23***, 1991.

208. ***Bura S. et al.*** Multi-Agents Systems and the Dynamics of a Settlement System. Universite Paris ***IV***, Equipe P.A.R.I.S., ***CNRS*** et Universite Paris ***I***, 1994.

209. ***Coucelis H.*** Cellular Worlds: a Framework for Modelling Micro-Macro Dynamics // Environment and Planing, ***A***, ***17***, 1985, pp. 585-596.

210. ***Deadman P. et al.*** Modeling Rural Residental Settlement with Cellular Automaton // Journal of Environmental Management, ***37***, 1993, pp. 147-160.

211. ***Frankhauser P.*** Fractal Properties of Settlement Structures **/** Proc. of the ***1st*** Intern. Seminar of Structural Morphology.- Montpellier-La Grande Motte, September 1992.

212. ***Gutowitz H.*** Frequently Asked Questions About Cellular Automata.- Santa Fe Institute**:** MIT Press ALife, November 1994.

213. ***Itami R.*** Cellular World**:** Models for Dynamic Conception of Landscape **//** Landscape Architecture, July**-**August 1988, pp. 52-57.

214. ***Marcus M., Hess B.*** Isotropic Cellular Automaton for Modelling Excitable Media **//** Nature***, 347,*** September 1990, pp. 56-58.

215. ***Phipps M.*** Dynamical Behavior of Cellular Automata under the Constraint of Neighborhood Coherence **//** Geographical Analysis***, 21 (3),*** 1989, pp. 187-215.

216. ***White R., Engelen G.*** Cellular Automata and Fractal Urban Form**:** A Cellular Modelling Approach to the Evolution of Urban Land Use Patterns **//** Environment and Planing, ***A, 25,*** 1993.

217. ***White R., Engelen G.*** Urban Systems Dynamics and Cellular Automata**:** *Fractal Structures between Order and Chaos* **/** Chaos, Solitons and Fractals, 1993.

218. ***Crutchfield J., Hanson J.*** Turbulent Pattern Bases for Cellular Automata.- Berkeley: Physics Department University of California, 1997, 34 p.

219. ***Guan P.*** Cellular Automaton Public-Key Cryptosystems **//** Complex Systems, ***1,*** 1987.

220. ***Ulam S.*** *A Collection of Mathematical Problems***.-** N.Y.**:** Interscience Publisher, 1960.

221. ***Waksman A.*** A Model of Replication **//** JACM***, 16,*** no. ***1,*** 1969, pp. 122-134.

222. ***Winograd T.*** *A Simple Algorithm for Self-Replication* **/** MIT Project ***MAC, 197,*** 1970.

223. ***Amoroso S., Cooper G.*** Tesselation Structures for Reproduction of Arbitrary Patterns **//** JCSS, no. ***5,*** 1971, pp. 124-144.

224. ***Yaku T.*** The Constructability of a Configurations in a Cellular Automata **//** JCSS, no. ***7,*** 1973.

225. ***Ulam S.*** On Some Mathematical Problems Connected with Patterns of Growth of Figures **//** Essays on Cellular Automata.- Urbana**:** Univ. of Illinois Press, 1970, pp. 219-231.

226. ***Энциклопедия кибернетики.-*** Киев: Изд-во Украинская Советская Энциклопедия, 1975.

227. ***Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л.*** **А**лгебра, языки, программирование.- Киев: Изд-во Наукова Думка, 1978, 220 с.

228. ***Wagner E.G.*** Modular Computers**:** Graph Theory and Interconnection of Modules **/** ***IBM*** Research Report***, RC 1414,*** 1966, 122 p.

229. ***Ferber R.G.-F.*** Raumliche und Zeitliche Regeimassigkeiten Zellularer Automaten.- Marburg**:** Philipps-Universitat Marburg, 1988, 114 p.

230. ***Studies on Polyautomata.-*** Tokyo**:** Research Institute of Electrical Commun., 1975.

231. ***Sears M.*** The Automorphisms of the Shift Dynamical Systems and Relatively Spaces **//** Mathemat. System Theory, no. ***5,*** 1971, pp. 228-231.

232. ***Golze U.*** *Endliche, Rationale und Recursive Zellulare Konfigurationen* **/** *Doctoral Dissertation*, Hannover**:** Technical University of Hannover, 1975, 247 p.

233. ***Dassow J.*** On Finite Properties of Biologically Motivated Languages **//** Rostocker Mathematical Kolloquium***, 4,*** 1977, pp. 69-84.

234. ***ACM Computing Survey:*** Parallel Processors and Processing***, 9,*** 1977.

235. ***Arbib M.*** Simple Self-reproducing Universal Automata **//** Information and Cont., ***9,*** 1966.

236. ***Baker R., Herman G. CELIA –*** A Cellular Linear Iterative Array Simulator **/** Proc. of the ***4th*** Conf. on Applications of Simulation, New York, 1970, pp. 64-73.

237. ***Doman A.*** A Three-Dimensional Cellular Space **//** Acta Cybernetica***, 2,*** 1976.

238. ***New Concepts and Technologies in Parallel Information Processing,*** Leyden, 1975.

239. ***Gardner M.*** On Cellular Automata, Self-Reproduction, the Garden of Eden and the game ***«Life»*** **//** Scientific American, ***224,*** 1971, pp. 112-117.

240. ***Golze U.*** *Bibliographie uber Zellraume* **/** Unveroffentlichtes Manuskript, 1978, 48 p.

241. ***Golze U.*** *Schaltarten fur Parallele Programmschemata und Zellraume* **/** Habilitationsschrift, Technical University of Hannover, 1978, 146 p.

242. ***Laemmel A.*** General Purpose Cellular Computers **/** Computers and Automata, ed. ***J. Fox.*** Brooklyn, 1971, pp. 591-608.

243. ***Legendi T. INTERCELLAS –*** An Interactive Cellular Space Simulation Language **//** Acta Cybernetica***, 3,*** 1977, pp. 261-267.

244. ***Maruoka A., Kimura M.*** Completeness Problem of One-dimensional Binary Scope***-3*** Tessellation Automata **//** JCSS***, 9,*** 1974, pp. 31-47.

245. ***Maruoka A., Kimura M.*** Completeness Problem of Multidimensional Tessellation Automata **//** Information and Control***, 35,*** 1977, pp. 52-86.

246. ***Muller H.*** Selbsreproduktion in Zellularen Netzen **//** Jahrbuch Uberblicke Math., 1978.

247. ***Nakamura K.*** Asynchronous Cellular Automata and Their Computational Ability **//** Systems, Computers and Control***, 5,*** 1974, pp. 58-66.

248. ***Nasu M., Honda M.*** A Completeness Property of One-Dimensional Tessellation Automata **//** JCSS***, 12,*** 1976, pp. 36-48.

249. ***Parkinson D.*** Technical Description of the Distributed Array Processor **/ *ICL*** Document no. ***AP2,*** London, 1976, 184 p.

250. ***Pecht J. SIBICA –*** Ein Interpreter zur Interaktiven Untersuchung Zellularen Automaten **/** Manuskript.- Braunschweig**:** TU Braunschweig, 1976, 86 p.

251. ***L-Systems* /** Eds. ***Rozenberg G. and Salomaa A.-*** Heidelberg-Berlin: Springer, 1974.

252. ***Seiferas J.*** Linear-Time Computation by Nondeterministic Multidimensional Iterative Arrays **// *SIAM*** Journal on Computing***, 6,*** 1977, pp. 487-504.

253. ***Vollmar R.*** On an Interpreter for the Simulation of Cellular Automata **/ *IFAC*** Simp. on Discrete Systems***, 3,*** Riga, 1974, pp. 175-184.

254. ***Wang P., Grosky W.*** The Relation Between Uniformly Structured Tessellation Automata and Parallel Array Grammars **/** Proc. of Intern. Symp. on ***USAL,*** Tokyo, 1975.

255. ***Wargalla L.*** A Very Extensive Bibliography on Cellular Automata and Random Fields **/** Manuskript.- Aachen**:** Aachen University, 1977, 124 p.

256. ***Yamada H., Amoroso S.*** A completeness problem for pattern generation in tessellation automata **//** JCSS***, 4,*** 1970, pp. 137-176.

257. ***Колмогоров А.Н.*** Три подхода к понятию количества информации **//** Проблемы передачи информации, вып. ***1,*** 1965, с. 3-11.

258. ***Щербаков Е.С.*** Обзор книги В.З. Аладьева «К теории однородных структур.- Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1972» **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-матем., ***22, № 1,*** 1973.

259. ***Тиро А., Ревако В.*** Обзор книги В.З. Аладьева «К теории однородных структур.- Таллинн: Изд-во АН ЭССР, 1972» **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-матем., ***22, № 2,*** 1973.

260. ***Машины Тьюринга и рекурсивные функции.-*** Москва: Изд-во Мир, 1972, 264 с.

261. ***Щербаков Е.С.*** О фигурных операциях параллельной подстановки и порождаемых ими унарных алгебрах **/** Вычислительная техника и вопросы кибернетики, вып. ***10,*** Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1974, с. 90-99.

262. ***Butler J., Ntafos S.*** The Vector String Descriptor as a Tool in the Analysis of Cellular Automata Systems **//** Mathemat. Biosciences***, 35,*** 1977, pp. 55-84.

263. ***Book of Abstracts*** **//** The ***6th*** Intern. Conf. on Mathem. Modelling, Sant-Louis, 1987.

264. ***Prusinkiewicz P., Hanan J.*** *Lindenmayer Systems*, *Fractals*, *and Plants*.- Berlin-London-Heidelberg: Springer-Verlag, 1992, 120 p.

265. ***Smith A.R.*** Cellular Automata and Formal Languages **/** Proc. of the ***11th IEEE*** Conf. on Switching and Automata Theory, 1972, pp. 86-92.

266. ***Brauer W.*** *Automaten Theorie*.- Stuttgart: B.G. Teubner, 1984 ***(****in Germany****).***

267. ***Адаматский А.И.*** О сложности идентификации клеточных автоматов **/** Автоматика и телемеханика, ***9,*** 1992, с. 160-171.

268. ***Toffoli T.*** Computational and Construction Universality of Reversible Cellular Automata **/** Tech. Rep. no. ***192.-*** The University of Michigan, 1976 ***(****see also* ***// JCSS, 15, 1977).***

269. ***Adamatzky A., Wuensche A.*** Nonconstructible blocks in ***1D*** cellular automata: *Minimal generators and natural systems* **//** Applied Math. Comp***., 3,*** 1996.

270. ***Amoroso S., Patt Y.*** Decision Procedure for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tessellation Structures **//** JCSS***, 6,*** 1972, pp. 448-464.

271. ***Maruoka A., Kimura M.*** Condition for Injectivity of Global Maps for Tessellation Automata **//** Information and Control***, 32,*** 1976, pp. 158-164.

272. ***Sato T., Honda N.*** Certain Relations between Properties of Maps of Tessellation Automata **//** JCSS***, 15,*** 1977, pp. 121-145.

273. ***Toffoli T., Margolus N.*** Invertible Cellular Automata: A Review **//** Physica ***D45,*** 1990.

274. ***Moore E.*** Machine Models of Self-reproduction **//** Proc. Symp. Appl. Math., ***14,*** 1962.

275. ***Myhill J.*** The Converse of Moore's Garden-of-Eden Theorem **//** Proc. Amer. Math. Soc***., 14,*** no. ***4,*** 1963, pp. 685-686.

276. ***Икауниекс Э.*** Об информационных свойствах клеточных структур **//** Проблемы передачи информации, вып. ***6, № 4,*** 1970, с. 57-64.

277. ***Kari J.*** *Decision Problems Concerning Cellular Automata*.- Turku: University of Turku, 1990.

278. ***Дэвис М.*** Прикладной нестандартный анализ.- Москва: Изд-во Мир, 1980.

279. ***Wuensche A., Lesser M.*** *The Global Dynamics of Cellular Automata*.- N.Y., 1992.

280. ***Voorhees B.H.*** *Computational Analysis of One-Dimensional Cellular Automata*.- Singapore: World Scientific, 1996, 134 p.

281. ***Кудрявцев и др.*** Введение в теорию абстрактных автоматов.- Москва: Изд-во МГУ, 1985.

282. ***Твердохлебов В.*** Логические эксперименты с автоматами.- Саратов: Изд-во СГУ, 1988.

283. ***Takahashi S.*** Limiting behaviour of linear cellular automata **//** Proc. Japan Acad. Sci., ***63, A,*** 1987.

284. ***Shuling Sun.*** Dynamic Analysis of Linear Circlic Cellular Automata **//** Journal of China Univ. Sci. and Technology**,** ***17*****,** no. ***2*****,** 1987, pp. 219-227.

285. ***Demengeot J. et al.*** *Dynamic Systems and Cellular Automata***,** New-York, 1985.

286. ***Martin O. et al.*** *Algebraic Properties of Cellular Automata***.-** Princeton, 1983, 225 p.

287. ***Ibarra O., Jiang T.*** On One-way Cellular Arrays **//** Siam. J. Comp.**,** ***16*****,** no. ***6*****,** 1987.

288. ***Thatcher J.*** *Universality in the von Neumann Cellular Model* **/** Tech. Rep.**,** ***03105-30-T, ORA.-*** Michigan**:** University of Michigan, 1964, 56 p.

289. ***Hedetniemi S.*** Variants of ***Thatcher`s*** Algorithm for Constructing Pulsers **/** Tech. Rep. ***03.05-29-T, ORA.-*** Michigan**:** University of Michigan, 1964, 67 p.

290. ***Lee C.*** Synthesis of a Cellular Universal Machine Using the ***29-***state Model of von Neumann **/** Automata Theory Notes, Michigan**:** University of Michigan, 1964, pp. 84-99.

291. ***Codd E.*** Propagation, Computation and Construction in ***2-***dimensional Cellular Spaces **/** Tech. Rep.**,** ***06921-1-T, ORA.-*** Michigan**:** University of Michigan, 1965, 87 p.

292. ***Amoroso S. et al.*** Theory of Iterative Machine Arrays with Some Applications **/** Tech. Report ***ECOM-3193*****,** Fort MONMOUTH, N.J., 1969, 126 p.

293. ***Amoroso S., Cooper G.*** The Garden-of-Eden Theorem for Finite Configurations **//** Proc. Amer. Math. Soc.**,** ***26*****,** no. ***1*****,** 1970, pp. 342-350.

294. ***Amoroso S., Cooper G.*** Tessellation Structures for Reproduction of Arbitrary Patterns **//** JCSS**,** ***5*****,** 1971, pp. 131-141.

295. ***Holland J.*** Universal Embedding Spaces for Automata **/** Progress in Brain Research, vol. ***17.-*** New-York**:** Elsevier Publishing Comp., 1965, pp. 37-48.

296. ***Atrubin A.*** Iterative One-Dimensional Real-Time Multiplier **/** Term Paper for Applied Math.- Harvard**:** Harvard University, 1962, 28 p.

297. ***Fisher P.*** Generation of Primes by a One-dimensional Real-Time Iterative Arrays **//** JACM**,** ***12*****,** no. ***3*****,** 1965, pp. 48-56.

298. ***Ostrand T.J.*** Pattern Reproduction in Tessellation Automata of Arbitrary Dimension.- Pennsylvania**:** University of Pennsylvania, 1971, 66 p.

299. ***Anderson P.*** Self-Reproducing Cellular Automata**,** RCA Corporation.- New Jersey**:** Cinnaminson, 1971, 34 p.

300. ***Huang J.*** A Universal Cellular Array **//** IEEE Trans. on Computers, ***C-20*****,** no. ***3*****,** 1971.

301. ***Балаховский И.*** О возможности моделирования простейших актов поведения дискретными однородными средами **//** Проблемы кибернетики, вып. ***5*****,** 1962.

302. ***Чадеев В.М.*** Самовоспроизведение автоматов.- Москва: Изд-во Энергия, 1973.

303. ***Maruoka A., Kimura M.*** Decomposition Phenomenon in One-dimensional Scope***-3*** Tessellation Automata with Arbitrary Number of States **//** Information **&** Control, ***34*****,** 1977.

304. ***Kubo T., Kimura M.*** On Completeness Problems of Tessellation Automata **/** Papers of Techn. Group on Automata and Languages, IECE**,** Japan ***AL PRL*****,** 1972, pp. 72-79.

305. ***Richardson D.*** Tessellation with Local Transformations **//** JCSS, ***6*****,** 1972.

306. ***Leitsh A.*** Unsolvability of Nondeterministic Parallel Maps Induced by Nondeterministic Cellular Automata **//** JCSS**,** ***12*****,** 1976, pp. 1-5.

307. ***Bruckner L.*** On the Garden-of-Eden Problem for One-Dimensional Cellular Automata **//** Acta Cybernetica**,** ***4*****,** 1979, pp. 89-97.

308. ***Parallel Processing by Cellular Automata and Arrays.-*** N.J.: North-Holland,1988.

309. ***Buttler J., Ntafos S.*** The vector string descriptor as a tool in the analysis of cellular automata systems **//** Mathematical Biosciences***, 35,*** 1977, pp. 55-84.

310. ***Yaku T.*** Inverse and Injectivity of Parallel Relations induced by Cellular Automata **//** Proc. Amer. Math. Soc.***, 58,*** 1976, pp. 216-220.

311. ***Nasu M.*** Local maps inducing surjective global maps of one-dimensional tessellation automata **//** Mathematical System Theory***, 11,*** 1978, pp. 327-351.

312. ***Amoroso S., Guilfoyle R.*** Some Comments on Neighbourhood Size for Tessellation Automata **//** Information and Control***, 21,*** 1972, pp. 48-55.

313. ***Buttler J.*** A Note on Cellular Automata Simulations **//** Information and Control, **3,** 1974.

314. ***Burks A.W.*** On Backwards-Deterministic, Erasable and Garden-of-Eden Automata **/** Tech. Rept. no. ***012520-4-T.-*** Michigan**:** University of Michigan, 1971, 45 p.

315. ***Maruoka A. et al.*** Pattern Decomposition for Tessellation Automata **//** JCSS***, 13,*** 1976.

316. ***Amoroso S., Epstein J.*** Indecomposable Parallel Maps in Tessellation Structures **//** JCSS***, 13,*** 1976.

317. ***Yaku T.*** Surjectivity of Nondeterministic Parallel Maps Induced by Nondeterministic Cellular Automata **//** JCSS***, 12,*** 1976, pp. 1-5.

318. ***Toffoli T.*** Cellular Automata Mechanics **/** Tech. Rep. no. ***208.-*** Univ. of Michigan, 1977.

319. ***Nishio H., Kobuchi Y.*** Fault Tolerant Cellular Spaces **//** JCSS, ***11,*** 1975.

320. ***Баринов В.В. и др.*** К проблеме Улама-Аладьева, в сборнике [***12***], с. 341-346.

321. ***Morita K. et al.*** A ***1-***tape ***2-***symbol reversible Turing machine **//** Trans. of IEICE***, E72,*** no***. 3,*** 1989.

322. ***Morita K. et al.*** Computation Universality of One-Dimensional Reversible Cellular Automata **//** Trans. of the IEICE***, E72,*** no***. 6,*** 1989, pp. 758-762.

323. ***Яблонский С.*** Функциональные построения в ***K-***значной логике **//** Труды математического ин-та АН СССР.- Москва: Изд-во АН СССР, 1958, с. 5-142.

324. ***Боднарчук В., Цейтлин Г.*** Об алгебрах периодически определенных преобразований бесконечного регистра **//** Кибернетика, ***1,*** Киев: Изд-во Наукова Думка, 1969, с. 38-44.

325. ***Tseitlin G.E.*** Formalization of Synchronous Parallel Processing by Heterogeneous Periodically Defined Transformations **//** Trans. Institute of Cybernetics, Kiev, 1982.

326. ***Жегалкин И.И.*** Арифметизация символической логики **//** Матем. сб. Московского математического общества, ***36,*** вып. ***3 – 4,*** 1929.

327. ***Мальцев А.И.*** Итеративные алгебры Поста.- Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.

328. ***Виноградов И.М.*** Основы теории чисел.- Москва: Изд-во Наука, 1981, 214 с.

329. ***Adamatzky A.*** Simulation of Inflorescence Growth in Cellular Automata **//** Chaos, Solitons and Fractals***, 7,*** no***. 7,*** pp. 1065-1094.

330. ***Apter M.*** A formal model of biological development **//** Изв. АН ЭССР. Физ.-мат., ***22, № 3,*** 1973.

331. ***Towards a Theoretical Biology*** **/** Ed. ***C. Waddington, 1-4.-*** Edinburgh: Univ. Press, 1970.

332. ***Baianu I.*** Computer Models and Automata Theory in Biology and Medicine **//** Mathematical Modelling, no***. 7,*** 1986, pp. 1513-1577.

333. ***Biomathematics:*** *Extended Survey of the Books and Reports****.-*** Berlin: Springer, 1989.

334. ***Hopenstead F., Peskin C.*** *Mathematics in Medicine and Life Sciences****.-*** Berlin: Springer, 1994.

335. ***Peitgen H. et al.*** *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science***.-** N.Y.: Springer, 1992.

336. ***Rozenberg G.*** Bibliography of ***L-***Systems **//** Theor. and Comput. Sci.***, 1,*** no. ***5,*** 1977.

337. ***Lindenmayer A., Culik K.*** Growing Cellular Systems **//** Intern. J. Gen. Sys., 1981.

338. ***Lindenmayer A.*** Developmental algorithms for multicellular organisms**:** *A survey of* ***L-****systems* **//** Journal of Theoret. Biology***, 54,*** 1975, pp. 3-22.

339. ***Laing R.*** Automation Introspection **//** JCSS***, 13,*** 1976, pp. 206-218.

340. ***Laing R.*** Artificial Molecular Machines **/** The ***1st*** Intern. Symp. on ***USAL,*** Tokyo, 1975.

341. ***Laing R.*** Formalisms for Living Systems **/** Techn. Rept. ***N-08226-8-T,*** Michigan, 1969.

342. ***Herman G.*** On Universal Computer-Constructors **//** Inf. Proc. Letters, **2,** 1973, pp. 73-76.

343. ***Wigner E.P.*** The Probability of the Existence of a Self-Reproducing Units **/** The Logic of Personal Knowledge.- London, 1961, pp. 124-139.

344. ***Richardson D.*** Continuous Self-Reproduction **//** JCSS, ***12*****,** no. ***1*****,** 1976.

345. ***Аптер М.*** Кибернетика и развитие.- Москва: Изд-во Мир, 1970, 214 с.

346. ***Luck H., Luck J.*** Automata Theoretical Explanation of Tissue Growth **/** Proc. Intern. Symp. on Mathematical Topics in Biology, Japan, Kyoto, 1978, pp. 174-185.

347. ***Rose S.*** Cellular Interaction during Differentiation **//** Biol. Rev.***, 32,*** 1958, pp. 351-382.

348. ***Wolpert L.*** Cell Position and Cell Lineage in Pattern Formation and Regulation **//** Stem Cells and Tissue Homeostasis, Cambridge University Press, 1978, pp. 29-47.

349. ***Waddington C.*** *New Patterns in Genetics and Development***.-** Columbia Press, 1962.

350. ***Le Hoi.*** On Machines as Living Things **//** Acta Cybernetica***, 111/4,*** 1978, pp. 281-285.

351. ***Tsanev R., Sendov B.*** Possible Molecular Mechanisms for Cell Differentiation in Multicellular Organisms **//** Journal of Theoretical Biology***, 30,*** 1971, pp. 337-393.

352. ***SuperComputing EUROPE*** **/** European Exhibitions and Conf. on Supercomputing.- London: London University Computer Centre, 2000.

353. ***Euro-Par'96 – Parallel Processing*** **/** Ed. ***L. Bouge.-*** Lyon: Springer-Verlag, 1996.

354. ***Neural Computers*** **/** Ed. ***R. Eckmiller.-*** Heidelberg: Springer-Verlag, 1988, 280 p.

355. ***Organizational Change, Evolution, Structuring and Awareness*** **//** Esprit Project Report **/** Ed. ***N. Guimaraes.-*** Lisboa: Springer-Verlag, 1997, 285 p.

356. ***Vector and Parallel Processing*** **/** Proc. of the ***3rd*** Intern. Conf.- Porto, 1998.

357. ***Applied Parallel Computing*** **/** Ed. ***K. Madsen.-*** Berlin: Springer-Verlag, 1996, 722 p.

358. ***Grandall R.*** *Projects in Scientific Computations*.- N.Y.-Berlin: Springer, 1994, 546 p.

359. ***Esprit 95/96:*** Research Reports ***Esprit.-*** The Netherlands: Springer-Verlag, 1996.

360. ***The Second Conference on Cellular Automata for Research and Industry*** **/** Ed. ***S. Bandini.-*** Milan: Springer-Verlag, 1997, 197 p.

361. ***Computer Architecture-97*** **/** Ed. ***R. Pose.-*** Clayton: Springer-Verlag, 1997, 300 p.

362. ***The International Conference on High-Performance Computing and Networking.-*** Brussels: Palais des Congress, 1996, 356 p.

363. ***High-Performance Computing and Networking*** **/** Ed. ***P. Slot.-*** Amsterdam, 1997.

364. ***Journal of Artificial Life and Robotics.-*** Tokyo: Springer-Verlag.

365. ***Hramkovic J.*** *Communication Complexity and Parallel Computing*.- Kiel: Verlag, 1997.

366. ***Sipper M.*** *Evolution of Parallel Cellular Machines*.- Lausanne: Springer, 1997, 199 p.

367. ***Applied Parallel Computing Industrial Computation and Optimization*** / Ed. ***K. Madsen.***- Lyngby: Springer-Verlag, 1996, 722 p.

368. ***Current Contents:*** Engineering, Computing & Technology.- Philadelphia: ***ISI***, 1996.

369. ***Jan van Leeuwen.*** *Computer Science Today*.- Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.

370. ***Gruska J.*** Synthesis, structure and power of systolic computations // J. Theor. Comp. Sci., ***71***, 1990.

371. ***Computer Science:*** Books-Journals-Electronic Media.- Berlin: Springer-Verlag.

372. ***Shields M.*** *The Semantics of Parallelism*.- London: Springer-Verlag, 1997, 500 p.

373. ***Trends in Parallel and Supercomputing.***- Amsterdam: North-Holland, 1988.

374. ***Computational Systems:*** Natural and Artificial / Ed. ***H. Haken.***- N.Y.: Springer, 1987.

375. ***Glushkov V., Letichevskii A.*** A Theory of Algorithms and Discrete Processors // Advanced in Information Systems Science, vol. ***1***, New-York, 1969, pp. 123-139.

376. ***Toffoli T. CAM:*** A High-Performance Cellular-Automaton Machine // Physica ***10D***, 1984.

377. ***Computer Design***, ***27***, no. ***20***, 1988 (*см. также все последующие выпуски*).

378. ***Toffoli T.*** Cellular Automata as an Alternative to (*rather than an approximation of*) Differential Equations in Modelling Physics // Physica ***10D***, 1984, pp. 117-127.

379. ***Hardy J. et al.*** Molecular Dynamics of a Classical Lattice-Gas // Phys. Rev. ***A13***, 1976.

380. ***Касами Т.*** Теория кодирования.- Москва: Изд-во Мир, 1978, 620 с.

381. ***Каляев А.*** Построение однородных управляющих структур адаптивных автономных роботов // Микропроцессорные средства и системы, ***4***, 1985, с. 68-78.

382. ***Arbib M., Amari S.*** *Dynamic Interaction in Neural Networks*.- N.Y.: Springer, 1988.

383. ***Proceedings*** of the ***7***th Intern. Conf. on Math. and Comp. Modelling, Chicago, 1989.

384. ***Aiello G. et al.*** A Parallel Processor for Simulation of ***Ising*** Spin Systems // Computer Physics Communications, ***56***, 1989, pp. 141-146.

385. ***Tobler W.*** Cellular Geography // Philosophy in Geography.- Dodrecht: D Reidel, 1979.

386. ***Vichniac G.*** Simulating Physics with Cellular Automata // Physica ***10D***, 1984, pp. 96-115.

387. ***Creutz M.*** Deterministic Izing Dynamics // Annals of Physics, ***167***, 1986, pp. 62-76.

388. ***Margolus N.*** Physics-Like Models of Computation // Physica ***10D***, 1984, p. 81-95.

389. ***Гинзбург С.*** Математическая теория контекстно-свободных языков.- М.: Мир, 1970.

390. ***Гросс М., Лантен А.*** Теория формальных грамматик.- Москва: Изд-во Мир, 1971.

391. ***Packard N., Wolfram S.*** Two-Dimensional Cellular Automata // J. Stat. Phys., ***38***, 1989.

392. ***Hayes B.*** Cellular Automaton Offers a Model of World // Sci. Amer., ***250***, no. ***3***, 1984.

393. ***Pomeau Y.*** Invariant in Cellular Automata // Journal of Physics, ***3***, 1983, pp. 478-489.

394. ***Tucker J. CAM:*** The Ultimata Parallel Computer // High Technology, ***4***, ***(6)***, 1984.

395. ***Kobuchi Y.*** A Note on Symmetrical Cellular Spaces // Inf. Proc. Letters, ***23***, 1987.

396. ***Nasu M.*** Maps of ***1***-Dimensional Tesselation Automata and Homomorphisms of Graphs / The ***5***th IBM Symp. on Math. Foundat. of Comp. Sciences, IBM Japan, 1980.

397. ***Barca D. et al.*** Cellular automata for simulation lava flows: A method and examples of the *Ethean* eruptions **//** Transp. Theory and Stat. Phys., ***23 (1-3),*** pp. 195-232, 1994.

398. ***Ishihara K. et al.*** Numerical simulation of lava flows some volcanoes in Japan **/** Proc. in Volcanology. Vol. **2,** ed. by ***J. Fink.-*** Tokyo: Springer-Verlag, 1989.

399. ***Avolio M., Gregorio S.*** A cellular «Blocks» model for large surface flows and applications to lava flows ***// ACRI-2004,*** LNCS ***3305***.- Berlin: Springer-Verlag, 2004, pp. 415-434.

400. ***Coppola L. et al.*** Simulation of restricted self-diffusion **//** Molecular Simulation, vol. ***7,*** Gordon and Breach Science Publishers S.A., 1991, pp. 241-247.

401. ***Gregorio S. et al.*** Mount ontake landslide simulation by the cellular automata model ***SCIDDICA-3*** **//** Phys. Chem. Earch ***(A),*** vol. ***24,*** no. ***2,*** 1999, pp. 131-137.

402. ***Gregorio S. et al.*** Applying cellular automata to complex environmental problems: *The simulation of the bioremediation of contaminated soils* **//** Theoretical Computer Science, ***217,*** 1999, pp. 131-156.

403. ***Systolic Parallel Processing // APC*** Volume **5,** 1993, 712 p.

404. ***Peitgen H. et al.*** *Fractals in the Fundamental and Applied Sciences***.-** Berlin: Springer-Verlag, 1991.

405. ***Pickover C.A.*** *Chaos and Fractals***.-** Berlin: Springer-Verlag, 1998, 468 p.

406. ***Цейтлин Г.Е.*** Некоторые вопросы теории многомерных периодически определенных преобразований на однородных структурах **/** Труды ***4-***й Всес. конф. по однородным вычислительным системам и средам.- Киев: Изд-во Наукова Думка, 1975, 229-231.

407. ***Wolfram S.*** *A New Kind of Science***.-** N.Y.: Wolfram Media, 2002, ISBN 1-57955-008-8.

408. ***Астафьев Г.Б. и др.*** Клеточные автоматы.- Саратов: Изд-во «Колледж»**,** 2003, 23 с.

409. ***Rennard J.-P.*** Implementation of logical functions in the game *«**Life**»* **//** Collision Based Computing **/** Ed. by ***A. Adamatzky,*** Springer, 2002, pp. 419-512.

410. ***Cannataro M. et al.*** A parallel cellular automata environment on multicomputers for computational science **//** Parallel Computing, ***21*** (1995), pp. 803-823.

411. ***S. Di Gregorio et al.*** High performance scientific computing by a parallel cellular environment **//** Future Generation Computer Systems, ***12*** (1997), pp. 357-369.

412. ***Britti V. et al.*** A cellular model for soil erosion by rainfall ***// ISCS-99,*** Roma, 1999.

413. ***S. Di Gregorio et al.*** A microscopic freeway traffic simulator on a highly parallel system **//** Parallel Computing: State-of-the Art and Perspectives.- Amsterdam: Elsevier, 1996.

414. ***S. Di Gregorio et al. SCIDDICA-3:*** A cellular automata model for landslide simulation **/** Advances in Intelligent Systems. Ed by ***F.C. Morabito***, IOS Press, 1997, pp. 324-330.

415. ***Bellman R. et al.*** Mathematics in medicine**:** Tumor detection, radiation dosimetry, and simulation in psychotherapy, *in the collection* [**2**], pp. 282-314.

416. ***Akishin P.G. et al.*** Simulation of earthquakes with cellular automata **//** Discrete Dynamics in Nature and Society, vol. **2,** no. ***4,*** 1999.

417. ***Королев Л.Н.*** О задачах системного программирования в нечисловой обработке **/** Современные проблемы прикладной математики и матфизики.- Москва: Наука, 1988.

418. ***Wolf-Gladrow D.A.*** Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models.- Berlin**:** Springer-Verlag, 2000, 308 p.

419. ***Rocha L.M.*** Evolutionary Systems and Artificial Life.- Los Alamos: Los Alamos National Laboratory, Lecture Notes**,** ***NM 87545,*** 1997.

420. ***Preston K.*** Cellular Automata **/** Encyclopedia of Physical Science and Technology, vol**. *1,*** Academic Press, 1987, pp. 17-34.

421. ***Demongeol J., Tchuente M.*** Cellular Automata and Dynamic Systems **//** Encyclopedia of Physical Science and Technology, vol**. *1,*** Academic Press, 1987, pp. 35-44.

422. ***Ванаг В.*** Исследование пространственно распределенных динамических систем методами вероятностного клеточного автомата **//** УФН, т. ***169, № 5*** (1999), с. 481-505.

423. ***Zuse K.*** Rechnender Raum, Elektronische Datenverarbeitung, vol. ***8,*** p.p. 336-344, 1967.

424. ***Parallel Algorithms and Applications*** **/** Ed. ***G. Megson,*** University of Reading, U.K., 1999.

425. ***Green D.G.*** *Cellular Automata* **/** Preprint.- Australia: Charles Sturt University, 1993.

426. ***Lilly H.A.*** The use of cellular automata in the classroom **/** Proc. of the ***ACM/IEEE*** Conf. on Supercomputing, San Diego, California, 1995.

427. ***http://citeseer.ist.psu.edu/93693.html***

428. ***Spezzano G., Talia D. CARPET:*** A programming language for parallel cellular processing **/** Proc. European School on Parallel Programming Environments, ***96,*** France, 1996.

429. ***Rendell P.*** A Turing Machine in Conway's Game Life**.-** *Полное изложение работы находится на сайте* ***http://www.cs.ualberta.ca/~bulitko/F02/papers/tm_words.pdf.***

430. ***Toffoli T., Margolus M.*** The ***CAM-7*** Multiprocessor**:** *A Cellular Automata Machine* **/** Tech. Memo ***LCS-TM-289,*** MIT Lab. for Comp. Sci., 1985.

431. ***Schrandt R., Ulam S.*** On Patterns of Growth of Figures in Two Dimensions **//** Notices of the American Mathematical Society, ***7,*** p. 642, 1960.

432. ***Holladay J., Ulam S.*** On Some Combinatorial Problems in Pattern of Growth **//** Notices of the American Mathematical Society, ***7,*** p. 234, 1960.

433. ***Schrandt R., Ulam S.*** On recursively defined geometrical objects and patterns of growth **(***in the collection* [***128***], pp. 232-243).

434. ***Ulam S.*** On some mathematical problems connected with pattern of growth of figures **/** Proc. of Symp. in Applied Mathematics, ***14,*** pp. 215-224, 1962 **(***also in the collection* [***128***], p. 219**).**

435. ***Renz W. et al.*** Interactive visualization of three-dimensional cellular automata **//** Computers in Physics, ***8,*** no. ***5,*** September 1994, p. 550.

436. ***Eckart D.*** Cellular automata simulation system, ver. **2 /** SIGPLAN notices, ***27***(*8*)**:*99,*** 1992.

437. ***StarLogo.*** Logo Computer Systems Inc., N. Y., 1999

438. ***Seutter F. CEPROL:*** A cellular programming language **//** Parallel Comp., ***2,*** 1985.

439. ***Hasselbring W. CELIP:*** A cellular language for imaging processing **//** Parallel Comp., ***14,*** 1990.

440. ***Mou Z. CAL:*** A cellular automata language **//** Proc. of the ***27th*** Conf. on Parallel Processing for Scientific Computing, SIAM Press, 1995, pp. 722-727.

441. ***Мазуренко В.И., Основина Л.В.*** Основные результаты научной активности ***ТТГ*** по параллельной обработке и параллельным алгоритмам ***(1979-1982),*** *в книге* [***12***], с. 347-357.

442. ***Parallel Processing and Parallel Algorithms – Survey*** **/** Ed. ***V. Z. Aladjev.-*** Tallinn: Estonian Branch of the ***VGPTI,*** 1983, 255 p.

443. ***Encyclopaedia of Mathematics,*** vol. ***1.-*** London: Kluwer Academic, 1988, pp. 300-301.

444. ***Bays C.*** A new game of three-dimensional Life **//** Complex Systems, ***5, 1,*** 1991, pp. 15-18.

445. ***Baranoff S.*** Cellular automata on personal computer **/** Proc.of ***EuroForth-92*** Conf., Southampton, UK, October 1992, pp. 79-80.

446. ***Luciano R. da Silva L. and et al.*** Simulations of mixtures of two Boolean cellular automata rules ***//*** Complex Systems, **2,** 1988, pp. 29-37.

447. ***Ladd S. C++*** Simulations and Cellular Automata.- Book and Disk., M and T Books, 1995.

448. ***Wojtowicz M. 1D*** and ***2D*** cellular automata explorer***, http://psoup.math.wisc.edu/mcell/.***

449. ***Rucker R., Walker J. CelLab.- http://www.fourmilab.ch/cellab/.***

450. ***Maydwell G.*** The super animation-reduction cellular automata simulator ***(SARCASim).- http://www.collidoscope.com/ca/***

451. ***Francis E.*** Cellular automata simulation engine**.-** ***www.alcyone.com/software/cage/.***

452. ***Hiebeler D.*** A brief eview of ***CA*** packages **//** Physica ***D45*,** p. 463, 1990.

453. ***Myczkowski J.*** Parallel programming for cellular automata **//** Cellular Automata and Modeling of Compl. Phys. Syst. **/** Eds. ***P. Manneville et al.-*** Berlin: Springer-Verlag, 1989.

454. ***Hansen P.*** Parallel cellular automata**:** *A model program for computational science* **//** Concurency**:** Practice and Experience, ***5*,** no. ***5*,** 1993, pp. 425-448.

455. ***Wuensche A.*** *Attractor Basins of Discrete Networks* **/** Cognitive Science Research Paper, ***461*,** PhD Thesis.- Sussex: University of Sussex, 1997.

456. ***Wuensche A.*** Classifying of cellular automata automatically **/** Tech. Rep. ***98-02-018*,** Santa Fe, 1998.

457. ***Wegner T., Tyler B.*** *Fractal Creations*. Second edition**.-** Waite Group Press, 1993 **(***see also* ***http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html)***

458. ***Rudolf L.*** *Computer modeling and computational paradigm* **/** Fundamentals in Complex Systems.- Boston: New England Complex Systems Institute, October 1999.

459. ***Stiles P., Glickstein I.*** Highly parallelizable route planner based on cellular automata algorithms ***// IBM*** Journal of Research and Development, ***38*,** no. **2,** p. 167, March 1994.

460. ***The NAG Parallel Library*** **/** Technical Report**.-** Oxford: NAG Ltd., 1999.

461. ***Algorithms for Parallel Processing*** **/** Eds. ***M. Heath et al.-*** Berlin: Verlag, 1999, 366 p.

462. ***Roosta S.*** *Parallel Processing and Parallel Algorithms***.-** Heidelberg: Verlag, 1999, 550 p.

463. ***The International Workshop on Parallel Processing by Cellular Automata*** **/** Central Institute of cybernetics and informationprocesses of Academy of Sciences of GDR, Berlin, 1982.

464. ***Proceedings of the 2nd Internation. Workshop on Parallel Processing by CA and Arrays (PARCELLA-84)*** **/** Eds. ***G. Wolf et al.-*** Berlin: Akademie-Verlag, 1984.

465. ***Proceedings of the 3rd International. Workshop on PARCELLA-86*** **/** Eds. ***G. Wolf et al.-*** Amsterdam: North-Holland, September 9-11, 1986.

466. ***Proceedings of the 4th International. Workshop on PARCELLA-88*** **/** Eds. ***G. Wolf et al.,*** LNCS ***342.-*** Amsterdam: North-Holland, 1988.

467. ***Proceedings of the 5th International Workshop on PARCELLA-90*** **/** Eds. ***G. Wolf et al.-*** Berlin: Akademie-Verlag, September 17-21, 1990.

468. ***Hemmerling A.*** On the power of cellular parallelism, *in the Proceedings* [***465***].

469. ***Spirakis P.*** Fast parallel algorithms and the complexity of parallelism, *in the Proceedings* [***466***].

470. ***Parallel Problem Solving from Nature*** **/** Eds. ***Manner R., Manderick B.-*** Brussels, 1992.

471. ***High Performance Computing in Science and Engineering*** **/** Eds. ***E. Krause, W. Jäger.-*** Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1999, 500 p.

472. ***High-Performance Computing and Networking*** **/** Proc. of the ***7th*** Intern. Conf. ***HPCN*** Europe **/** Eds. ***R. Sloot et al.-*** Amsterdam: Springer-Verlag, 1999, 1318 p.

473. ***High Performance Computing*** **/** Proc. of the ***2nd*** Intern. Symp.- Kyoto, 1999, 408 p.

474. ***Handbook on Parallel and Distributed Processing*** **/** Eds. ***J. Blazewicz et al.-*** Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1999, 635 p.

475. ***Lucquin B., Pironneau O.*** *Introdiction to Scientific Computing***.-** London: John Wiley, 1998.

476. ***Parallel Computations*** **/** Eds. ***R. Zinterhof et al, 4th*** Intern. ***ACPC*** Conf.- Salzburg, 1999.

477. ***Computer Science*** **/** Newsletter.- Berlin-New York: Springer-Verlag, 1985-2007.

478. ***Jorrand Ph.*** Term Rewriting as a Basis for the Design of a Functional and Parallel Programming Language **/** Lect. Notes Comp. Sci., ***232*** (1986).

479. ***Parallel Symbolic Languages and Systems*** **/** Ed. ***T. Ito.-*** Paris: Springer, 1996.

480. ***The 2nd Intern. Conf. on Massivelly Parallel Computing Systems***, Ischia, 1996.

481. ***Milne G. et al.*** Realising massively concurrent systems on the ***SPACE*** machine **/** Proc. of ***IEEE*** Workshop on ***FPGAs*** for Custom Comp. Machines, pp. 26-32, Napa, CA, 1993.

482. ***Genetic Programming*** **/** Eds. ***R. Poli et al.,*** Proc. of the ***2nd*** European Workshop.- Berlin: Springer-Verlag, 1999, 283 p.

483. ***Miller M. et al.*** Representing and computing regular languages on massively parallel networks **//** IEEE Transactions on Neural Networks, ***2(1):*** 56-72, 1991.

484. ***Wuensche A. DDLab*** manual: Cellular Automata **–** *Random Boolean Networks***.-** Discrete Dynamics Lab., Santa Fe Institute, 1996, 60 p.

485. ***Hillis W.*** The connection machine: *A computer architecture based on cellular automata* **//** Physica, ***10D,*** 1984, pp.213-228.

486. ***Allinson N., Sales M. CART –*** A cellular automata research tool **//** Microprocessors and microsystems, ***16*(*8*): *4093*,** 1992.

487. ***Boghosian B.*** Cellular automata simulation of two-phase flow on the ***CM-2*** connection machine computer **//** Supercomputing**,** vol. ***II:*** Science and Applications, 1989, pp. 34-44.

488. ***Bouazza K. et al.*** Experimental cellular automata on the ***ArMen*** machine **/** Proc. of the Workshop on Algorithms and Parallel VLSI Architectures ***II,*** France, 1991, pp. 317-322.

489. ***Carrera J. et al.*** Architecture of a ***FPGA-***based coprocessor: The ***PAR-1*** **/** Proc. of IEEE Workshop on ***FPGAs*** for Custom Computing Machines, Napa, April 1995, pp. 20-29.

490. ***Chowdhury D. et al.*** Cellular automata based synthesis of easily and fully testable ***FSMs*** **/** Proc. of the ***IEEE/ACM*** Intern. Conf. on Computer-Aided Design, November 1993.

491. ***Drayer T. et al. MORRPH:*** A Modular and reprogrammble real-time processing hardware **/** Proc. of ***IEEE*** Workshop on ***FPGAs*** for Custom Comp. Machines, Napa, 1995.

492. ***Eckart J.*** A parallel extendible scalable cellular automata machine: ***PE-SCAM*** **/** Proc. of the Conf. on Computer Science, ACM Press, March 1992, pp. 467-472.

493. ***Cellular Automata*** **/** Eds. ***Farmer J. et al.-*** Amsterdam: North-Holland, 1984.

494. ***Marriott A. et al. VLSI*** implementation of smart imaging system using two-dimensional cellular automata **//** ***IEEE*** Proc., **G,** Circuits, Devices and Syst., ***138*(*5*)*:582*,** October 1991.

495. ***Pries W. et al.*** Group properties of cellular automata and ***VLSI*** applications **/** ***T-COMP, 35,*** 1986.

496. ***http://liinwww.ira.uka.de/bibliography/Parallel/cellular.automata.html.***

497. ***Hunt U.J.,*** Some Methods of Calculation of Carrying Capacity of the Railways of Baltic Region **/** Proc. Intern. Conf. ***TRANSBALTICA-99,*** April 1999, Vilnius, pp. 392-398.

498. ***Dupuis A., Chopard B.*** Parallel simulation of traffic in Geneva using cellular automata **//** Parallel and Distributed Computing Practices Journal, ***3,*** 1999.

499. ***Chowdhury D., Schadschneider A.*** Self-organization of traffic jams in cities**:** *Effects of stochastic dynamics and signal periods* **//** Physical Review ***E,*** vol. ***59,*** 1999.

500. ***Traffic and Mobility: Simulation-Economics-Environment*** **/** Eds. ***W. Brilon et al.-*** Berlin-Heldelberg: Springer-Verlag, 1999, 450 p.

501. ***Environment and planning, A, 22*** (1990), ***23*** (1991), pp. 511-544, ***25*** (1993), p. 75.

502. ***Green D. et al.*** A generic approach to landscape modelling **//** Mathematics and Computers in Simulation, ***32,*** 1990.

503. ***Kirley M. et al.*** Investigation of a cellular genetic algorithm that mimics evolution in a landscape **/** Proc. of the ***2nd*** Conf. on simulated evolution and learning **/** Eds. ***Xin Yaoet al.-*** Canberra, 1998.

504. ***Parisi D.*** A Cellular Automata Model of the Expansion of the Assyrian Empire, *in the book* [***360***].

505. ***Hogeweg P.*** Cellular automata as a paradigm for ecological modeling **//** Applied Mathematics and Computation, ***27,*** 1988, pp. 81-100.

506. ***Silvertown J. et al.*** Cellular automaton models of interspecific competition for space **–** *The effect of pattern on process* **//** Journal of Ecology, ***80,*** 1992, pp. 527-534.

507. ***Colasanti R., Grime J.*** Resource dynamics and vegetation processes: a deterministic model using two-dimensional cellular automata **//** Functional Ecology, ***7, 2,*** 1993, p. 169.

508. ***Green D. et al.*** Simulating spatial patterns in forest ecosystems **//** Mathematics and Computers in Simulation, ***27,*** 1985, pp. 191-198.

509. ***Green D.*** Cellular automata models of crown-of-thorns outbreaks **//** Acanthaster and the Coral Reef **/** Lecture Notes in Biomathematics, ***88.-*** Berlin: Springer-Verlag, 1990.

510. ***Huberman B., Glance N.*** Evolutionary games and computer simulations **//** Proc. of the National Academy of Sciences, USA, ***90,*** 1993, pp. 7716-7718.

511. ***Nowak M., May R.*** Evolutionary games and spatial chaos **//** Nature, ***359,*** 1992.

512. ***Satoh K.*** Computer experiment on the complex behavior of a two-dimensional cellular automaton as a phenomenological model for an ecosystem ***// JPSJ, 58,*** no. ***10,*** 1989.

513. ***Satoh K.*** Single and multiarmed spiral patterns in a cellular automata model for an ecosystem **//** Journal of the Physical Society of Japan ***(JPSJ), 59,*** no. ***12,*** 1990, pp. 4204-4207.

514. ***Bradbury R. et al.*** The idea of complexity in ecology **//** Senckenbergiana maritima ***27, (3/6),*** 1996.

515. ***Bhargava S. et al.*** A stochastic cellular automata model of innovation diffusion **/** Technological forecasting and social change, ***44,*** no. ***1,*** August 1993, p. 87.

516. ***Jebelean T.*** Long Integer Multiplication by Cellular Automata**:** *An Annotated Bibliography* **/** Techn. Rep., ***RISC-Linz,*** Johannes Kepler University, Linz, Austria, 1993.

517. ***Miya E.*** Multiprocessor **–** Distributed Processing Bibliography **/** Proc. of the Entity-Relationship Conference, North-Holland, Karlsruhe, October 1992.

518. ***Bayrak C. et al.*** The annotated bibliography on cellular automata **/** Tech. Rep.***, 90-CSE-30,*** Southern Methodist University, 1990.

519. ***Gutowitz H.*** Maps of recent ***CA*** and lattice gas automata literature **//** Physica ***D45*,** 1990.

520. ***Dehne P., Sack J.-R.*** A Survey of Parallel Computational Geometry Algorithms **/** Proc. of the ***4th*** Int. Workshop on Parallel Processing by Cellular Automata and Arrays, 1988.

521. ***Cimagalli V., Balsi M.*** Cellular Neural Networks: *A Review* **/** Proc. of the ***6th*** Italian Workshop on Parallel Architectures and Neural Networks, Vietri sul Mare, Italia, May 1993.

522. ***Maruoka A., Kimura M.*** Injectivity and surjectivity of parallel maps for cellular automata **//** JCSS, ***18*,** 1979, pp. 47-64.

523. ***Langton C.*** Studying artificial Life with cellular automata **//** Physica ***D22*,** 1986.

524. ***Langton C.*** *Artificial Life***.-** Redwood City: Addison-Wesley, 1989.

525. ***Langton C. et al.*** *Artificial Life II***.-** Addison-Wesley, Reading, MA, 1990.

526. ***Thalmann D.*** A Lifegame Approach to Surface Modelling and Rendering **//** The Visual Computer, ***2*,** no. ***6*,** 1986, pp. 384-390.

527. ***Sutner K.*** The sigma-game and cellular automata **//** American Math. Monthly, ***97*,** 1990.

528. ***Alstrom P, Leao J.*** Self-organized criticality in the game of life **//** Phys. Rev. ***E49*, *4*,** 1994.

529. ***Bays C.*** A new candidate rule for the game of three-dimensional life **//** Complex Systems, ***6*,** 1992.

530. ***Garcia J. et al.*** Nonlinear dynamics of cellular-automaton game of life **//** Phys. Rev. ***E48*, *5*,** 1993.

531. ***Sipper M.*** Studying artificial life using a simple, general cellular model **//** Art. Life J., ***2*,** no. ***1*,** 1995.

532. ***Poupet V.*** Simulating ***3D*** Cellular Automata with ***2D*** Cellular Automata **/ *MFCS 2004*,** eds. ***J. Fiala et al.*,** LNCS ***3153*.-** Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, pp. 439–450.

533. ***Rroka Z.*** Simulations between cellular automata on Cayley graphs **//** Theor. Comp. Sci., ***225*,** 1999.

534. ***Martin B.*** A geometrical hierarchy on graphs via cellular automata **//** Fundamenta Informaticae, ***52*,** 2002, pp. 157–181.

535. ***Мартыненко Б.*** Языки и трансляция.- С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2004.

536. ***http://www.geocities.com/ca_hs_ref*, http://www.cellular-automata.narod.ru**

537. ***Miranda E. R.*** *Composing Music with Computers***.-** Oxford: Focal Press, 2001.

538. ***Miranda E.*** Granular synthesis of sounds by means of cellular automata **//** Leonardo, ***28(4)*,** 1995.

539. ***Dewdney A.*** A cellular universe of debris, droplets, defects and demons **//** Sci. Amer., August 1989.

540. ***Porter R., Bergmann N.*** Evolving ***FPGA*** based cellular automata **//** LNCS ***1585*.-** Berlin: Springer-Verlag, 1999.

541. ***Cattaneo G., Margara L.*** Topological denitions of chaos applied to cellular automata dynamic **//** LNCS ***1450*.-** Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

542. ***Ilachinski A.*** *Cellular Automata: A Discrete Universe***.-** Singapore: World Sci. Pub., 2001.

543. ***Gunji Y.*** The algebraic properties of finite cellular automata **//** Physica ***D41*, *2*,** 1990.

544. ***Clementi A., Impagliazzo R.*** Graph theory and interactive protocols for reachability problems on finite cellular automata **//** LNCS ***778*.-** Berlin-Heidelberg: Springer, 1994.

545. ***Библиотека программных средств для Maple – www.aladjev-maple-book.narod.ru/***

546. ***Дмитриев А.С. и др.*** Динамический хаос как парадигма современных систем связи **//** Зарубежная радиоэлектроника, ***№ 10*,** 1997.

547. ***Дмитриев А.С., Старков С.О.*** Передача сообщений с использованием хаоса и классическая теория информации **//** Зарубежная радиоэлектроника, ***№ 11*,** 1998.

548. ***Barca D. et al.*** Cellular automata for simulating lava flows: *A method and examples of the Etnean eruptions* **//** Transport Theory and Statistical Physics, ***23(1–3),*** 1994.

549. ***Bennett C.H et al.*** Cellular Automata ***'86*** Conference **/** Tech. Rep. ***MIT/LCS/TM-317,*** MIT Lab. for Comp. Sci., 1986.

550. ***Binder P.M.*** Domains and synchronization in high-dimensional cellular automata **//** Phys. Rev., ***E51,*** 1995.

551. ***Bruyn L., Van Den Bergh.*** Algebraic properties of linear cellular automata **//** Linear algebra and its applications, ***157,*** 1991.

552. ***Bunimovich L.A., Troubetzkoy S.*** Rotators, periodicity, and absence of diffusion in cyclic cellular automata **//** Journal of Stat. Phys., ***74(1/2),*** 1994.

553. ***Chopard B., Droz M.*** Cellular automata model for heat conduction in a fluid **//** Physical Letters***, A, 126 (8/9)***, 1988.

554. ***Chou Hui-Hsien.*** Self-Replicating Structures in a Cellular Automata Space **/** PhD Dissertation***, CS-TR-3715/UMIACS-TR-96-85,*** Univ. of Maryland, 1996.

555. ***Culik K., Yu S.*** Undecidability of ***CA*** classification schemes **//** Complex Systems, ***2,*** 1988.

556. ***Culik K. et al.*** Formal languages and global ***CA*** behavior **//** Physica ***D45,*** 1990.

557. ***D'amico et al.*** On computing the entropy of cellular automata ***/ LNCS 1443.-*** Berlin, 1998.

558. ***Das R. et al.*** A genetic algorithm discovers particle-based computation in cellular automata **/** Parallel Problem Solving in Nature.- Berlin: Springer-Verlag, 1994.

559. ***Durand B.*** Automates cellulaires: reversibilite et complexite **/** PhD Thesis, Ecole Normale Superieure de Lyon, 1994.

560. ***Gács P.*** Reliable cellular automata with self-organization **/** Proc. of the Conf. on Foundations of Comp. Sci., 1997.

561. ***Griffeath D., Gravner J.*** Cellular automaton growth on Z^1***:*** Theorems, examples, and problems **//** Advances in Appl. Math., ***21,*** 1998.

562. ***Huang W.*** General Purpose Cellular Automata Programming **/** Tech. Rep. ***TR #02-03,*** Iowa, 2002.

563. ***Li W. et al.*** Transition phenomena in ***CA*** rule space **//** Physica ***D45,*** 1990.

564. ***Mitchell M. et al.*** Evolving cellular automata to perform computations: *Mechanisms and impediments* **//** Physica ***D75, (1-3),*** 1994.

565. ***Sarkar P.*** A brief history of cellular automata ***// ACM*** Comp. Surveys, ***32,*** no. ***1,*** 2000.

566. ***Kier L.B. et al.*** *Modeling Chemical Systems using Cellular Automata****.-*** Berlin: Springer, 2005.

567. ***Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А.*** Классические однородные структуры**:** *Теория и приложения*.- Гродно: Изд-во ГрГУ, Гродненский государственный университет, 2008, 486 с.

568. ***Жукова Е.А. Hi-Tech:*** Динамика взаимодействий науки, общества и технологий **/** *Автореферат дисс. на соискание ученой степени доктора философских наук*, Томск, 2007.

569. ***Лебедев А.*** Вероятностные методы классификации клеточных автоматов **/** *Фундаментальная и прикладная математика*, ***8, № 2,*** 2002, 621- 626.

570. ***Задорожный В.Н.*** Общая статистическая структура простейших клеточных автоматов **//** Омский научный вестник, ***№ 2(31),*** 2005, 152-157.

571. ***Задорожный В.Н., Юдин Е.Б.*** Мультиагентный подход в имитационном моделировании клеточных автоматов и сетевых структур ***//*** Имитационное моделирование: *Теория и практика*, ***ИММОД-2007,*** Санкт-Петербург, 2007.

572. ***Задорожный В.Н.*** Имитационное и статистическое моделирование.**-** Омск, 2007.

573. ***Бандман О.Л.*** Параллельная реализация асинхронных клеточно-автоматных алгоритмов **//** Вестник Томского госуниверситета**.-** Приложение ***№ 18*****,** 2006.

574. ***Nagel K., Schreckenberg M.*** A cellular automaton model for freeway trafic **//** J. Physique I France **2**.

575. ***Короновский А., Трубецков Д.*** Нелинейная динамика в действии**.-** Саратов: «Колледж», 2002.

576. ***Малинецкий Г., Степанцов М.*** Клеточные автоматы для расчета некоторых газодинамических процессов **//** Ж. вычисл. матем. и матем. физ.***, 36, № 5,*** 1996.

577. ***Тарасевич Ю.Ю.*** Математическое и компьютерное моделирование, Астрахань, 2004.

578. ***Шредер М.*** Фракталы, хаос, степенные законы**.-** Москва: РХД**,** 2005**,** ISBN 5-93972-041-2.

579. ***Ашихмин В.Н. и др.*** Введение в математическое моделирование**.-** Москва: Изд-во Логос, 2004.

580. ***Малинецкий Г., Степанцов М.*** Моделирование динамики движения толпы при помощи клеточных автоматов с окрестностью Марголуса **//** Изв. Вузов, *Прикладная нелинейная динамика,* ***5, № 5,*** 1997.

581. ***Новое в синергетике*** **/** *Новая реальность, новые проблемы, новое поколение*.- Москва: Наука, 2007.

582. ***Коротаев А. и др.*** Законы истории. Математическое моделирование исторических макропроцессов: *Демография, экономика, войны*.-Москва: Изд-во КомКнига, 2005.

583. ***Breukelaar R., Bäck Th.*** Using a genetic algorithm to evolve behavior in multi dimensional cellular automata, Universiteit Leiden, ***2300*** RA Leiden, The Netherlands.

584. ***Inverso S. et al.*** Evolutionary methods for ***2D*** cellular automata computation.- ***http://www.cs.rit.edu/~drk4633/mypapers/gacaProj.pdf,*** 2002.

585. ***Mitchell M., Crutchfield J.*** The evolution of emergent computation **/** SFI Tech. Rept., ***94-03-012,*** Proc. of the National Academy of Sciences, USA, 1994.

586. ***Бандман О.Л.*** Список публикаций автора по ***КА (CA).-*** **http://www.ssdonline.sscc.ru/o-l/**

587. ***Бандман О.Л.*** Параллельная реализация клеточно-автоматных алгоритмов пространственной динамики **/** Сибирский журнал вычислительной математики***, 4,*** 2007.

588. ***Бандман О.Л.*** Отображение физических процессов на их клеточно-автоматные модели **//** Вестник Томского Гос. Университета, Томск: Изд-во ТГУ***, № 3,*** 2008.

589. ***Кудрявцев и др.*** Введение в теорию автоматов.- Москва: Изд-во Наука, 1985, 318 с.

590. ***Подколзин А.С.*** О сложности моделирования в однородных структурах **/** Проблемы кибернетики, ***34,*** 1978, 109-131.

591. ***Landauer R.*** Irreversibility and heat generation in the computing process **/** IBM J. of Res. and Development, vol. ***5*****,** no. ***3*****,** 1961, pp. 183-191.

592. ***Fredkin E., Toffoli T.*** Conservative logic **//** Int. J. of Theor. Physics, vol. ***21*****,** no. ***3/4*****,** 1982.

593. ***Валиев К., Кокин А.*** От квантов к квантовым компьютерам **//** Природа, ***№ 12,*** 2002.

594. ***Бенне Ш., Ландауэр Р.*** Физические пределы вычислений **/** В мире науки, ***№ 9*****,** 1985.

595. ***Soma N.Y., Melo J.P.*** On irreversibility of von Neumann additive cellular automata on grids **//** Discrete Applied Mathematics, vol. ***154, 5,*** April 2006, pp. 861-866.

596. ***Cellular Automata: Theory and Experiment*** **/** Ed. ***H. Gutowitz.-*** Massachuzets: MIT Press, 1991.

597. ***Imai K., Morita K.*** Firing squad synchronization problem in reversible cellular automata **//** Theoretical Computer Science, vol. ***165, 2,*** October 1996, pp. 475-482.

598. ***Romani F.*** The parallelism principle: Speeding up the cellular automata synchronization **//** Information and Control, vol. ***36, 3,*** March 1978, pp. 245-255.

599. ***Bernardia V., Duranda B., Kari J.*** A new dimension sensitive property for cellular automata **//** Theoretical Computer Science, vol. ***345, 2-3,*** 2005, pp. 235-247.

600. ***Supratid S., Sadananda R.*** Determinism in cellular automata-investigation of transition rules **/** Intelligent Sensing and Information Processing, 2004, pp. 391 – 396.

601. ***Das A., Chaudhuri P.*** Vector space theoretic analysis of additive cellular automata and its application for pseudoexhaustive test pattern generation **//** IEEE, vol. ***42, 3,*** 1993, pp. 340-352.

602. ***Schroeder M.*** *Fractals, Chaos, Power Laws*.- New York: W.H. Freeman, 1991, 371 p.

603. ***Delorme M., Mazoyer J.*** *Cellular Automata: A Parallel Model*.- Berlin: Springer, 1999, 373 p.

604. ***Dubacq J.-C. et al.*** Kolmogorov complexity and cellular automata classification **//** Theoretical Computer Science, vol. ***259***, no. ***1***, 2001, pp. 271-285.

605. ***Al-Rabadi, Anas N.*** Reversible Logic Synthesis **/** *From Fundamentals to Quantum Computing*, ***XXIII***.- Berlin: Springer, 2004, ISBN 978-3-540-00935-1, 427 p.

606. ***James D., Niraj K. Jha.*** Reversible logic synthesis with Fredkin and Peres gates **//** ACM Journal on Emerging Technologies in Computing Systems, vol. ***4, 1,*** 2008, ISSN 1550-4832.

607. ***Kerntopf P.*** A new heuristic algorithm for reversible logic synthesis **//** Design Automation Conf. ***(DAC)***, ACM, Anaheim, CA, USA, 2004.

608. ***Anas N., Al-Rabadi, Zwick M.*** Reversible modified reconstructability analysis of Boolean circuits and its quantum computation **//** Kybernetes, vol. ***33, 5/5,*** 2004, pp. 921-932, ISSN 0368-492X.

609. ***Feynman R.P.*** *Feynman Lectures on Computation*.- **N.Y.:** Perseus Books, 1996.

610. ***Frank M.P.*** Reversibility for Efficient Computing **/** Ph.D. thesis, ***EECS*** Department, Massachusetts Institute of Technology, 1999.

611. ***Frank M.P.*** Approaching the physical limits of computing **//** Thirty-Fifth International Symp. on Multiple-Valued Logic, University of Calgary, Calgary, Canada, 2005, pp. 168-185.

612. ***Zheng Y., Huang C.*** A novel Toffoli network synthesis algorithm for reversible logic **/** Proc. Asia & South Pacific Design Automation Conference ***(ASP-DAC)***, 2009.

613. ***Вуни Г.Н.*** Теория систем.- Москва: Изд-во Радио и Связь, 1978, 288 с.

614. ***Evolving Cellular Automata: Papers – http://cse.ucdavis.edu/~evca/evabstracts.html***

615. ***Jiao J. et al.*** Building blocks for the molecular expression of quantum cellular automata: Isolation and characterization of a covalently bonded square array of two Ferrocenium and two Ferrocene complexes **//** J. Amer. Chem. Soc., ***125(25)***, 2003, 7522-7523.

616. ***Moore J., Hahn L.*** A cellular automata approach to detecting interactions among single-nucleotide polymorphisms in complex multi-factorial diseases **/** Pacific Symp. Biocomputing, 2002.

Об Авторе:
Аладьев Виктор Захарович

Аладьев В.З. родился ***14.06.1942*** в г. Гродно ***(****Беларусь****)***. После успешного завершения **2-**й средней школы ***(****Гродно****)*** в ***1959*** поступил на ***1-***й курс физико-математического факультета Гродненского университета, а в ***1962 г.*** был переведен на отделение «*Математики*» Тартусского университета ***(****Эстония****)***. В ***1966*** успешно закончил Тартуский университет по специальности «*Математика*». В ***1969*** поступил в аспирантуру Академии Наук Эстонии по специальности «*Теория вероятностей и математическая статистика*», которую успешно закончил в ***1972*** сразу по двум специальностям «*Теоретическая кибернетика*» и «*Техническая кибернетика*». В том же году ***Аладьеву В.З.*** присвоена докторская степень по математике за *первую* монографию ***«Mathematical Theory of Homogeneous Structures and Their Applications»***. С ***1969 г. Аладьев В.З. –*** Президент созданной им Таллиннской *творческой группы* ***(ТТГ)***, чьи научные результаты получили международное признание, прежде всего, в области исследований по *математической теории однородных структур* ***(****Cellular Automata****)***. С ***1972*** по ***1990 Аладьев В.*** занимал ответственные посты ***(****главный инженер, заместитель директора по науке****)*** в ряде проектно-технологических и научных организаций г. Таллинна *(ЭССР)*. В ***1991 г. Аладьев В.З.*** организовал научную фирму *VASCO Ltd*., а с конца ***1992 г. Аладьев В.З.*** становится вице-президентом *Salcombe Eesti Ltd*. Деятельность ***Аладьева В.З.*** на данных постах неоднократно отмечалась наградами и премиями Совета министров *СССР*, *ЦСУ СССР*, *ВГПТИ ЦСУ СССР* и др.

Аладьев В.З. является автором более ***400*** научных и научно-технических работ *(включая **70** книг, монографий и сборников статей)*, опубликованных в бывшем *СССР*, *России*, *ФРГ*, *Эстонии*, *Литве*, *Белоруссии*, *Украине*, *Чехословакии*, *Венгрии*, *Польше*, *Голландии*, *Болгарии*, *Великобритании*, *Японии*, *США*, *ГДР* и *Молдавии*. С ***1972 г.*** он является референтом и членом редколлегии международного математического журнала ***«Zentralblatt fur Mathematik»*** и с ***1980 г. –*** членом ***IAMM***. Им основана Эстонская школа по математической теории однородных структур *(Клеточных автоматов)*, чьи фундаментальные результаты получили международное признание, внеся определенный вклад в формирование нового раздела современной математической кибернетики.

Аладьевым В.З. введена ныне общепринятая русскоязычная терминология и получен целый ряд фундаментальных результатов по математической теории *однородных структур* (*Cellular automata*) и ее приложениям, в первую очередь, в математической *биологии* развития. Работы ***Аладьева В.З.*** получили отражение в математических энциклопедиях как советской, так и зарубежных, целом ряде монографий, статей и докладов в журналах, на международных конференциях различного уровня, часто цитируются ведущими исследователями в данной области.

Немало прикладных работ ***Аладьева В.З.*** относится также к информатике, среди которых можно отметить довольно широко известные книги и монографии по системам компьютерной алгебры и компьютерной математики ***(MathCAD, Reduce, Mathematica, Maple)***. Наряду с оригинальными изданиями им разработана большая библиотека новых программных средств для системы *Maple*, отмеченная сетевой наградой *Smart Award* от *Smart DownLoads Network*, которая на сегодня весьма широко используется в ***СНГ*** и за ее пределами. Библиотека ***Аладьева В.З.*** версии ***2.2013*** для *Maple* существенно расширяет диапазон и эффективность использования системы *Maple* на платформе *Windows* благодаря находящимся в ней средствам в *трех* основных направлениях: ***(1)*** устранение ряда основных дефектов и недостатков, ***(2)*** расширение возможностей целого ряда стандартных средств, и ***(3)*** пополнение системы рядом новых средств, расширяющими возможности ее среды программирования, включая средства, улучшающие также уровень совместимости релизов ***6–12*** системы. Основное внимание было уделено дополнительным средствам, созданным в процессе использования пакета *Maple* релизов ***4–11,*** которые по ряду параметров существенно расширяют возможности системы и облегчают работу с ней. Текущая версия библиотеки содержит средства ***(более 750),*** ориентируемые на основные виды вычислений и обработки информации. Большой опыт использования этой библиотеки в целом ряде университетов и научно-исследовательских организаций ***СНГ*** и в других странах подтвердил ее высокие эксплуатационные характеристики при программировании различных приложений в системе ***Maple.*** Многие работы ***Аладьева В.З.*** в данном направлении представлены в интернете для свободного доступа, а также включены и в списки обязательной либо дополнительной литературы в программы университетов. Довольно широко известны и его мастер–классы, даваемые в университетах ***СНГ*** и в других странах.

В ***1993 г. Аладьев В.*** по результатам своей многолетней научной активности был избран членом рабочей группы ***IFIP (****International Federation for Information Processing****)*** по математической теории однородных структур и ее приложениям. На целом ряде международных научных форумов по математике, кибернетике и других ***Аладьев В.З.*** участвовал в качестве члена оргкомитета либо приглашенного докладчика. В апреле ***1994 Аладьев В.З.*** по совокупности научных исследований в области кибернетики избран академиком Российской Академии Космонавтики по отделению «*Фундаментальных исследований*»***,*** тогда как в сентябре ***1994 г. Аладьев В.*** избирается академиком Российской Академии Ноосферы по отделению «*Информатика*»***.*** В сентябре ***1995 г. Аладьев В.З.*** избирается действительным членом ***(****академиком****)*** *Российской Академии Естественных Наук* ***(РАЕН)*** по отделению «*Ноосферные знания и технологии*»***,*** а уже в ***1998 г.*** он избирается почетным членом Российской Экологической Академии.

В ноябре ***1997 г. Аладьев В.З.*** избран академик-секретарем ***Балтийского*** отделения Российской Академии Ноосферы, объединяющего ученых и специалистов *трех* стран Балтии и Белоруссии, работающих в области комплекса научных дисциплин, входящих в проблематику ноосферы и смежных с нею областей научной деятельности, включая теоретические и прикладные вопросы по проблематике однородных структур. По результатам реорганизации Российской Академии Ноосферы в Международную, в декабре ***1998 Аладьев В.*** избирается Первым вице-президентом. В конце ***1999 Аладьев В.*** по совокупности научных работ в области кибернетики и информатики избирается иностранным членом ***РАЕН*** по отделению «*Информатики и кибернетики*»***.*** Наиболее значительные научные результаты ***Аладьева В.З.*** относятся к математической теории *однородных структур* ***(****Клеточных автоматов****)*** и ее приложениям. Область научных интересов ***Аладьева В.З.*** включает математику, информатику, кибернетику, вычислительные науки, физику, технику и целый ряд других естественно-научных направлений. В ***http://www.famous-scientists.ru/2763/*** и ***http://viperson.ru/wind.php?ID=535085*** можно получить более детальную справку по автору.